11 月 25 日 数学 II 演習 (解答)

11.1 問題

$\mathbb{R}^3$ の部分空間として, $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ のそれぞれで張られる 3 個の 1 次元空間を W, W', W'' とする. 和空間 $W + W' + W''$ が直和 $W \oplus W' \oplus W''$ であるかどうか判定せよ.

(解答)　3 個のうち 2 つの和はいずれも直和になっている. たとえば $W + W'$ は直和である. しかし, $W + W' + W''$ は直和ではない. 実際,

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}'' = \mathbf{o}$ となるような $\boldsymbol{x} \in W, \boldsymbol{x}' \in W', \boldsymbol{x}'' \in W''$ で $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}'' = \mathbf{o}$ でないようなものが存在する.

11.2 問題

次の行列を A とするとき, $P^{-1}AP$ が対角行列となるような P が存在するならば, そのような正則行列 P, および得られる対角行列を求めよ.

(i) $\begin{pmatrix} -7 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -21 & 10 & 12 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} -8 & -6 & -18 \\ 2 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} -6 & 6 & 5 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

(解答)　以下の解答において, P は一意ではないので他の答えもあり得る. 対角行列は, 対角成分の並べ替えを除いて一意に決まる.

(i)　固有多項式 $\det(A - \lambda E)$ は, $(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$ となるので, 固有値は $1, 2, 3$ である. 固有値それぞれに対する固有ベクトルとしては, たとえば, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$ が取れるので, これらを並べてできる正則行列を P とすればよい. このとき, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -11 & 6 & 5 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ であって, $P^{-1}AP$ は対

角行列 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$ となる.

(ii)　固有多項式は $\lambda(\lambda+2)^2$ なので, 固有値は $0, -2$ である. 固有値 0 の固有ベクトルとしては $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が取れる. 固有値 2 の固有空間を求めるために $(A+2E)\boldsymbol{x} = \mathbf{o}$ を解くと, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が取れるので, 固有空間は 2 次元で, 固有値 -2 の重根度と一致する. よって, A は行列 $P = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ で対角化可能で, 対角成分 $0, -2, -2$ を持つ対角行列が得られる.

(iii)　固有多項式はやはり $\lambda(\lambda+2)^2$ である. しかし, 固有値 -2 に対する固有空間を調べると, 1 つのベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ によって張られる部分空間となり, その次元 1 は -2 の重根度より小さい. よって対角化は不可能である.

11.3 問題

A を n 次正方行列とする. 固有多項式 $\det(\lambda E - A)$ の λ^{n-1} 次の係数は $-\operatorname{tr} A$ であり, 定数項は $(-1)^n \det A$ となることを示せ.

(解答 1)　第一に, 固有多項式 $\det(\lambda E - A)$ の定数項を求める. それには $\lambda = 0$ を代入すればよい. すると固有多項式は $\det(-A) = (-1)^n \det A$ となるので, これが定数項である. 第二に, λ^{n-1} の係数が $-\operatorname{tr} A$ となることを示す. n に関する帰納法で証明する. $A = (a_{ij})_{ij}$ とする. 行列式 $\det(\lambda E - A)$ を第 1 行で展開すると, $(\lambda - a_{11})\Delta_{11} - a_{12}\Delta_{12} - \ldots - a_{1n}\Delta_{1n}$ となる. ここで, Δ_{ij} は $\lambda E - A$ の (i, j)-小行列式とした. このとき, A から第 1 行第 1 列を取り除いてできる $n-1$ 次正方行列を A_{11} とすると, $\Delta_{11} = \det(\lambda E - A_{11})$ となるので, 帰納法の仮定から $\Delta_{11} = \lambda^{n-1} - (\operatorname{tr} A_{11})\lambda^{n-2} + \cdots$ となる. すなわち λ^{n-2} の係数は $-(a_{22} + \cdots + a_{nn})$ である. よって $(\lambda - a_{11})\Delta_{11}$ の λ^{n-1} の係数は $-(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) = -\operatorname{tr} A$ である. その他の項 $a_{1j}\Delta_{1j}$ は λ のたかだか $n-2$ 次式なので, λ^{n-1} の項は出現しない. よって, 固有多項式 $\det(\lambda E - A)$ の λ^{n-1} 次の係数は $-\operatorname{tr} A$ である.

(解答 2)　λ^{n-1} の係数が $-\operatorname{tr} A$ となることに関しては次のように示すこともできる. 固有多項式 $\chi(x) = \det(xE - A)$ を $x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_0$ とすると, $x^n\chi(1/x) = c_n + c_{n-1}x + \cdots + c_0x^n$ なので, これを x で微分した上で $x = 0$ を代入すると c_{n-1} が得られる. ここで, $x^n\chi(1/x) = x^n \det((1/x)E - A) =$

$\det(E-xA)$ である．これを x で微分して, $x=0$ を代入してみよう．一般的に, 行列式の微分は $(d/dx)\det(\boldsymbol{b}_1\,\boldsymbol{b}_2\,\cdots\,\boldsymbol{b}_n)=\sum_{j=1}^n \det(\boldsymbol{b}_1\,\cdots\,(d/dx)\boldsymbol{b}_j\,\cdots\,\boldsymbol{b}_n)$ である．今の場合, A の第 j 列を $\boldsymbol{a}_j$ と書くと, $(d/dx)(\boldsymbol{e}_j-x\boldsymbol{a}_j)=-\boldsymbol{a}_j$ なので, $(d/dx)\det(E-xA)=\sum_{j=1}^n \det(\boldsymbol{e}_1-x\boldsymbol{a}_1\,\cdots\,-\boldsymbol{a}_j\,\cdots\,\boldsymbol{e}_n-x\boldsymbol{a}_n)$ となる．ここで, $x=0$ を代入すれば, $\sum_{j=1}^n \det(\boldsymbol{e}_1\,\cdots\,-\boldsymbol{a}_j\,\cdots\,\boldsymbol{e}_n)$ となるが, これは $-\sum_{j=1}^n a_{jj}=-\operatorname{tr}A$ に等しい．よって, λ^{n-1} の係数 c_{n-1} は $-\operatorname{tr}A$ に等しいことが示された.

11.4 問題

すべての成分が 1 であるような n 次正方行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有空間を求めよ.

(解答)　固有値を λ, 固有ベクトルを ${}^t(x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)$ とすると, 定義から $x_1+x_2+\cdots+x_n=\lambda x_i$ となる．これを, すべての $i=1,2,\ldots,n$ について足し合わせると, $n(x_1+x_2+\cdots+x_n)=\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ となり, $n=\lambda$ または $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ が得られる．後者の場合は, $0=\lambda x_i$ がすべての i に対して成り立つので, 固有値 λ は必然的に 0 である．その固有空間は, $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ を満たすすべてのベクトル ${}^t(x_1\,x_2\,\ldots\,x_n)$ からなり, これは明らかに $n-1$ 次元である．よって, もう一つの固有値 $\lambda=n$ に対する固有空間は必然的に 1 次元である．等式 $x_1+x_2+\cdots+x_n=nx_i$ が成り立つので, $x_1=x_2=\cdots=x_n$ となる．すなわち, ${}^t(1\,1\,\cdots\,1)$ が張る 1 次元空間が, $\lambda=n$ に対する固有空間である.

11.5 問題

(i)　正方行列 A が正則でないことと, A が 0 を固有値に持つことは同値となることを示せ.

(ii)　ある自然数 m があって, $A^m=O$ となる正方行列 A を冪零行列という. A が冪零行列であることと, A の固有値が 0 のみであることは同値となることを示せ.

(解答)　(i) A が正則でないことと, $A\boldsymbol{x}=\mathbf{o}$ を満たす $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{o}$ が存在することは同値である．また, これは 0 が固有値となることと同値である．(ii) A を n 次正方行列とする．まず A が冪零 $(A^m=O)$ と仮定する．A の固有値 λ に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{o}$ とすると $A^m\boldsymbol{x}=\lambda^m\boldsymbol{x}$ となるが, 左辺は仮定より $\mathbf{o}$ に等しいので, $\boldsymbol{x}\neq 0$ より $\lambda^m=0$ が得られる．すなわち $\lambda=0$ である．逆に A の固有値は 0 のみであるとする．このとき, A の固有多項式は $\chi(\lambda)=\lambda^n$ となる．よって, Cayley-Hamilton の定理より $A^n=O$ である.

ゆえに A は冪零となる.

11.6 問題

n 次以下の $\mathbb{R}$ 係数の多項式の作る線形空間を V とする.

(i) 多項式 $f(x)$ を x 軸方向に -1 だけ平行移動する操作は, V 上の線形変換を定める. この線形変換の固有値と固有空間を決定せよ.

(ii) 多項式 $f(x)$ のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動したとき, 元のグラフと同一になるのはどういう場合か.

(解答) (i) V の基底として $1, x, x^2, \ldots, x^n$ を取る. 問題の線形変換で x^k は $(x+1)^k = \sum_i \binom{k}{i} x^i$ に写されるから, 行列

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & 2 & 3 & \cdots & \binom{n}{1} \\ & & 1 & 3 & \cdots & \binom{n}{2} \\ & & & 1 & \cdots & \binom{n}{3} \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

で表される. 上三角行列なので固有値は対角成分に等しく, 1 のみが固有値である. 固有ベクトルを求めるには, 変数 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ からなる列ベクトルを $\boldsymbol{a}$ として, $P\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ を解けばよい. 下から 2 つめの成分を両辺で比較すれば $a_{n-1} + na_n = a_{n-1}$ となるので, $a_n = 0$ が得られる. 以下順次, 上に向かって成分を比較することで $a_{n-1} = a_{n-2} = \cdots = a_1 = 0$ が得られる. a_0 は任意である. よって, 固有空間は定数関数 a_0 全体のなす 1 次元空間である. (ii) 問題の条件は, 多項式 $f(x)$ が固有値 1 の固有空間に属していることとと同値である. よって, $f(x)$ が定数関数の場合である.

11.7 問題

$A = \begin{pmatrix} 11 & -6 \\ 18 & -10 \end{pmatrix}$ とする. $AB = sBA$ を満たす 2×2 行列 $B \neq O$ が存在するためのスカラー s の条件を求め, そのときの B の形を決定せよ.

(解答) A の固有値は -1 および 2 であって, それぞれの固有ベクトルとして $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ および $\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ が取れる. つまり, 固有値 $-1, 2$ の固有空間はいずれも 1 次元で, それぞれの基底が $\boldsymbol{d}$ と $\boldsymbol{e}$ で与えられる. さて, 仮定 $AB = sBA$ より, $AB\boldsymbol{d} = sBA\boldsymbol{d} = -sB\boldsymbol{d}$ なので, $B\boldsymbol{d}$ は零ベクトルか, あるいは $-s$ を固有値にもつ固有ベクトルである. 後者の場合は $-s = -1, 2$, すなわち $s = 1, -2$ のいずれかでなければならない. 同様に, $AB\boldsymbol{e} = sBA\boldsymbol{e} = 2sB\boldsymbol{e}$ なので, $B\boldsymbol{e}$ は零ベクトルか, あるいは $2s$ を固有値にもつ固有ベクトルである. 後者の場合は, $2s = -1, 2$, すなわち $s - 1/2$, 1 のいずれかでなければな

らない．$B\boldsymbol{d}, B\boldsymbol{e}$ の両方が零ベクトルならば $B=O$ となって仮定に反するので，少なくとも一方は零ベクトルでない．よって，s の可能性は $1, -2, -1/2$ のどれかであることが分かった．

それぞれの場合に B の形を決定しよう．$s=1$ のときは，$B\boldsymbol{d}$ は固有値 -1 の固有ベクトルなので，$B\boldsymbol{d} = a\boldsymbol{d}$ と書け，また $B\boldsymbol{e}$ は固有値 2 の固有ベクトルなので，$B\boldsymbol{e} = b\boldsymbol{e}$ と書ける．すなわち，正則行列 $Q = (\boldsymbol{d}\ \boldsymbol{e})$ に対し，$BQ = Q\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ となる．右から Q^{-1} をかけて B を求めると

$$B = a\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

である．パラメータ a, b は任意である．次に $s=-2$ のときを考える．$B\boldsymbol{d}$ は固有値 2 の固有ベクトルなので，$B\boldsymbol{d} = a\boldsymbol{e}$ と書ける．$B\boldsymbol{e}$ は零ベクトルでなければならない．すなわち，$BQ = Q\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$ となるので，右から Q^{-1} をかけて

$$B = a\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$$

である．最後に $s = -1/2$ のときを考える．$B\boldsymbol{d}$ は零ベクトルでなければならない．$B\boldsymbol{e}$ は固有値 -1 の固有ベクトルなので，$B\boldsymbol{e} = a\boldsymbol{d}$ と書ける．すなわち，$BQ = Q\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるので，

$$B = a\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

である．