5月20日 数学II 演習問題

3.1 問題

$\boldsymbol{v}$ を列ベクトル $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1+2i \\ 1-3i \\ 3+i \end{pmatrix}$ とするとき, $E-2\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^*$ を計算せよ. ここで, E は 3×3 単位行列であり, A^* は 行列 A を転置した上で各成分の共役複素数をとってできる行列を表す (随伴行列と呼ばれる). A が $m\times n$ 行列ならば A^* は $n\times m$ 行列であることに注意. また, 上で求めた行列 $E-2\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^*$ を U と置くとき, UU^* を計算せよ.

3.2 問題

A を m 次正方行列, B を n 次正方行列として, $M=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ の形の行列を考える. もし M が正則ならば, 逆行列 M^{-1} は $\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$ で与えられることを示せ.

3.3 問題

$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$ の形をした正方行列を巡回行列と呼ぶ. 二つの巡回行列の積は, 巡回行列であることを示せ.

3.4 問題

上三角行列が正則であるためには, その対角成分がすべて 0 と異なることが必要十分であることを示せ. また, 逆行列も上三角行列であることを示せ.

3.5 問題

正方行列 N を $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ とするとき, N は冪零であることを示せ. すなわち, ある $n\geq 1$ があって, $N^n=O$ であることを示せ.

3.6 問題

実ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ に対して, 3 次正方行列 $X(\boldsymbol{a})=\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$ を対応させるとき, $X(\boldsymbol{a})X(\boldsymbol{b})-X(\boldsymbol{b})X(\boldsymbol{a})=X(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ が成り立つことを示せ.

3.7 問題

A, B を $\mathbb{R}$ 上の n 次正方行列とする. $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ の形の行列が正則ならば,
その逆行列は $\begin{pmatrix} C & -D \\ D & C \end{pmatrix}$ の形をしていることを示せ.