10 月 28 日 数学 II 演習 (解答)

9.1 問題

$\mathbb{C}^3$ の基底 $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ 17 \\ -4 \end{pmatrix}$ から, 基底 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ への取り替え行列を求めよ.

(解答)　問題の 2 つの基底をそれぞれ基底 A, 基底 B と呼ぶことにする. 標準基底 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ から基底 A, および基底 B への取り替え行列はそれぞれ

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 14 \\ 2 & 8 & 17 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で与えられる. 問題の基底の取り替えは, 基底 A から標準基底を経由して基底 B への取り替えに相当するので, その行列は $P^{-1}Q$ で与えられる (かけ算の順番注意). 逆行列 P^{-1} を計算すると $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -7 \\ 9 & -2 & 23 \\ -4 & 1 & -10 \end{pmatrix}$ となるので, ここから $P^{-1}Q$ を計算すると,

$$\begin{pmatrix} -9 & 2 & 9 \\ 28 & -7 & -26 \\ -12 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

となる.

9.2 問題

$\mathbb{C}^3$ の標準的な基底に対して $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ で表されている一次変換を考える. $\mathbb{C}^3$ の基底を $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ に取り替えるとき, 上の一次変換はどのような行列で表されるか.

(解答)　問題に現れる 3 次正方行列を A と置く. 基底の取り替え行列は, $P = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ であって, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -9 \\ 2 & -2 & 5 \\ -5 & 4 & -12 \end{pmatrix}$ なので, $P^{-1}AP =$

$\begin{pmatrix} -3 & -9 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \\ -5 & -13 & -1 \end{pmatrix}$ が求める行列である.

9.3 問題

(i) $V \xrightarrow{\varphi} W$ が線形空間 V, W 間の同型写像であるとする. V の基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ に対し, $\varphi(\boldsymbol{e}_1), \varphi(\boldsymbol{e}_2), \ldots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)$ は W の基底であることを示せ.

(ii) $n \neq p$ のとき, $\mathbb{C}^n$ と $\mathbb{C}^p$ は同型になり得ないことを示せ.

(解答) (i) 仮定により, 逆写像 $W \xrightarrow{\varphi^{-1}} V$ があって線形である. まず $\varphi(\boldsymbol{e}_1)$, $\varphi(\boldsymbol{e}_2), \ldots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)$ が一次独立なことを示すために $c_1\varphi(\boldsymbol{e}_1) + c_2\varphi(\boldsymbol{e}_2) + \cdots + c_n\varphi(\boldsymbol{e}_n) = \mathbf{o}$ とする. 両辺に φ^{-1} を適用すると, その線形性より, $c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n = \mathbf{o}$ となる. $\boldsymbol{e}_i$ は基底なので $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ となる. よって $\varphi(\boldsymbol{e}_i)$ は一次独立である. 次に $\varphi(\boldsymbol{e}_1), \varphi(\boldsymbol{e}_2), \ldots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)$ が線形空間 W を張ることを示す. 任意の $\boldsymbol{y} \in W$ に対して, $\varphi^{-1}(\boldsymbol{y}) \in V$ は基底 $\boldsymbol{e}_i$ の一次結合として, $\varphi^{-1}(\boldsymbol{y}) = c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n$ と書ける. 両辺に φ を適用すると, その線形性より, $\boldsymbol{y} = c_1\varphi(\boldsymbol{e}_1) + c_2\varphi(\boldsymbol{e}_2) + \cdots + c_n\varphi(\boldsymbol{e}_n)$ となり, $\boldsymbol{y}$ が一次結合で表せた. よって, $\varphi(\boldsymbol{e}_i)$ は W を張る.

(ii) 同型写像 $\mathbb{C}^n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}^p$ があるとして $n = p$ を導く. $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ を $\mathbb{C}^n$ の基底の一つとすると, $\varphi(\boldsymbol{e}_1), \varphi(\boldsymbol{e}_2), \ldots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)$ は前半により $\mathbb{C}^p$ の基底である. この基底は n 個の元からなる. しかるに, p 次元線形空間 $\mathbb{C}^p$ の基底は p 個の元からなるはずなので, $n = p$ が成り立たなければならない.

9.4 問題

$m \times n$ 複素行列全体の作る線形空間を $\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{C})$ と書く. また, V を $\mathbb{C}$ 上の n 次元線形空間, W を m 次元線形空間とするとき, V から W の中への線形写像全体の作る線形空間を $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ と書く. このとき, 線形空間としての同型

$$\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{C}) \ \cong \ \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$$

が成り立つことを示せ. また, このことを用いて線形空間 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ の次元を求めよ.

(解答) V の基底 $\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \ldots, \boldsymbol{d}_n$ を一つ選んで固定する. また, W の基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ を一つ選んで固定する. $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ に対して, $\boldsymbol{d}_j \mapsto \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{e}_i$ で定まる V から W の中への線形写像を φ_A と書くことにする (基底に対する像を決めれば, 線形写像は一意的に決定されることを思い出そう). 対応 $A \mapsto \varphi_A$ が線形空間の同型を与えることを示す. まず線形性を示す必要がある. すなわち, $\varphi_{A+B}(\boldsymbol{x}) = \varphi_A(\boldsymbol{x}) + \varphi_B(\boldsymbol{x})$ および $\varphi_{cA}(\boldsymbol{x}) = c\varphi_A(\boldsymbol{x})$ を

示す．どちらも同様なので前者を証明しよう．$A=(a_{ij})$ および $B=(b_{ij})$ とすると, $\varphi_{A+B}(\boldsymbol{d}_j)=\sum_i(a_{ij}+b_{ij})\boldsymbol{e}_i=\sum_i a_{ij}\boldsymbol{e}_i+\sum_i b_{ij}\boldsymbol{e}_i=\varphi_A(\boldsymbol{d}_j)+\varphi_B(\boldsymbol{d}_j)$ となる．基底 $\boldsymbol{d}_j$ たちの上で等しいので, $\varphi_{A+B}(\boldsymbol{x})=\varphi_A(\boldsymbol{x})+\varphi_B(\boldsymbol{x})$ がすべての $\boldsymbol{x}\in V$ に対して成り立つ．よって, 対応 $A\mapsto\varphi_A$ が線形性をもつことが示された．次に この対応が全単射であることを示す．全射であることを見るために, V から W の中への任意の線形写像 ψ を取る．各 $\boldsymbol{d}_j$ に対して, $\psi(\boldsymbol{d}_j)$ は基底 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_m$ の一次結合として $\sum_{i=1}^m a_{ij}\boldsymbol{e}_i$ と表される．ここで, 係数を集めてできる行列を $A=(a_{ij})$ とすると, $\psi=\varphi_A$ である．よって, 全射であることが示された．最後に単射であることを示す．$A=(a_{ij})$ および $B=(b_{ij})$ に対して, $\varphi_A(\boldsymbol{x})=\varphi_B(\boldsymbol{x})$ が成り立つとすると, 特に各 j に対して $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}_j$ と取れば $\sum_i a_{ij}\boldsymbol{e}_i=\sum_i b_{ij}\boldsymbol{e}_i$ が得られる．ここで, $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_m$ は基底なので, 係数同士の等号 $a_{ij}=b_{ij}$ がすべての i に対して成り立たなければならない．すなわち $A=B$ が得られ, 単射であることが示された．

同型が示されたので, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)$ の次元は $\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{C})$ の次元に等しくなる．後者の基底を作ろう．$m\times n$ 行列 I_{ij} として, (i,j)-成分のみが 1 で他のすべての成分が 0 となる行列を表すことにする．そのような I_{ij} は mn 個ある．任意の $m\times n$ 行列 $A=(a_{ij})$ は, それらの一次結合として $A=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ij}I_{ij}$ と一意的に表される．よって, I_{ij} の集まりは $\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{C})$ の基底となる．したがって, 求める次元は mn である．

9.5 問題

k 次以下の多項式全体のなす線形空間を V_k とする．多項式 $f(x)$ を $f(ax^2+c)$ に写す写像は V_2 から V_4 の中への線形写像とみることができる．この線形写像を φ とする．

(i) 線形空間 V_k の基底として $1,x,x^2,\ldots,x^k$ をとるとき, φ を行列で表せ．

(ii) 線形空間 V_k の基底を $1,(x-1),(x-1)^2,\ldots,(x-1)^k$ に取り替えたとき, φ を表す行列はどのようになるか．また, 求めた行列は何を意味しているか, 多項式の言葉で表現してみよ．

(解答)　(i) 2 次以下の多項式 $f(x)=p_0+p_1x+p_2x^2$ に対して, $f(ax^2+c)$ を計算して x の冪乗で整頓すると, $(p_0+cp_1+c^2p_2)+(ap_1+2acp_2)x^2+a^2p_2x^4$ となる．よって題意の写像は, 標準的な基底に対して

$$\begin{pmatrix}p_0\\p_1\\p_2\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1&c&c^2\\0&0&0\\0&a&2ac\\0&0&0\\0&0&a^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_0\\p_1\\p_2\end{pmatrix}$$

で表される．ここに現れる 5×3 行列が求める行列である．(ii) 基底 $1,x,\ldots,x^k$

から基底 $1, (x-1), \ldots, (x-1)^k$ への取り替え行列 P_k を考えると, $(x-1)^s = (-1)^s + (-1)^{s-1}\binom{s}{1}x + (-1)^{s-2}\binom{s}{2}x^2 + \cdots + x^s$ なので,

$$P_k = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^k \\ & 1 & -2 & \cdots & (-1)^{k-1}\binom{k}{1} \\ & & 1 & \cdots & (-1)^{k-2}\binom{k}{2} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

で与えられる. 逆行列は, 基底 $1, (x+1), \ldots, (x+1)^k$ への取り替え行列に相当するので, P_k の全成分を正に変えたものに等しい. そこで, (i) で求めた 5×3 行列の左と右から

$$P_5^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & 1 & 3 & 6 \\ & & & 1 & 4 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ & 1 & -2 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

をかけて計算すると, 求める行列

$$\begin{pmatrix} 1 & a+c-1 & a^2+2ac+c^2-2a-2c+1 \\ 0 & 2a & 4a^2+4ac-4a \\ 0 & a & 6a^2+2ac-2a \\ 0 & 0 & 4a^2 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

が得られる. 2 次以下の多項式 $f(x)$ を $p_0 + p_1(x-1) + p_2(x-1)^2$ と $(x-1)$ の冪乗で表し, また, $f(ax^2+c)$ をやはり $(x-1)$ の冪乗で $q_0 + q_1(x-1) + \cdots + q_4(x-1)^4$ と表したとき, 係数 p_0, p_1, p_2 の作る列ベクトルから係数 $q_0, q_1, \ldots, q_4$ の作る列ベクトルへの変換行列を与えている.

9.6 問題

複素数列 $a_n = a_0, a_1, a_2, \ldots$ 全体がなす線形空間の次元は, 有限ではないことを示せ.

(解答) 問題の線形空間を V とし, V の次元が有限として矛盾を導く. たとえば n 次元とする. このとき, n 個の一次独立な V の元は常に基底となる. さて, 数列

$$0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots$$

を考える. ここで唯一の非零の項は第 i 項とする. この数列を $\boldsymbol{e}_i$ と書くことにすると, $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-1}$ は明らかに一次独立である. よって, この n 個の

元は基底となる. しかし, これら $\boldsymbol{e}_i$ の一次結合として表される数列の第 n 項から先はすべて 0 でなければならない. よって, たとえば, 数列 $1, 1, 1, 1, \ldots$ はこれらの一次結合で表せない. これは基底であることに矛盾する.