12 月 9 日 数学 II 演習 (解答)

12.1 問題

n 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & \ddots & \\ & & & 0 & \ddots & \\ & & & & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots\cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

の固有多項式を求めよ．ただし, A において空白部の成分はすべて 0 とする．また, この固有多項式が重根をもつとき, A は対角化が不可能であることを示せ．

(解答)　$k \times k$ 上三角行列 B_k と $l \times l$ 下三角行列 C_l を

$$B_k = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & & \\ & \lambda & -1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \qquad C_l = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ \lambda & -1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda & -1 \end{pmatrix}$$

と置く．固有多項式 $\det(\lambda E - A)$ を一番下の行で展開すると,

$$(-1)^{n+1}\left(a_0|C_{n-1}| - a_1\begin{vmatrix} B_1 & O \\ O & C_{n-2}\end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} B_2 & O \\ O & C_{n-3}\end{vmatrix}\right.$$
$$\left. + \cdots + (-1)^{n-2}a_{n-2}\begin{vmatrix} B_{n-2} & O \\ O & C_1\end{vmatrix} + (-1)^{n-1}(\lambda + a_{n-1})|B_{n-1}|\right)$$

となる． $|B_k| = \lambda^k$ かつ $|C_l| = (-1)^l$ なので, これは $a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$ に等しい． これが求める固有多項式である． その根の一つを λ とする． 連立一次方程式 $(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{o}$ を解こう． ここで $\boldsymbol{x} = {}^t(x_0\ x_1\ \cdots\ x_{n-1})$ とする．両辺の第 1 成分の比較から $x_1 = \lambda x_0$ となる．また第 2 成分の比較から $x_2 = \lambda x_1$ となる．よって, $x_2 = \lambda^2 x_0$ である．以下順に第 $n-1$ 成分まで比較すると, $x_k = \lambda^k x_0$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ となることが分かるので, 固有空間 W_λ は $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$ から張られる 1 次元空間である．特に, λ が重根のときは, 固有空間の次元 1 が重根度 ≥ 2 より真に小さくなる．よって, A は対角化不可能である．

12.2 問題
$\mathbb{C}^4$ の部分空間 W_1 として, 連立一次方程式 $2x+y-w=0$ および $y-2z=0$ の解 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ からなる空間をとり, W_2 として連立一次方程式 $x+y-w=0$ および $4y-10z+w=0$ の解からなる空間をとる. このとき, 部分空間 W_1+W_2 を決定せよ.

(解答)　直交補空間を用いて $W_1+W_2=(W_1^\perp \cap W_2^\perp)^\perp$ が成り立つことに注意する. W_i を定める連立一次方程式から分かるように, 直交補空間 $W_1^\perp$ は, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ から張られる 2 次元空間であり, $W_2^\perp$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix}$ から張られる 2 次元空間である. ここで問題 10.2 のようにして, $W_1^\perp \cap W_2^\perp$ を求めると, それは $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -10 \\ -1 \end{pmatrix}$ から張られる 1 次元空間となる. その直交補空間として W_1+W_2 はいわゆる超平面 $2x+6y-10z-w=0$, つまりこの方程式を満たす ${}^t(x\,y\,z\,w)$ 全体からなる 3 次元空間となる. 別の言い方をすると, たとえば $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -10 \end{pmatrix}$ を基底にもつ 3 次元空間である.

12.3 問題
次の基底を, Schmidt の直交化法で正規直交基底に直せ.

(i) $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$

(ii) $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}.$

(iii) $\begin{pmatrix} 4+4i \\ 1-4i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2+i \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} -1+i \\ 1+4i \\ 4+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4-2i \\ -4-2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3-2i \\ -1+5i \end{pmatrix}.$

(解答)　(i) 求める正規直交基底は, $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$, $\frac{1}{15}\begin{pmatrix}5\\2\\-14\end{pmatrix}$, $\frac{1}{15}\begin{pmatrix}-10\\11\\-2\end{pmatrix}$ である.　(ii) 求める正規直交基底は, $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$, $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}$, $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-1\end{pmatrix}$ である. (iii) 求める正規直交基底は, $\frac{1}{7}\begin{pmatrix}4+4i\\1-4i\end{pmatrix}$, $\frac{1}{7}\begin{pmatrix}4-i\\4+4i\end{pmatrix}$ である. 内積 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$ を取るときに, $\boldsymbol{b}$ の成分については共役複素数にすることを忘れずに.　(iv) 求める正規直交基底は, $\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1+i\\1+4i\\4+i\end{pmatrix}$, $\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-4\\3+i\\-3+i\end{pmatrix}$, $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-i\\1\\i\end{pmatrix}$ である.

12.4 問題

有限次元の計量線形空間 V の部分集合 X (部分空間とは限らない) に対して, $X^{\perp}$ を $\{\boldsymbol{y} \in V \mid \forall \boldsymbol{x} \in X. \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = 0\}$ と定義する (部分空間に対する直交補空間の定義と同じ).

(i)　$X \subseteq X^{\perp\perp}$ を示せ.

(ii)　$X^{\perp}$ は部分空間となることを示せ.

(iii)　$X \subseteq Y$ ならば $X^{\perp} \supseteq Y^{\perp}$ となることを示せ.

(iv)　$X^{\perp\perp}$ は X を含む最小の部分空間であることを示せ (問題 10.1 参照).

(解答)　(i) $\boldsymbol{x} \in X$ とする. 任意に $\boldsymbol{y} \in X^{\perp}$ を取ると, $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = 0$ である. よって, $\boldsymbol{x} \in X^{\perp\perp}$ が成り立つ. すなわち, $X \subseteq X^{\perp\perp}$ が示された.

(ii)　$\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}' \in X^{\perp}$ とすると, 任意の $\boldsymbol{x} \in X$ に対して, $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}'\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}'\rangle = 0$ となるので, $\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}' \in X^{\perp}$ となる. よって, $X^{\perp}$ は和について閉じている. 同様に, スカラー倍について閉じていることも示される. よって, $X^{\perp}$ は V の部分空間である.

(iii)　$\boldsymbol{y} \in Y^{\perp}$ とする. 任意の $\boldsymbol{x} \in X$ を取ると, $X \subseteq Y$ より $\boldsymbol{x} \in Y$ でもあるので, $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = 0$ である. 故に, $\boldsymbol{y} \in X^{\perp}$ となり, $X^{\perp} \supseteq Y^{\perp}$ が示された.

(iv)　$X^{\perp\perp}$ が X を含むことは (i) で確認済みである. また, (ii) より, $X^{\perp\perp}$ は部分空間である. 最小性を見るには, $X \subseteq W$ を満たす部分空間 W を任意に取る. このとき, $X^{\perp\perp} \subseteq W$ が成り立つことが証明できれば, $X^{\perp\perp}$ は X を含む最小の部分空間である. (iii) を $X \subseteq W$ に二回使えば, $X^{\perp\perp} \subseteq W^{\perp\perp}$ が得られる. ここで, 有限次元計量線形空間 V の部分空間 W に対して $W^{\perp\perp} = W$ が成り立つ. よって, $X^{\perp\perp} \subseteq W$ が示された. すなわち, $X^{\perp\perp}$ は, X を含む最小の部分空間である.

12.5 問題

(i) $[-\pi,\pi]$ 上で連続な実数値関数全体のなす $\mathbb{R}$ 上の線形空間を V とする. V の内積を

$$\langle f,g\rangle \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$$

で定義する. この定義のもと, V は計量線形空間となることを示せ.

(ii) 0 以上の整数 k に対して $f_k(x)=\cos kx$ と置く. このとき, $\langle f_j,f_k\rangle$ を求めよ.

(iii) $a_1\cos x+a_2\cos 2x+\cdots+a_n\cos nx=1$ が恒等的に成り立つような実数 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ は存在しないことを示せ.

(解答)　(i) いずれの公理もほぼ自明である. たとえば $\langle f_1+f_2,g\rangle=\langle f_1,g\rangle+\langle f_2,g\rangle$ を確かめよう. 左辺からスタートすると $\int_{-\pi}^{\pi}(f_1(x)+f_2(x))g(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}f_1(x)g(x)\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}f_2(x)g(x)\,dx$ となり, これは右辺に等しい.

(ii)　$\langle f_0,f_0\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}dx=2\pi$ である. $k\geq 1$ のとき, $\langle f_0,f_k\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx=0$ である. よって $\langle f_k,f_0\rangle=0$ でもある. また, $j,k\geq 1$ のとき, $\langle f_j,f_k\rangle$ を求めると, $\cos jx\cos kx=(1/2)(\cos(j+k)x+\cos(j-k)x)$ となるが $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(j-k)x\,dx$ は $j=k$ のときを除いて 0 になり, $j=k$ のときは 2π になる. 一方 $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(j+k)x\,dx$ は常に 0 である. よって $j,k\geq 1$ の場合は, $\langle f_j,f_k\rangle$ は $j=k$ のときに限り π であり, $j\neq k$ のときは 0 である. 次の問題への布石として注意しておくと, $1/\sqrt{2\pi},(1/\sqrt{\pi})\cos x,(1/\sqrt{\pi})\cos 2x,\ldots,(1/\sqrt{\pi})\cos nx$ は, $f_0,f_1,f_2,\ldots,f_n$ で張られる V の部分空間の正規直交基底になっている.

(iii)　上に述べたように正規直交基底ができている. 基底は一次独立であるのだから, そのような a_k が存在しないのは明らかである. あるいは次のように直接的に証明することもできる. 問題の恒等式の各辺と $f_k=\cos kx$ $(1\leq k\leq n)$ の内積を取ってみる. すると, 左辺の方は $\sum_j a_j\langle f_j,f_k\rangle=a_k\pi$ が値となるが, 右辺の方は $\langle f_0,f_k\rangle=0$ である. よって, $a_k=0$ でなければならない. しかるにそのとき左辺は 0, 右辺は 1 となって矛盾する. すなわち問題の恒等式を満たすような a_k は存在しない.

12.6 問題

(i) 有限次元の計量線形空間 V 上の線形変換 $V\xrightarrow{\varphi}V$ を考える. 部分空間 $W\subseteq V$ が φ に関して不変であることと, 直交補空間 $W^{\perp}$ が φ^* に関して不変であることは同値であることを示せ.

(ii) $\mathbb{R}^3$ の標準基底に対して, 行列 $A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\-7&3&3\\-3&1&2\end{pmatrix}$ で表される線形変換を考える. 原点を通る平面 π があって, π 上の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し

て $A\boldsymbol{x}$ は再び π 上にあるという．そのような平面 π を決定せよ．

(解答)　(i) たとえば, W が φ-不変であるとして, $W^{\perp}$ が φ^*-不変であることを示そうすなわち, $\boldsymbol{y} \in W^{\perp}$ として, $\varphi^*(\boldsymbol{y}) \in W^{\perp}$ を示せばよい．それには, 任意に $\boldsymbol{x} \in W$ を取って, $\langle \boldsymbol{x}, \varphi^*(\boldsymbol{y}) \rangle = 0$ を証明すればよいのだが, 部分空間 W は φ-不変だったので $\varphi(\boldsymbol{x}) \in W$ となって, $\langle \boldsymbol{x}, \varphi^*(\boldsymbol{y}) \rangle = \langle \varphi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \rangle = 0$ が得られる．よって, W が φ-不変ならば, $W^{\perp}$ は φ^*-不変であることが分かった．また今示したことから, $W^{\perp}$ が φ^*-不変ならば, $W^{\perp\perp}$ が φ^{**}-不変となるが, 有限次元の計量線形空間上では $W^{\perp\perp} = W$ かつ $\varphi^{**} = \varphi$ なので W は φ-不変となる．故に逆も示された．

(ii)　問題の条件を満たす π とは, A に関して不変な 2 次元の部分空間に他ならない．前半より, A^* に関して不変な 1 次元部分空間 W を決めることができれば, その直交補空間 $W^{\perp}$ が A に関して不変な 2 次元部分空間となる．A^* に関して不変な 1 次元の部分空間 $W \subseteq \mathbb{R}^3$ とは, A^* の実固有値に対する固有ベクトルの一つから張られる 1 次元空間に他ならない．そこで, A^* の固有ベクトルを求める．A^* の固有方程式は $(\lambda - 1)^3$ となって, 固有値は 1 のみであり, その固有ベクトルを求めると $\boldsymbol{e} := {}^t(1\,0\,-1)$ のスカラー倍のみである．よって, A^*-不変な 1 次元部分空間 W は, $\boldsymbol{e}$ で張られる空間だけである．故に, A-不変な 2 次元空間は, 直交補空間 $W^{\perp} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e} \rangle = 0\}$ で与えられる．すなわち, $x - z = 0$ なる平面である．