6月17日 数学II 演習 (解答)

5.1 問題

次の連立一次方程式の一般解を (存在するならば) 求めよ.

(*1*) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(*2*) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(*3*) $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 & -7 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

(*4*) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & -6 & -2 \\ 3 & 3 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ 11 \\ -15 \end{pmatrix}$

(*5*) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$

(解答) (*1*) 左基本変形で $\left.\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$ となる．よって, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. (*2*) 左基本変形で $\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right.$ となる．よって, 解は存在しない. (*3*) 左基本変形で $\left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$ となる．よって, z と w をパラメータとして, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. (*4*) 左基本変形で $\left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$ となる.

よって, z をパラメータとして, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. (*5*) 左基本変形で $\left.\begin{matrix} 1 & 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} 5 \\ 2 \\ -5 \\ 0 \end{matrix}$ となる. よって, z と w をパラメータとして,
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.
注: 解にパラメータが存在する場合には, その選び方に依存するので解は一意ではない.

5.2 問題

次の行列が正則ならば, 逆行列を求めよ.

(*1*) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

(*2*) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 9 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(*3*) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(*4*) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 9 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & -9 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 10 & 1 \end{pmatrix}$

(解答) (*1*) $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ (*2*) 正則でない. (*3*) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (*4*)
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 0 & 8 & 2 \end{pmatrix}$

5.3 問題

次のベクトルについて, 一次独立か一次従属か判定せよ.

(1) $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -9 \\ -5 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

(解答)　n 個の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が一次独立であるという定義を書き直すと,

$$A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n)$$

と行列を定めるとき, 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{o}$ の解が零ベクトル $\boldsymbol{x} = \mathbf{o}$ のみとなることである. すなわち, $\operatorname{rank} A = n$ となることが, 一次独立であるための必要十分条件.

(1) 階数 3 なので一次独立. (2) 階数 2 なので一次従属. (3) 階数 2 なので一次従属.

5.4 補題

$m \times n$ 行列 A に対して, $AA^- A = A$ を満たす $n \times m$ 行列 A^- を A の一般逆行列という.

(i)　一般逆行列は存在することを示せ. (ヒント: 階数標準形)

(ii)　一般逆行列の一つを A^- とするとき, 任意の $n \times m$ 行列 B に対して, $A^- + B - A^- ABAA^-$ は A の一般逆行列であることを示せ. 逆に, A の一般逆行列はすべて, このようにして得られることを示せ.

(解答)　(i) 基本変形で $PAQ = \begin{pmatrix} E & O \\ O & O \end{pmatrix}$ とする. $A^- = Q \begin{pmatrix} E & O \\ O & O \end{pmatrix} P$ と置く. ここで, 真ん中の行列は, 基本変形で得られた階数標準形を転置したものである. 同じ形をしているが, もとが $m \times n$ ならば $n \times m$ になっていることに注意する. このとき, $AA^- A = P^{-1} \begin{pmatrix} E & O \\ O & O \end{pmatrix} Q^{-1} = A$ となっていることが容易に確かめられる.　(ii) $A^+ = A^- + B - A^- ABAA^-$ と置くと, $AA^+ A = A$

となっていることは簡単な計算で確かめられる．逆に $AA^+A = A$ であると仮定する．このとき, $B = A^+ - A^-$ と置くと, $A^-ABAA^- = A^-(A-A)A^- = O$ である．よって, $A^- + B - A^-ABAA^-$ は A^+ に等しい．

5.5 問題

次の置換について, 偶置換か奇置換か判定せよ．

(*1*) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ (*2*) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 7 & 2 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

(*3*) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 3 & 6 & 2 & 7 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ (*4*) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$

(解答)　置換は左から作用するものとする．互換の積として表す (一意ではない) と以下のようになる． (*1*) たとえば $(3\ 4)(3\ 2)(2\ 5)$. よって奇置換. (*2*) たとえば $(5\ 6)(2\ 4)(2\ 7)(1\ 2)(1\ 3)$. よって奇置換. (*3*) たとえば $(1\ 4)(5\ 7)(2\ 4)(2\ 6)(2\ 3)(1\ 8)$. よって偶置換. (*4*) たとえば $(1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)(4\ 5)\cdots(n-1\ n)$. これは, $n-1$ 個の互換の積である．よって, n が偶数のとき奇置換で, n が奇数のとき偶置換.