

4月15日 数学II 演習問題

1.1 問題

行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ による一次変換を考える. 単位円 $x^2 + y^2 = 1$ を写して得られる曲線の方程式を求めよ.

1.2 問題

平面上の直線 $l: ax + by = 0$ が与えられているとする. 直線 l に関して線対称な点に写す一次変換を次の二通りの方法で求めよ. (i) 各点 (s, t) に対して, 直線 l に関し線対称な点 (u, v) を具体的に求める方法. (ii) ある角度 θ で回転させることによって直線が x 軸に一致するように変換した上で, x 軸対称な点に写し, その後で $-\theta$ 回転させて戻す方法.

1.3 問題

空間内の点 $P = (-1, 1, 1)$ と $Q = (3, 1, 2)$ を考える. 次を満たす点 X の軌跡を求めよ: ベクトル \overrightarrow{OX} は, \overrightarrow{OP} と直交し, \overrightarrow{OQ} と角 120° をなす.

1.4 問題

空間内の点 A, B, P, Q を取る. ただし, $A \neq B$ 及び $P \neq Q$ であり, 線分 AB と線分 PQ は平行でないと仮定する. 4本の線分 AP, AQ, BP, BQ を $t: (1-t)$ に内分する4点は平行四辺形の頂点となることを示せ. ただし $0 \leq t \leq 1$ とする.

1.5 問題

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ に対して, A^n を求めよ.

1.6 問題

p を奇素数とする. 行列 $\begin{pmatrix} 1 & p \\ p & 1+p \end{pmatrix}$ の p 乗を考える. その (1,2)-成分 (右上の成分) は, p^2 で割り切れるが p^3 では割り切れないことを示せ.