10月14日 数学II 演習 (解答)

8.1 問題

線形空間 V の定義として次の 2 つを考える.

定義 1. 次の 3 つが与えられている. (i) $\mathbf{o} \in V$. (ii) $\boldsymbol{x} \in V$ かつ $\boldsymbol{y} \in V$ に対して, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in V$. (iii) スカラー c および $\boldsymbol{x} \in V$ に対して, $c\boldsymbol{x} \in V$. さらに, これらの演算は次の公理を満たす:

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z} &= \boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) \\
\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{y}+\boldsymbol{x} \\
\mathbf{o}+\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x} \\
c\mathbf{o} &= \mathbf{o} \\
c(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= c\boldsymbol{x}+c\boldsymbol{y} \\
0\boldsymbol{x} &= \mathbf{o} \\
(c+d)\boldsymbol{x} &= c\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x} \\
1\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x} \\
(cd)\boldsymbol{x} &= c(d\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

定義 2. 次の 4 つが与えられている. (i) から (iii) は定義 1 に同じ. (iv) $\boldsymbol{x} \in V$ に対して, $-\boldsymbol{x} \in V$. さらに, 公理として次を考える: 定義 1 の公理から $c\mathbf{o} = \mathbf{o}$ および $0\boldsymbol{x} = \mathbf{o}$ を取り除いて, かわりに $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x}) = \mathbf{o}$ を入れたもの.

このとき, 定義 1 と定義 2 は同値であることを示せ.

(解答) 定義 1 から定義 2 を導く. $-\boldsymbol{x}$ として, $(-1)\boldsymbol{x}$ と定義する. このとき, $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x}) = 1\boldsymbol{x}+(-1)\boldsymbol{x} = (1-1)\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x} = \mathbf{o}$ である.

次に, 定義 2 から定義 1 を導く. その前に, 加法に関する単位元は一意に決まることを見ておこう. 単位元 $\mathbf{o}'$ が他にもあったとする. このとき $\mathbf{o}'+\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} = \mathbf{o}+\boldsymbol{x}$ となるので, これに $-\boldsymbol{x}$ を足して, 加法の結合則と $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x}) = \mathbf{o}$ に注意すると, $\mathbf{o}'+\mathbf{o} = \mathbf{o}+\mathbf{o}$ である. さらに加法の交換則と公理 $\mathbf{o}+\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ に注意すれば, $\mathbf{o}' = \mathbf{o}$ が得られる. すなわち, 加法に関する単位元 $\mathbf{o}$ は一意に決まることが分かった. この準備のもとで公理 $0\boldsymbol{x} = \mathbf{o}$ をまず示そう. それには, $0\boldsymbol{x}$ が加法に関する単位元になることを示せばよい. 実際 $0\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x}+1\boldsymbol{x} = (0+1)\boldsymbol{x} = 1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ となるから $0\boldsymbol{x}$ は単位元である. よって $0\boldsymbol{x} = \mathbf{o}$ が導かれる. 次に残った公理 $c\mathbf{o} = \mathbf{o}$ を示すと, いま示したばかりの公理を用いて $c\mathbf{o} = c(0\boldsymbol{x}) = (c0)\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x} = \mathbf{o}$ とすればよい.

8.2 問題

次の集合は線形空間であることを示せ. スカラーは $\mathbb{R}$ でも $\mathbb{C}$ でもよい.

(i) $m \times n$ 行列全体.

(ii) 多項式全体.

(iii) 収束する数列 a_n 全体.

(iv) $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ の中への連続関数 $f(x)$ 全体. 複素数体上のときは $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ の中への連続関数全体.

(v) 線形空間 V から線形空間 W の中への線形写像 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 全体.

(vi) 一点のみからなる集合.

(解答) (i) から (iv) はいずれもほぼ自明なので, 概略を述べるにとどめておく. (i) $m \times n$ 行列どうしの和はやはり $m \times n$ 行列である. スカラー倍も同様 (以下スカラー倍に関しては, 和の場合と同様なので, コメントを省略する). 零元は, 零行列 O である. (ii) 多項式の和は多項式である. 零元は, 定数 0. (iii) 数列 a_n, b_n が収束すれば, 和 $a_n + b_n$ も収束する. 零元は, すべての成分が 0 であるような数列である. (iv) 連続関数 $f(x), g(x)$ の和 $f(x) + g(x)$ はやはり連続である. 零元は, 恒等的に 0 となる定数関数である.

(v) まずは, 線形写像どうしの和 $\varphi(\boldsymbol{x})+\psi(\boldsymbol{x})$ がやはり線形写像となることを示す. すなわち $\varphi(\boldsymbol{x})+\psi(\boldsymbol{x})$ が線形空間 V の和とスカラー倍を保存することを示せばよい. 和に関しては $\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\psi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = (\varphi(\boldsymbol{x})+\psi(\boldsymbol{x}))+(\varphi(\boldsymbol{y})+\psi(\boldsymbol{y}))$ とより確かに保存し, スカラー倍に関しては $\varphi(c\boldsymbol{x}) + \psi(c\boldsymbol{x}) = c(\varphi(\boldsymbol{x}) + \psi(\boldsymbol{x}))$ より保存する. よって, $\varphi(\boldsymbol{x}) + \psi(\boldsymbol{x})$ は線形写像である. 零元は, 恒等的に $\mathbf{o}$ を返す関数である. これを $\zeta(\boldsymbol{x})$ と書くことにすると, $\zeta(\boldsymbol{x})$ が線形写像であることは $\zeta(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \mathbf{o} = \mathbf{o} + \mathbf{o} = \zeta(\boldsymbol{x}) + \zeta(\boldsymbol{y})$ および $\zeta(c\boldsymbol{x}) = \mathbf{o} = c\mathbf{o} = c\zeta(\boldsymbol{x})$ のように示される. 同様に, 線形写像のスカラー倍 $c\varphi(\boldsymbol{x})$ も線形写像であることが容易に示される. 後は公理の等式をすべて満たすことを示せばよいが, それは自明である.

(vi) 唯一の点を $\mathbf{o}$ と書くことにする. 一つしか元がないので, 和は $\mathbf{o}+\mathbf{o} = \mathbf{o}$ と定義する. スカラー倍は $c\mathbf{o} = \mathbf{o}$ と定義する. 零元は, もちろん $\mathbf{o}$ である. あとは公理を満たすことを示せばよいが, 一点しかないので自明である.

8.3 問題

n 次以下の 1 変数多項式全体 (係数は複素数とする) と, $\mathbb{C}^{n+1}$ は線形空間として同型であることを示せ.

(解答) n 次以下の 1 変数多項式全体のなす $\mathbb{C}$ 上の線形空間を V と書くことにする. V から $\mathbb{C}^{n+1}$ への線形写像を与える. それには, 多項式 $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ に対して $n+1$ 次ベクトル $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ を対応させればよい. 第一に, この対応が線形写像であることを示す. ほぼ自明であるが証明しておく. 多項式 $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ および $q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$ に対

して, $p(x)+q(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n$ に対応するベクトルは $\begin{pmatrix} a_0+b_0 \\ a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ となる. つまり, 多項式の和がベクトルの和に対応させられるので, 確かに和を保存する. 同様に $cp(x)$ に対応するベクトルは $c\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ となって, スカラー倍を保存する. 第二に, この対応が一対一かつ全射であることを示す. これはあまりに自明なので省略する.

8.4 問題

n 次以下の 2 変数多項式全体のなす線形空間の基底を一つ与え, 次元を求めよ. また一般に, n 次以下の k 変数多項式全体のなす線形空間の次元はいくつか.

(解答)　まず 2 変数の場合を検討してみよう. n 次以下の単項式全体 $1, x, y, x^2, xy, y^2, \ldots\ldots, x^n, x^{n-1}y, x^{n-2}y^2, \ldots, y^n$ が基底であることを示す. 実際に, n 次以下の多項式はすべて, これら n 次以下の単項式の一次結合で表すことができる. あとは, これら単項式全体が一次独立であることを示せばよいが, 一次結合 $\sum_{i+j\le n} a_{ij}x^iy^j$ が定数 0 に等しくなるのは, すべての係数 a_{ij} が 0 になるときである. これは, 一次独立性を表している. よって, n 次以下の単項式全体が基底になっていることが分かった. 次元を計算するには, 単項式の数を数えればよい. すなわち, $1+2+3+\cdots+(n+1)=(n+1)(n+2)/2$ が求める次元である.

これでよいのだが, 一般の k 変数の場合に拡張しやすくするには次のように考えてもよい. 一つダミーの変数 d を増やして, 3 変数 x, y, d で考える. これら 3 変数を用いて, ちょうど n 次の単項式 $x^n, x^{n-1}y, x^{n-1}d, x^{n-2}y^2, x^{n-2}yd, \ldots, d^n$ すべてを作る. ここで $d=1$ を代入すれば, n 次以下の 2 変数単項式がすべて重複なく得られる. すなわち, 3 変数の n 次単項式の個数を数えれば上と同じ結果が得られるはずである. この個数は, 3 個の元から重複を許して n 個を選ぶ, いわゆる重複組合せなので, 組合せの数 $\binom{n+2}{2}=(n+1)(n+2)/2$ に等しい.

k 変数 $x_1, x_2, \ldots, x_k$ の場合には, 一つダミーの変数 d を増やして, $k+1$ 変数の n 次単項式の個数を数えればよい. すなわち, $k+1$ 個から重複を許して n 個を選ぶ重複組合せより, $\binom{n+k}{k}$ が求める個数である. すなわち, n 次以下の k 変数多項式全体のなす線形空間の次元は $\binom{n+k}{k}$ である.

8.5 問題

次の 4 ベクトルは $\mathbb{C}^4$ の基底をなすか.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(解答) $\mathbb{C}^4$ の次元は 4 なので, 4 ベクトルが一次独立ならば必然的に基底となる. 実際に 4 ベクトルをならべてできる 4×4 行列の階数を求めてみると 4 となるので, 一次独立であることがわかる. すなわち基底となる.

8.6 問題

5 つの 3 次ベクトル

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

の中から, 基底となるような 3 個を選べ. さらに残りの 2 個を, 基底の一次結合として表せ.

(解答) 5 個のベクトルを順に $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_5$ と書くことにする. 一つの解法としては, 連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解いてみることである. 列の置換が必要で, 結果として一般解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が得られる (一意ではない). よって, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_5$ が基底である. また, パラメータに $x_3 = -1$, $x_4 = 0$ を代入すれば, $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_5\boldsymbol{a}_5 - \boldsymbol{a}_3 = \mathbf{o}$ となるような係数 x_1, x_2, x_5 が定まることになるので, $\boldsymbol{a}_3$ を表す一次結合が求まる. 実際代入すると, $x_1 = x_2 = 1$ および $x_5 = 0$ となるので, $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$ である. 同様に, パラメータを $x_3 = 0$, $x_4 = -1$ と定めて一次結合 $\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2$ が得られる.

基底の取り方はいろいろあり得る. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ の中から 2 個選んだものに $\boldsymbol{a}_5$ を付け加えたものは, いずれも基底である.