6 月 3 日 数学 II 演習 (解答)

4.1 問題

線形変換 $\mathbb{C}^n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}^n$ が行列 A で表されているとする．このとき, φ が逆関数をもつことと, A が正則行列であることは同値であることを示せ.

(解答)　A が正則という仮定のもと, φ が逆関数を持つことを示すのは簡単である．$\mathbb{C}^n$ 上の恒等変換を id と書く．すると A^{-1} に対応する一次変換を ψ と置くとき, $AA^{-1} = E = A^{-1}A$ より, $\varphi \circ \psi = id = \psi \circ \varphi$ となる．よって, $\psi = \varphi^{-1}$ である．反対に, 逆関数 φ^{-1} が存在するという仮定のもと, A が正則であることを示すのには, 若干注意が必要である．逆行列 A^{-1} を作るには, φ^{-1} の線形性を示さないといけない．等式 $\varphi\varphi^{-1}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \varphi\varphi^{-1}(\boldsymbol{x}) + \varphi\varphi^{-1}(\boldsymbol{y}) = \varphi(\varphi^{-1}(\boldsymbol{x}) + \varphi^{-1}(\boldsymbol{y}))$ に注意する (最後の等号は, φ が線形という仮定からである; それ以外は自明)．これに φ^{-1} を適用すると, $\varphi^{-1}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \varphi^{-1}(\boldsymbol{x}) + \varphi^{-1}(\boldsymbol{y})$ が従う．同様に, スカラー倍に関しても, $\varphi^{-1}(c\boldsymbol{x}) = c\varphi^{-1}(\boldsymbol{x})$ が導かれる．よって, 逆関数 φ^{-1} は線形変換である．この線形変換 φ^{-1} に対応する行列を A^{-1} と書くと, これは A の逆行列になっている．すなわち, A は正則である.

4.2 問題

n 次正方行列 $A = (a_{ij})_{ij}$ に対し, $\mathrm{tr}\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ で定義されるスカラーをトレースと呼ぶ.

(i)　A を $m \times n$ 行列, B を $n \times m$ 行列とするとき, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ を示せ.

(ii)　A を n 次正方行列, P を正則な n 次正方行列とするとき, $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}\, A$ を示せ.

(解答)　(i) $\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$ において積や和の順序を交換すれば, $\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ik} = \mathrm{tr}(BA)$ となる．(ii) に関しては, P^{-1} と AP に (i) を適用すればよい.

4.3 問題

$AB - BA = E$ を満たす n 次正方行列 A, B は存在しないことを示せ.

(解答)　一般に $\mathrm{tr}(X+Y) = \mathrm{tr}\, X + \mathrm{tr}\, Y$ が成り立つことを注意しておく．背理法で, $AB - BA = E$ を満たすと仮定する．両辺のトレースを取ると, 左辺は $\mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = 0$ となるが, 右辺は n となり 0 ではない．よって矛盾.

4.4 問題

次の行列の階数を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 & 20 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -3 & -13 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -8 & 9 & 19 \\ -2 & -1 & 2 & -3 & -11 \\ 1 & 0 & -3 & 3 & 4 \\ -3 & -2 & 1 & -3 & -18 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -7 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & -1 & 2 & -8 \\ -8 & 6 & 2 & -5 & 14 \end{pmatrix}$

(解答)　基本変形で $\begin{pmatrix} E & O \\ O & O \end{pmatrix}$ の形に直せばよい．(1) 階数 3.　(2) 階数 3.　(3) 階数 2.　(4) 階数 4.

4.5 問題

下にあげた正方行列を A とするとき, A に左基本変形を施して, 上三角行列に変形する．用いる基本変形は, 第 i 行を c 倍して第 j 行に足す左基本変形でしかも $i > j$ の場合のみとする．以下の行列を実際に変形して, 上三角行列にせよ．またその結果を用いて, 下三角行列 L と上三角行列 U の積によって $A = LU$ と表せ.

(1) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 9 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(解答)　左基本変形で $PA = U$ と変形する．用いる基本変形は, $i < j$ のときに第 i 行を c 倍して第 j 行に足す操作のみである．対応する基本行列を $R(j, i; c)$ と書くと, 対角成分 1 および (j, i)-成分 c を除いてすべて 0 なので, 下三角行列であることに注意する．よって, それらの積 P も下三角行列となる (問題 2.8 参照). したがって $L = P^{-1}$ と置くと下三角であり (問題 3.4 参照), これを $PA = U$ に左からかけることで $A = LU$ の分解が得られる．下三角行列 L の対角成分はすべて 1 であることを注意しておく．(この条件を満たすような分解 $A = LU$ は, A が正則のとき, 一意に定まる.)

(1)　基本行列の積 $P = R(3, 2; 1)R(3, 1; -3)$ によって, 上三角行列 $U = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に変形される．よって, $L = P^{-1}$ を左からかけて,

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なる分解が得られる.

(2) $$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(3) $$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(4) $$\begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注:　このような分解は, LU-分解と呼ばれる.

4.6 問題

一般に, 行列の列 $A_1, A_2, A_3, \ldots$ の極限 $\lim_{n\to\infty} A_n$ を, 成分ごとの極限として定める．すなわち, $A_n = (a_{ij}^{(n)})_{ij}$ と置くとき, 極限 $\lim_{n\to\infty} A_n$ の (i, j)-成分は $\lim_{n\to\infty} a_{ij}^{(n)}$ で与えられる．この定義のもとで, 任意の正方行列 A は, 正則行列 A_n の列の極限 $A = \lim_{n\to\infty} A_n$ として与えられることを示せ.

(解答)　基本変形を用いて, $PAQ = \begin{pmatrix} E & O \\ O & O \end{pmatrix}$ の形に変形する．ここで, $B_n = \begin{pmatrix} E & O \\ O & 1/n \cdot E \end{pmatrix}$ と置く．このとき, $B_n^{-1} = \begin{pmatrix} E & O \\ O & nE \end{pmatrix}$ となるので, B_n は正則である．さらに, $A_n = P^{-1}B_nQ^{-1}$ と置くと, 正則行列の積として A_n も正則である．A_n の各成分は, B_n の成分の一次式となっているので, B_n の成分の関数と見たときに連続である．よって, $\lim_n A_n = P^{-1}(\lim_n B_n)Q^{-1} = P^{-1}PAQQ^{-1} = A$ である．