

## 6月3日 数学II 演習問題

### 4.1 問題

一次変換  $\mathbb{C}^n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}^n$  が行列  $A$  で表されているとする. このとき,  $\varphi$  が逆関数をもつことと,  $A$  が正則行列であることは同値であることを示せ.

### 4.2 問題

$n$  次正方行列  $A = (a_{ij})_{ij}$  に対し,  $\text{tr} A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$  で定義されるスカラーをトレースと呼ぶ.

- (i)  $A$  を  $m \times n$  行列,  $B$  を  $n \times m$  行列とすると,  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$  を示せ.
- (ii)  $A$  を  $n$  次正方行列,  $P$  を正則な  $n$  次正方行列とすると,  $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr} A$  を示せ.

### 4.3 問題

$AB - BA = E$  を満たす  $n$  次正方行列  $A, B$  は存在しないことを示せ.

### 4.4 問題

次の行列の階数を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 & 20 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -3 & -13 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 4 & 1 & -8 & 9 & 19 \\ -2 & -1 & 2 & -3 & -11 \\ 1 & 0 & -3 & 3 & 4 \\ -3 & -2 & 1 & -3 & -18 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & -1 & 2 & -8 \\ -8 & 6 & 2 & -5 & 14 \end{pmatrix}$$

#### 4.5 問題

下にあげた正方行列を  $A$  とするとき,  $A$  に左基本変形を施して, 上三角行列に変形する. 用いる基本変形は, 第  $i$  行を  $c$  倍して第  $j$  行に足す左基本変形でしかも  $i < j$  の場合のみとする. 以下の行列を実際に変形して, 上三角行列にせよ. またその結果を用いて, 下三角行列  $L$  と上三角行列  $U$  の積によって  $A = LU$  と表せ.

$$(1) \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

#### 4.6 問題

一般に, 行列の列  $A_1, A_2, A_3, \dots$  の極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$  を, 成分ごとの極限として定める. すなわち,  $A_n = (a_{ij}^{(n)})_{ij}$  と置くと, 極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$  の  $(i, j)$ -成分は  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{ij}^{(n)}$  で与えられる. この定義のもとで, 任意の正方行列  $A$  は, 正則行列  $A_n$  の列の極限  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$  として与えられることを示せ.