7 月 1 日 数学 II 演習 (解答)

6.1 問題

n 次正方行列 $A = (a_{ij})_{ij}$ が上三角行列または下三角行列であるとき, $\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ であることを示せ.

(解答)　上三角のときを証明する. 第 1 列で展開すると, $(1,1)$-成分以外はすべて 0 なので, $\det A = a_{11}\Delta_{11}$ である. ここで, Δ_{11} は $(1,1)$-小行列式を表す. この Δ_{11} も上三角行列の行列式であり, その対角成分には $a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ が並んでいる. 以下帰納的に, 順次第 1 列で展開していくことで, $\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ が得られる.

6.2 問題

次の正方行列の行列式を求めよ.

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -5 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & -5 \end{pmatrix} \qquad (2)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(3)\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -2 \end{pmatrix} \qquad (4)\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(5)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 14 & 4 & 10 \\ -1 & 0 & -4 & -1 & -2 \\ -9 & -3 & -17 & -4 & -21 \\ -3 & 4 & -7 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

(解答)　次数が大きいときは, LU-分解の手法で上三角行列に変形するのが早いだろう. たとえば (5) は,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 14 & 4 & 10 \\ -1 & 0 & -4 & -1 & -2 \\ -9 & -3 & -17 & -4 & -21 \\ -3 & 4 & -7 & -3 & -9 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

より答えは -10 となる. その他に対しては, 問題の正方行列を A と置くとき, (1) $\det A = 0$;　(2) $\det A = 3$;　(3) $\det A = -2$;　(4) $\det A = -1$.

6.3 問題

$\begin{pmatrix} 1 & -a & & & \\ & 1 & -a & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -a \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．ただし空白の部分の成分はすべて 0 とする．

(解答)　問題の行列のサイズは $n \times n$ とする．$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ と置くと，問題の行列は $E - aN$ と書ける．問題 3.5 より $N^n = O$ である．ここで $A = E + aN + a^2N^2 + \cdots + a^{n-1}N^{n-1}$ と置く．この行列 A が求める逆行列であることを示す．実際 $(E - aN)A$ を計算してみると，その中に出現する項 a^kN^k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ がすべて可換であることから，$(E-aN)(E+aN+a^2N^2+\cdots+a^{n-1}N^{n-1}) = E - a^nN^n$ となる．しかるに N^n は零行列だったので，これは単位行列 E に等しい．よって，$A = (E-aN)^{-1}$ である．すなわち求める逆行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ & 1 & a & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & a^2 \\ & & & \ddots & a \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

で与えられる．(注意: ここで作った A は，無限等比数列の和の式 $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots$ の類似である．ただし，$N^n = O$ より n 次以上を打ち切っている.)

6.4 問題

$m+n$ 次正方行列の行を $m+n$ のサイズに区分けし，列を $n+m$ (順番注意) のサイズに区分けしたとき，$\begin{pmatrix} O & A \\ B & C \end{pmatrix}$ の形であるとする．ここで，A は m 次正方行列で，B は n 次正方行列である．このとき，

$$\det \begin{pmatrix} O & A \\ B & C \end{pmatrix} = (-1)^{mn} \det A \cdot \det B$$

を示せ．

(解答)　列の置換で，A および C を左側に移動することを行う．巡回置換 $(1\,2)(2\,3)\cdots(n\,n+1)$ で列を置換すると，A および C の左端の列が行列の一番左に移動する．O および B の部分は右側に一つずつずれる．この巡回置換の符号は $(-1)^n$ である．続いて，$(2\,3)(3\,4)\cdots(n+1\,n+2)$ で列を置換すれば，A および C の左から 2 番目の列が第 2 列に移動する．以下これを m 回

繰り返すことで, A と C のすべての列が左に移動して, $\det\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$ の形になる．これに必要な置換の符号は, $(-1)^{mn}$ である．よって, 問題の左辺は, $(-1)^{mn}\det A\cdot\det B$ に等しい.

6.5 問題

$m+n$ 次正方行列 A を区分けして

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

とする．ただし, A_{11} は m 次正方行列 A_{22} は n 次正方行列である．もし A_{11} が正則行列ならば,

$$\det A \;=\; \det A_{11}\cdot\det(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})$$

となることを示せ．同様に A_{22} が正則のとき, $\det A=\det A_{22}\cdot\det(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})$ である.

(解答)　簡単な計算により,

$$\begin{pmatrix} I & O \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ O & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}$$

となるので, 両辺の行列式をとればよい．基本変形との類似に注意.

6.6 問題

n 個の n 変数関数 $f_i(x_1,x_2,\dots,x_n)$ $(i=1,2,\dots,n)$ を考える．(i,j) 成分が偏微係数 $\partial f_i/\partial x_j$ となっているような n 次正方行列の行列式 $\det(\partial f_i/\partial x_j)_{ij}$ を Jacobian と呼び, $\partial(f_1,f_2,\dots,f_n)/\partial(x_1,x_2,\dots,x_n)$ と書く．解析学で (そのうち) 習う重要な量である．いま,

$$f_i(x_1,x_2,\dots,x_n) \;=\; \frac{x_i}{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$$

と置くとき, Jacobian $\partial(f_1,f_2,\dots,f_n)/\partial(x_1,x_2,\dots,x_n)$ を求めよ.

(解答)　変数 $x_1,x_2,\dots,x_n$ の作る列ベクトルを $\boldsymbol{x}$ と置く．偏微係数の計算により $\partial f_i/\partial x_j=\|\boldsymbol{x}\|^{-2}(\delta_{ij}-2x_ix_j/\|\boldsymbol{x}\|^2)$ となる．ここで δ_{ij} は Kronecker のデルタである．そこで, $y_i=x_i/\|\boldsymbol{x}\|$ からなる列ベクトルを $\boldsymbol{y}$ と置く．$\|\boldsymbol{y}\|=1$ に注意する．各列から $\|\boldsymbol{x}\|^{-2}$ をくくり出せば, Jacobian は $\det(\partial f_i/\partial x_j)_{ij}=\|\boldsymbol{x}\|^{-2n}\det(\delta_{ij}-2y_iy_j)_{ij}$ で求められることになる．後は, 行列式 $\det(\delta_{ij}-2y_iy_j)_{ij}$ を計算すればよい (ちなみにここに出てくる行列は Householder 行

列である; 問題 3.1 参照). 第 1 列をそれぞれ $-x_j/x_1$ 倍して第 j 列に足す操作を, $j = 2, 3, \ldots, n$ に施すと,

$$\det \begin{pmatrix} 1-2y_1^2 & -y_2/y_1 & -y_3/y_1 & \cdots & -y_n/y_1 \\ -2y_2y_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -2y_3y_1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ -2y_ny_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

となる. 問題 6.5 を用いて (A_{22} が正則の場合) この行列式を計算すると, $(1-2y_1^2) - \sum_{i=2}^n 2y_i^2 = 1 - 2\|\boldsymbol{y}\|^2$ である. $\|\boldsymbol{y}\| = 1$ だったので, 行列式は -1 となる. これを代入することで, Jacobian は $-\|\boldsymbol{x}\|^{-2n}$ となる.

6.7 問題

n 次正方行列 A_n を

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

で定める.

$$\det A_n \;=\; \frac{((n-1)!)^3}{(2n-1)!} \cdot \frac{((n-2)!)^3}{(2n-2)!} \cdot \cdots \cdot \frac{(0!)^3}{n!}$$

が成り立つことを示せ. 例えば, $\det A_2 = 1/12$、$\det A_3 = 1/2160$、$\det A_4 = 1/6048000$ である.

(解答) $\det A_n$ において, 一番下の第 n 行を -1 倍して, 各 i 行 ($i = 1, 2, \ldots, n-1$) に足す. 各行各列から共通因数をくくり出すと,

$$\frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-2} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

となる. ここでさらに, 一番右の第 n 列を -1 倍して各 i 列 ($i = 1, 2, \ldots, n-1$) に足す. 各行各列から共通因数をくくり出すと,

$$\frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!}\cdot\frac{((n-1)!)^2}{(2n-2)!}\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

となる. 最後の行列式は, 第 n 行で展開すれば, $\det A_{n-1}$ に等しいので, 漸化式 $\det A_n = ((n-1)!)^4/(2n-1)!(2n-2)!\cdot\det A_{n-1}$ が得られた. すなわち,

$$\det A_n \;=\; \frac{((n-1)!)^4}{(2n-1)!(2n-2)!}\frac{((n-2)!)^4}{(2n-3)!(2n-4)!}\cdots\frac{(1!)^4}{3!2!}\det A_1$$

である. ここで $\det A_1 = 1$ である. いま, 分母分子で $(n-1)!, (n-2)!, \cdots, 2!$ を一つずつキャンセルすると, 求める式が導かれる.