1 月 13 日 数学 II 問題

13.1 問題

2 つの行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ および $B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ 6 & -2 & 7 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ を考える.

(i) $AB = BA$ であることを確かめよ.

(ii) A が固有値 1 を持つことを示し, その固有空間を決定せよ.

(iii) 固有値 1 に対する A の固有ベクトルであり, なおかつ B の固有ベクトルでもあるようなベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ. また, そのベクトルに対する B の固有値はいくつか.

13.2 問題

次の行列が正規行列であることを確かめ, さらにユニタリ行列で対角化せよ.

(i) $\begin{pmatrix} -1-4i & -2i \\ 2i & -1-4i \end{pmatrix}$.

(ii) $\begin{pmatrix} -15+10i & -5+10i & 10-20i \\ -5-10i & -19-14i & -2-12i \\ 10+20i & -2-12i & -16+4i \end{pmatrix}$. ちなみに固有値は, $-40+10i, 10+10i, -20-20i$ である.

13.3 問題

次の対称行列および Hermite 行列を, 直交行列ないしはユニタリ行列で対角化せよ.

(i) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & -3 & 8 \\ -6 & 8 & -1 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} -2 & -9-9i & 9-9i \\ -9+9i & 9 & -11i \\ 9+9i & 11i & 9 \end{pmatrix}$

13.4 問題

ユニタリかつ Hermite な正方行列 A を考える. このとき, $\|\boldsymbol{v}_i\| = 1$ を満たす複素列ベクトルを用いて, $A = E - 2(\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_1^* + \boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_2^* + \cdots + \boldsymbol{v}_s\boldsymbol{v}_s^*)$ $(s \geq 0)$ と書けることを示せ (E は単位行列).

13.5 問題

$\mathbb{R}^3$ の中の m 点 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ が与えられているとする. $\boldsymbol{x}_i$ から直線 ℓ への距離を d_i と置くとき, 距離の 2 乗和 $\delta = d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_m^2$ を最小にするような直線 ℓ は, 次のように求められることが知られている. m 点の平均 $\bar{\boldsymbol{x}} = (1/m)\sum_{i=1}^m \boldsymbol{x}_i$ をとり, $\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{x}_i - \bar{\boldsymbol{x}}$ と置く. 3 次の対称行列を $T = \boldsymbol{y}_1{}^t\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2{}^t\boldsymbol{y}_2 + \cdots + \boldsymbol{y}_m{}^t\boldsymbol{y}_m$ で定義する (各 $\boldsymbol{y}_i$ を列ベクトルと見ている). いま T の最大固有値に対する (任意の) 固有ベクトルを $\boldsymbol{a}$ とするとき, 求める直線 ℓ は, t をパラメータとして $\bar{\boldsymbol{x}} + t\boldsymbol{a}$ で与えられる. このことを既知として, 以下の問に答えよ. $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ からの距離の 2 乗和 δ が最小となるような直線と, そのときの δ の値を求めよ.