7月1日 数学 II 演習問題

6.1 問題

n 次正方行列 $A = (a_{ij})_{ij}$ が上三角行列または下三角行列であるとき, $\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ であることを示せ.

6.2 問題

次の正方行列の行列式を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -5 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 14 & 4 & 10 \\ -1 & 0 & -4 & -1 & -2 \\ -9 & -3 & -17 & -4 & -21 \\ -3 & 4 & -7 & -3 & -9 \end{pmatrix}$

6.3 問題

$\begin{pmatrix} 1 & -a & & & \\ & 1 & -a & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -a \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ. ただし空白の部分の成分はすべて 0 とする.

6.4 問題

$m+n$ 次正方行列 A を区分けして

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

とする. ただし, A_{11} は m 次正方行列 A_{22} は n 次正方行列である. もし A_{11} が正則行列ならば,

$$\det A \ = \ \det A_{11} \cdot \det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})$$

となることを示せ. 同様に A_{22} が正則のとき, $\det A = \det A_{22} \cdot \det(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})$ である.

6.5 問題

$m+n$ 次正方行列の行を $m+n$ のサイズに区分けし, 列を $n+m$ (順番注意) のサイズに区分けしたとき, $\begin{pmatrix} O & A \\ B & C \end{pmatrix}$ の形であるとする．ここで, A は m 次正方行列で, B は n 次正方行列である．このとき,

$$\det \begin{pmatrix} O & A \\ B & C \end{pmatrix} = (-1)^{mn} \det A \cdot \det B$$

を示せ.

6.6 問題

n 個の n 変数関数 $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を考える．(i, j) 成分が偏微係数 $\partial f_i / \partial x_j$ となっているような n 次正方行列の行列式 $\det(\partial f_i / \partial x_j)_{ij}$ を Jacobian と呼び, $\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)/\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ と書く．解析学で (そのうち) 習う重要な量である．いま,

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_i}{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

と置くとき, Jacobian $\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)/\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を求めよ.

6.7 問題

n 次正方行列 A_n を

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

で定める.

$$\det A_n = \frac{((n-1)!)^3}{(2n-1)!} \cdot \frac{((n-2)!)^3}{(2n-2)!} \cdots \cdot \frac{(0!)^3}{n!}$$

が成り立つことを示せ．例えば, $\det A_2 = 1/12$、$\det A_3 = 1/2160$、$\det A_4 = 1/6048000$ である.