7 月 15 日 数学 II 演習 (解答)

7.1 問題

3 次実ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対し, $\langle \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$ は行列式 $\det A$ に等しいことを示せ. ここで, $A = (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c})$ は 3 個の列ベクトルをこの順でならべてできる 3×3 行列である.

(解答) $\boldsymbol{a}$ の 3 成分を順番に a_1, a_2, a_3 と書く. 他のベクトルに関しても同様にする. 左辺 $\langle \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$ は

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} c_3$$

に等しい. 他方, これは $\det A$ を第 3 列で展開したものでもある.

7.2 問題

実数 $a \geq -1/4$ に対して, n 次正方行列

$$\begin{pmatrix} 1+2a & -a & & & & \\ -a & 1+2a & -a & & & \\ & -a & 1+2a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & -a \\ & & & & -a & 1+2a \end{pmatrix}$$

は正則であることを示せ. ただし, 空白の部分の成分は 0 とする.

(解答) 問題の行列の行列式を D_n とする. (i,j) 小行列式を Δ_{ij} と書くことにする. 行列式 D_n を一列目で展開すると $(1+2a)\Delta_{11} + a\Delta_{21}$ となる. ここで $\Delta_{11} = D_{n-1}$ である. 一方, Δ_{21} の方は, 一行目が最初の成分 $-a$ を除いてすべて 0 になって, $-aD_{n-2}$ に等しくなる. よって, 漸化式 $D_n = (1+2a)D_{n-1} - a^2 D_{n-2}$ が得られる. $D_1 = 1+2a$ であるが, さらに $D_0 = 1$ と便宜的に置くことで, 漸化式は $n \geq 2$ で満たされる. この漸化式を解こう. まず, $a > -1/4$ とする. 二次方程式 $t^2 - (1+2a)t + a^2 = 0$ の二根は, $(1+2a \pm \sqrt{1+4a})/2$ となるから, 正号のほうを γ, 負号の方を δ と置くと, $D_n = A\gamma^n + B\delta^n$ となる定数 A, B がある. D_0, D_1 の値より, 定数を定めると, $A = \gamma/\sqrt{1+4a}$, $B = -\delta/\sqrt{1+4a}$ となって, $D_n = (\gamma^{n+1} - \delta^{n+1})/\sqrt{1+4a}$ なる一般項が得られる. $a > -1/4$ のときは, γ, δ は実であって, $\gamma > \delta > 0$ なので, $\delta/\gamma < 1$. よって, $D_n = (1 - (\delta/\gamma)^{n+1})\gamma^{n+1}/\sqrt{1+4a}$ は正の値で, 0 にはなり得ない. 行列式が 0 でないのだから, 正則である. 一方 $a = -1/4$ のときは, 二次方程式 $t^2 - (1/2)t + 1/16 = 0$ の根は 1/4 で重根である. このとき, D_n は $A(1/4)^n + Bn(1/4)^{n-1}$ なる一次結合で書けるので, D_0, D_1 から定数を決めると, $A = 1, B = 1/4$ となって $D_n = (1+n)(1/4)^n$ が得られる.

この場合も, やはり $D_n > 0$ なので正則である.

7.3 問題

n 次正方行列 A の余因子行列を $\tilde{A}$ と書く. 等式 $\det \tilde{A} = (\det A)^{n-1}$ が成り立つことを示せ.

(解答)　$A = (x_{ij})$ と置き, n^2 個の変数 x_{ij} からなるものと考える. すると, $\det A$ や $\det \tilde{A}$ はこれら変数 x_{ij} の多項式である. さて, n 次正方行列の等式 $A\tilde{A} = (\det A)E$ が成り立つので, 両辺の行列式を取ると, $\det A \cdot \det \tilde{A} = (\det A)^n$ が得られる. 多項式の既約分解の一意性より, $\det \tilde{A} = (\det A)^{n-1}$ となる.

7.4 問題

n 次正方行列 A の行列式を Δ と書く. また, Δ から r 行と s 列を取り除いてできる $n-1$ 次小行列式を $\Delta_{r,s}$ と書くことにし, Δ から r 行と s 行の二つと, r' 列と s' 列の二つを除いてできる $n-2$ 次小行列式を $\Delta_{rs,r's'}$ と書くことにする. この記法のもとで, $r \neq s$ のとき, 等式

$$\Delta_{r,r}\Delta_{s,s} - \Delta_{r,s}\Delta_{s,r} \ = \ \Delta_{rs,rs}\Delta$$

が成り立つことを示せ.

(解答)　$r = 1, s = 2$ のときを証明する. $A = (x_{ij})$ と置き, n^2 個の変数 x_{ij} からなるものと考える. 余因子行列 $\tilde{A} = ((-1)^{j+i}\Delta_{j,i})$ を考える. すると余因子の性質 $\sum_j (-1)^{j+i'} a_{ij}\Delta_{i',j} = \delta_{ii'}\Delta$ より, 等式

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tilde{A}$$
$$= \begin{pmatrix} \Delta_{1,1} & -\Delta_{2,1} & \Delta_{3,1} & \cdots & (-1)^{n+1}\Delta_{n,1} \\ -\Delta_{1,2} & \Delta_{2,2} & -\Delta_{3,2} & \cdots & (-1)^{n+2}\Delta_{n,2} \\ 0 & 0 & \Delta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \Delta \end{pmatrix}$$

が成り立つ. 両辺の行列式をとる. すると, $\det \tilde{A} = \Delta^{n-1}$ (問題 7.3) に注意して, $\Delta_{12,12}\Delta^{n-1} = (\Delta_{1,1}\Delta_{2,2} - \Delta_{1,2}\Delta_{2,1})\Delta^{n-2}$ が得られる. よって, 多項式の既約分解の一意性より, $\Delta_{12,12}\Delta = \Delta_{1,1}\Delta_{2,2} - \Delta_{1,2}\Delta_{2,1}$ である. 一般のインデックス r, s のときは, 行と列を交換して上の場合に帰着すればよい.

7.5 問題

正則行列 A の成分がすべて有理数ならば, A^{-1} の成分もすべて有理数であることを示せ.

(解答)　行列式 $\det A$ は A の成分の多項式で与えられるので, A の成分がすべて有理数ならば, $\det A$ も有理数である. 同じ理由により, (i,j)-小行列式 $\Delta_{i,j}$ も有理数である. よって, A^{-1} の各 (j,i)-成分 $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}/\det A$ は有理数どうしの分数となるので, やはり有理数である.

7.6 問題

Cramer の公式によって次の連立一次方程式の解を求めよ.

(i) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & 4 & 1 \\ -7 & -6 & -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(解答)　(i) 左辺の正方行列の行列式は 1 で, 解は公式より $x = 2$, $y = 4$ および $z = 1$.　(ii) 左辺の正方行列の行列式は 3 で, 解は $x = 4$, $y = -2$, $z = -4$ および $w = 3$.

7.7 問題

Hermite 行列 H と列ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し, $H[\boldsymbol{x}]$ を $\boldsymbol{x}^*H\boldsymbol{x}$ で定義する (Hermite 形式と呼ばれる). すべてのベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $H[\boldsymbol{x}] = 0$ になることと, H が零行列になることは同値であることを示せ.

(解答)　H が零行列ならば $H[\boldsymbol{x}] = 0$ は明らか. 反対に $H[\boldsymbol{x}] = 0$ がすべての $\boldsymbol{x}$ に対して成り立つと仮定する. $H = (h_{rs})_{rs}$ と置く. ベクトル $\boldsymbol{x}$ として, 第 r 成分が 1 の単位ベクトルを取れば, $H[\boldsymbol{x}] = h_{rr}$ である. これが 0 になるので, 対角成分 h_{rr} はすべて 0 である. それ以外の成分を調べるため $r \neq s$ とする. ベクトル $\boldsymbol{x}$ として, 第 r 成分と第 s 成分が 1 で残りが 0 であるようなものを取ると, $h_{sr} = \bar{h}_{rs}$ および $h_{rr} = h_{ss} = 0$ に留意して, $H[\boldsymbol{x}] = 2\,\mathfrak{Re}\,h_{rs}$ となる. よって, $\mathfrak{Re}\,h_{rs} = 0$ である. 虚部に関しては, ベクトル $\boldsymbol{x}$ として, 第 r 成分が i で第 s 成分が 1 となり, 残りが 0 であるようなものを取る. すると $H[\boldsymbol{x}] = 2\,\mathfrak{Im}\,h_{rs}$ となるので, $\mathfrak{Im}\,h_{rs} = 0$ が得られる. 実部も虚部も 0 となったので, $h_{rs} = 0$ である. よって, H は零行列.

7.8 問題

$AA^* = A^*A$ を満たす正方行列 A を正規行列と呼ぶ. 正方行列 A が正規行

列であることと, $\|A\boldsymbol{x}\| = \|A^*\boldsymbol{x}\|$ がすべてのベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して成り立つことは同値であることを示せ.

(解答)　まず A が正規行列, すなわち $AA^* = A^*A$ と仮定する. すると $\langle A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, A^*A\boldsymbol{x}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, AA^*\boldsymbol{x}\rangle = \langle A^*\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{x}\rangle$ より, $\|A\boldsymbol{x}\| = \|A^*\boldsymbol{x}\|$ が従う. 逆に, 最後の等式を仮定すると, $\langle \boldsymbol{x}, (AA^* - A^*A)\boldsymbol{x}\rangle = 0$ がすべてのベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して成り立つ. すなわち, Hermite 行列 $H = (AA^* - A^*A)$ に対して, Hermite 形式 $H[\boldsymbol{x}] = 0$ が恒等的に成り立つ. よって, 問題 7.7 より $AA^* - A^*A = O$, すなわち A は正規行列である.

7.9 問題

等式 $X^* = -X$ を満たすような正方行列 X を反 Hermite 行列と呼ぶ. このとき, $E+U$ が正則であるようなユニタリ行列 U と反 Hermite 行列 X の間には,

$$X = (E-U)(E+U)^{-1}, \quad U = (E-X)(E+X)^{-1}$$

によって, 一対一対応が定まることを示せ.

(解答)　第一に, U が与えられたとして, $X = (E-U)(E+U)^{-1}$ は反 Hermite であることを見よう. 実際, $U^* = U^{-1}$ に注意して, $X^* = (E+U^{-1})^{-1}(E-U^{-1})$ となるが, それぞれから U^{-1} をくくりだすことでこれは $(U+E)^{-1}(U-E)$ に等しい. ここで, この積は可換である. それを見るには, $(U-E)(U+E) = (U+E)(U-E)$ の両側から $(U+E)^{-1}$ をかければよい. よって積の順序を交換して, $X^* = (U-E)(U+E)^{-1} = -X$ となって, X は反 Hermite である.

逆に, 反 Hermite 行列 X が与えられたとする. まず, $\langle \boldsymbol{a}, X\boldsymbol{a}\rangle$ は常に純虚数 (零を含む) である. 実際, 内積の性質から, $\overline{\langle \boldsymbol{a}, X\boldsymbol{a}\rangle} = \langle X\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle$ であるが, 随伴をとって $X^* = -X$ に注意すると, これは $-\langle \boldsymbol{a}, X\boldsymbol{a}\rangle$ に等しい. すなわち, 共役が -1 倍に等しくなるので, 純虚数である. 次にこれより, $E+X$ が正則であることが導ける. それには, $(E+X)\boldsymbol{a} = \mathbf{o}$ を満たすようなベクトル $\boldsymbol{a}$ は零ベクトルに限られることを示せばよい. そこで, $(E+X)\boldsymbol{a} = \mathbf{o}$ と仮定すると, $0 = \langle \boldsymbol{a}, (E+X)\boldsymbol{a}\rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle + \langle \boldsymbol{a}, X\boldsymbol{a}\rangle$ となる. しかるに, 第一項は実数で, 第二項は純虚数なので, ともに 0 でなければならない. すなわち, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle = 0$ となり, $\boldsymbol{a} = \mathbf{o}$ が導かれた. よって, $E+X$ は正則である. これより, $U = (E-X)(E+X)^{-1}$ が定義できていることが分かった. また, このとき, $E+U$ を計算すると $2(E+X)^{-1}$ になるので, $E+U$ も正則である. あとは, U がユニタリであることを示せばよい. 実際, $X^* = -X$ に注意して, $U^* = (E-X)^{-1}(E+X)$ となるが, この積は第一の場合と同様にして可換なので, $U^* = (E+X)(E-X)^{-1} = U^{-1}$ である. よって, U はユニタリである. 最後に, 与えられた $U \leftrightsquigarrow X$ の対応が互いに逆になっていることは, 代

入して計算するだけである.