11 月 11 日 数学 II 演習 (解答)

10.1 問題

V を線形空間とし, その部分集合を X (有限集合とは限らない) とする. このとき, X を含む最小の部分空間 $W \subseteq V$ が存在することを証明せよ.

(解答)　X の元の一次結合 $c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n$ 全体を W と置く. ここで, $\boldsymbol{x}_i \in X$ であり, c_i はスカラーである. また, $n \geq 0$ である ($n = 0$ のときは, $\mathbf{o}$ のこと). 定義から $X \subseteq W$ は自明である. あとは W が部分空間であることと, X を含む部分空間の中で最小であることを示せばよい. 前者は簡単である. たとえば, W が和について閉じていることは, X の元の一次結合 $c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n$ および $c'_1\boldsymbol{x}'_1 + c'_2\boldsymbol{x}'_2 + \cdots + c'_p\boldsymbol{x}'_p$ の和はやはり, X の元の一次結合 $c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n + c'_1\boldsymbol{x}'_1 + c'_2\boldsymbol{x}'_2 + \cdots + c'_p\boldsymbol{x}'_p$ となることから分かるし, スカラー倍についても同様である. 後者を示すために, $X \subseteq U$ を満たすような V の部分空間 U を任意に取る. このとき, $X \subseteq U$ より, X の元の一次結合は U の元の一次結合でもあり, 部分空間 U は和とスカラー倍について閉じているので, U の元の一次結合はやはり U の元である. すなわち W の元は U の元であるとういこと, つまり $W \subseteq U$ となることが分かった. よって, W は, X を含む部分空間の中で最小のものであることが示された.

注意:　このような W を, X が張る部分空間とか, X によって張られる部分空間と呼ぶ. $\operatorname{span} X$ と書かれることもある.

10.2 問題

$\mathbb{R}^3$ の部分空間として

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

を基底にもつ部分空間を W とし,

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

を基底にもつ部分空間を W' とする. このとき, $W \cap W'$ の基底を求めよ.

(解答)　W を張る 2 ベクトルを $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ とし, W' を張る 2 ベクトルを $\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ とする. 共通部分 $W \cap W'$ のベクトルは, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の一次結合としても, $\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ の一次結合としても書けるので, $p\boldsymbol{a}_1 + q\boldsymbol{a}_2 = r\boldsymbol{a}_3 + s\boldsymbol{a}_4$ を満たすような係数 p, q, r, s を決定すればよい. 係数 p, q を改めて x, y と置き, r, s を $-z, -w$ で置

き換えれば, これは, $x\boldsymbol{a}_1+y\boldsymbol{a}_2+z\boldsymbol{a}_3+w\boldsymbol{a}_4$ なる方程式を解くことに相当する. すなわち, $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_4$ を並べてできる 3×4 行列を A に対する斉次連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{o}$ を解けばよい. その一般解を実際に求めると, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = w\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる. よって, w をパラメータとして $w\boldsymbol{a}_1+w\boldsymbol{a}_2$ $(=-2w\boldsymbol{a}_3-w\boldsymbol{a}_4)$ が共通部分 $W\cap W'$ に属するベクトルである. よって, $W\cap W'$ は 1 次元空間であり, $w=1$ のとき計算すると $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ となるので, これが基底となる.

10.3 問題

標準的な基底に対し行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ で表される $\mathbb{C}^4$ 上の一次変換 φ を考える. このとき, 核 $\ker\varphi$ および像 $\operatorname{ran}\varphi$ の基底を求めよ.

(解答)　問題の 4×4 行列を A とする. 変数 x_1,x_2,x_2,x_4 からなる列ベクトルを $\boldsymbol{x}$ として, 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{o}$ の一般解を求めると,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となる. 核 $\ker\varphi$ の基底は, この連立一次方程式の一次独立な解からなるので, たとえば $x_3=1, x_4=0$ および $x_3=0, x_4=1$ として,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすればよい. 次に像 $\operatorname{ran}\varphi$ の方を考える. 行列 A の列ベクトルを順に $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ とすると, 像はこれら 4 ベクトルで張られるので, その中から一次独立になるように最大に選び出せば, それが基底となる. やはり上の一般解より $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ が一次独立で, 残りの $\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ はそれらの一次結合で書けることがわかる. よって,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が基底の例になっている. もちろん, 基底は一意に定まる訳ではないので, ほかの答えもあり得る.

10.4 問題

$\mathbb{R}^4$ の部分空間として,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

を基底にもつ部分空間を W とし,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

を基底にもつ部分空間を W' とする. このとき, W, W' のうち一方が他方の部分空間になるかどうか判定せよ.

(解答)　W は 3 次元で, W' は 2 次元なので, $W \subseteq W'$ となることはない. あり得るとすれば $W' \subseteq W$ だけである. これが成り立つかどうか判定するには, W' の基底をなす 2 ベクトル ($\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ とする) が, W を張る 3 個のベクトル ($\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ とする) の一次結合で書けるかどうかを調べればよい. すなわち $x\boldsymbol{a}_1 + y\boldsymbol{a}_2 + z\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{b}_i$ $(i = 1, 2)$ を解いてみればよい. これは連立一次方程式であって, 実際に解くと, $i = 1, 2$ いずれの場合も解が存在して, それぞれ

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる. よって, W' は W の部分空間である.

10.5 問題

(i)　実数成分からなる n 次正方行列全体を $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ と書くと, これは $\mathbb{R}$ 上の線形空間をなす. このとき, n 次対称行列全体は $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ の部分空間をなすことを示せ. その次元はいくつか.

(ii)　同様に, 複素数成分の場合の $\mathbb{C}$ 上の線形空間を $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ と書く. このとき, n 次 Hermite 行列全体はその部分空間となるか.

(解答)　(i) n 次対称行列全体の集まりを W と書こう. いま, A, B を対称行列とすると, ${}^tA = A$ かつ ${}^tB = B$ なので, ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB = A + B$ となり, $A + B$ も対称行列である. よって, W は和について閉じている. スカラー

倍に関しても, cA が対称行列であることが容易に確かめられる. したがって, W は和とスカラー倍について閉じているので, $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ の部分空間となる. 次に次元を求めよう. 対称行列 (a_{ij}) は, 対角成分およびそれより右上の成分, すなわち $i \leq j$ のときの a_{ij} を決めれば自動的に $a_{ij} = a_{ji}$ より残りの成分が決まる. よって, (i,j)-成分のみ 1 で残りが 0 となる行列を I_{ij} で表すことにすると, $i \leq j$ のときの I_{ij} が W の基底となる. そのような (i,j) の組は $n(n+1)/2$ 個あるので, これが次元となる.

(ii)　答えを先に言うと, 部分空間ではない. 和については問題ないが, スカラー倍について閉じていない. A を Hermite 行列 (すなわち $A^* = A$) とするとき, 複素数 λ に対して, $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^* = \overline{\lambda} A$ である. ここで $\overline{\lambda}$ は共役複素数を表す. しかし, $\lambda A = \overline{\lambda} A$ は, 零行列の場合を除いて成り立たない. よって, A が Hermite 行列だとしても, そのスカラー倍 λA が Hermite 行列だとは限らない.

10.6 問題

$l \times m$ 行列 A および $m \times n$ 行列 B を用いて, $(l+m) \times (n+m)$ 行列

$$C = \begin{pmatrix} O & A \\ B & E \end{pmatrix}$$

を定める (O は零行列, E は単位行列). このとき, $\operatorname{rank} C \geq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$ が成り立つことを証明せよ.

(解答)　行列の階数は, 一次独立な列ベクトルの最大個数に等しいことを用いる. $\operatorname{rank} A = r$ および $\operatorname{rank} B = s$ と置くと, それぞれから一次独立な列ベクトル $\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_r}$ および $\boldsymbol{b}_{j_1}, \boldsymbol{b}_{j_2}, \ldots, \boldsymbol{b}_{j_s}$ が取れる. そこで, C の第 $j_1, j_2, \ldots, j_s$ 列および第 $n+i_1, n+i_2, \ldots, n+i_r$ 列からなる $r+s$ 個の列ベクトル

$$\begin{pmatrix} \mathbf{o} \\ \boldsymbol{b}_{j_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{o} \\ \boldsymbol{b}_{j_2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \mathbf{o} \\ \boldsymbol{b}_{j_s} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{i_1} \\ \boldsymbol{e}_{i_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{i_2} \\ \boldsymbol{e}_{i_2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{i_r} \\ \boldsymbol{e}_{i_r} \end{pmatrix}$$

が一次独立であることを示そう. ここで, $\boldsymbol{e}_k$ は第 k 成分のみが 1 であるような単位ベクトルを表す. これらの一次結合で

$$y_1 \begin{pmatrix} \mathbf{o} \\ \boldsymbol{b}_{j_1} \end{pmatrix} + \ldots + y_s \begin{pmatrix} \mathbf{o} \\ \boldsymbol{b}_{j_s} \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{i_1} \\ \boldsymbol{e}_{i_1} \end{pmatrix} + \ldots + x_r \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{i_r} \\ \boldsymbol{e}_{i_r} \end{pmatrix} = \mathbf{o}$$

と零ベクトルが得られたとしよう. 上半分を見ると, $x_1 \boldsymbol{a}_{i_1} + \cdots + x_r \boldsymbol{a}_{i_r} = \mathbf{o}$ なので, $\boldsymbol{a}_k$ の一次独立性から $x_1 = x_2 = \cdots x_r = 0$ が成り立つ. これを代入して下半分を見ると, $y_1 \boldsymbol{b}_{j_1} + \cdots + y_s \boldsymbol{b}_{j_s} = \mathbf{o}$ なので, $\boldsymbol{b}_k$ の一次独立性から $y_1 = y_2 = \cdots y_s = 0$ も成り立つ. これによって, 上の $r+s$ 個の C の列ベクトルは一次独立であることが分かった. ゆえに, C の一次独立な列ベクトル

の最大個数は $r+s$ 以上である. つまり, $\operatorname{rank} C \geq r+s$. これが問題の不等式のことである.

10.7 問題

$l \times m$ 行列 A と $m \times n$ 行列 B に対し, 不等式

$$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B - m \ \leq \ \operatorname{rank}(AB)$$

が成り立つことを示せ.

(解答 1) 標準基底に対して, A は線形写像 $\mathbb{C}^m \xrightarrow{A} \mathbb{C}^l$ を定める. 同様に B は線形写像 $\mathbb{C}^n \xrightarrow{B} \mathbb{C}^m$ を定める. 像 $\operatorname{ran}(B)$ 上への線形写像 A の制限を考えると, $\operatorname{ran}(B) \xrightarrow{A} \operatorname{ran}(AB)$ は全射である. つまり, この線形写像の像は $\operatorname{ran}(AB)$ に等しい. 一方, 核の方は $\ker(A) \cap \operatorname{ran}(B)$ である. よって, $\operatorname{ran}(AB)$ は, 商空間 $\operatorname{ran}(B)/(\ker(A) \cap \operatorname{ran}(B))$ に同型である. 像の次元が階数に等しいことを思い出して,

$$\operatorname{rank}(AB) \ = \ \operatorname{rank}(B) - \dim(\ker(A) \cap \operatorname{ran}(B))$$

が得られる. しかるに, 包含関係および核の次元と階数の基本的な関係より, $\dim(\ker(A) \cap \operatorname{ran}(B)) \leq \dim(\ker(A)) = m - \operatorname{rank}(A)$ が成り立つので,

$$\operatorname{rank}(AB) \ \geq \ \operatorname{rank}(B) - (m - \operatorname{rank}(A))$$

となる.

(解答 2) 簡単な計算で,

$$\begin{pmatrix} E & A \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -AB & O \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & O \\ B & E \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} O & A \\ B & E \end{pmatrix}$$

が示される. ここで, 左辺の 3 つの行列は左から順に $l+m$ 次正方行列, $(l+m) \times (n+m)$ 行列, $n+m$ 次正方行列である. 特に, 真ん中の行列の右下の E は, m 次単位行列である. 3 つのうち最初と最後は正則行列なので, 左辺の階数は, 真ん中の行列の階数に等しく, それは $\operatorname{rank}(AB) + m$ である. 他方, 右辺の階数に対しては問題 10.7 より, $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$ 以上である. 故に $\operatorname{rank}(AB) + m \geq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$. 移項すれば問題の不等式が得られる.