

## 6月17日 数学II 演習問題

### 5.1 問題

次の連立一次方程式の一般解を (存在するならば) 求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 & -7 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & -6 & -2 \\ 3 & 3 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ 11 \\ -15 \end{pmatrix}$$

$$(5) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

### 5.2 問題

次の行列が正則ならば, 逆行列を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 9 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 9 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & -9 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

### 5.3 問題

次のベクトルについて、一次独立か一次従属か判定せよ.

$$(1) \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ -5 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

### 5.4 補題

$m \times n$  行列  $A$  に対して,  $AA^{-1}A = A$  を満たす  $n \times m$  行列  $A^{-1}$  を  $A$  の一般逆行列という.

- (i) 一般逆行列は存在することを示せ. (ヒント: 階数標準形)
- (ii) 一般逆行列の一つを  $A^{-1}$  とするとき, 任意の  $n \times m$  行列  $B$  に対して,  $A^{-1} + B - A^{-1}ABAA^{-1}$  は  $A$  の一般逆行列であることを示せ. 逆に,  $A$  の一般逆行列はすべて, このようにして得られることを示せ.

### 5.5 問題

次の置換について, 偶置換か奇置換か判定せよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 7 & 2 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 3 & 6 & 2 & 7 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$$