5 月 20 日 数学 II 演習 (解答)

3.1 問題

$\boldsymbol{v}$ を列ベクトル $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}1+2i\\1-3i\\3+i\end{pmatrix}$ とするとき, $E-2\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^*$ を計算せよ. ここで, E は 3×3 単位行列であり, A^* は 行列 A を転置した上で各成分の共役複素数をとってできる行列を表す (随伴行列と呼ばれる). A が $m\times n$ 行列ならば A^* は $n\times m$ 行列であることに注意. また, 上で求めた行列 $E-2\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^*$ を U と置くとき, UU^* を計算せよ.

(解答)　$\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^*$ を計算すると,

$$\frac{1}{25}\begin{pmatrix}1+2i\\1-3i\\3+i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-2i & 1+3i & 3-i\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -1+i & 1+i\\-1-i & 2 & -2i\\1-i & 2i & 2\end{pmatrix}$$

となるので, $U=E-2\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^*$ は,

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 2-2i & -2-2i\\2+2i & 1 & 4i\\-2+2i & -4i & 1\end{pmatrix}$$

となる. また UU^* を計算すると単位行列 E となる. (注意: このような U は Householder 行列と呼ばれる. Hermite かつユニタリな行列になっている.)

3.2 問題

A を m 次正方行列, B を n 次正方行列として, $M=\begin{pmatrix}A & O\\O & B\end{pmatrix}$ の形の行列を考える. もし M が正則ならば, 逆行列 M^{-1} は $\begin{pmatrix}A^{-1} & O\\O & B^{-1}\end{pmatrix}$ で与えられることを示せ.

(解答)　逆行列 M^{-1} を区分けして $\begin{pmatrix}X & Y\\Z & W\end{pmatrix}$ と書く. すると $MM^{-1}=\begin{pmatrix}A & O\\O & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X & Y\\Z & W\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AX & AY\\BZ & BW\end{pmatrix}$ が単位行列 $\begin{pmatrix}E & O\\O & E\end{pmatrix}$ に等しくなる. 左上のブロックの比較で $AX=E$ より A は正則行列で, $X=A^{-1}$, また右下のブロックの比較で $BW=E$ より B は正則行列で, $W=B^{-1}$ となる. さらに, $AY=O$ に左から A^{-1} をかけて $Y=O$, また $BZ=O$ に左から B^{-1} をかけて $Z=O$ である.

3.3 問題

$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$ の形をした正方行列を巡回行列と呼ぶ. 二つの巡回行列の積は, 巡回行列であることを示せ.

(解答)　この場合は, 一番上の行を第 0 行として, 一番下を第 $n-1$ 行とする方が便利である. 列も同様に数えるとする. すると, 問題にあげられている巡回行列の (i,j) 成分は, a_{-i+j} で与えられる. ただし, インデックスは n を法として考える. たとえば, 一番下の行の左から 2 つめの成分は, $(n-1,1)$ 成分であり, インデックス $-(n-1)+1=-n+2$ が n を法として 2 に等しいので, a_2 である. このことを踏まえて, 巡回行列の積が巡回行列であることを示す. 二つの巡回行列 $A=(a_{-i+j})$ および $B=(b_{-i+j})$ が与えられているとする. 積 AB の (i,k) 成分は $\sum_{j=0}^{n-1} a_{-i+j}b_{-j+k}$ である. 特に, $(0,k)$ 成分を c_k と書くことにする. すると, AB が巡回行列となるためには, (i,k) 成分が c_{-i+k} に等しいことを示せばよい. 上に与えた (i,k) 成分の式において和の順序を交換して, $i,i+1,\dots,n-1,0,\dots,i-1$ の順で足してみる. すなわち, $j'=-i+j$ と置くとき, $j'=0,1,\dots,n-1$ の順である (n を法として考えている). この置き換えで, (i,k) 成分は $\sum_{j'=0}^{n-1} a_{j'}b_{-j'+(-i+k)}$ となって, これは c_{-i+k} に等しい.

3.4 問題

上三角行列が正則であるためには, その対角成分がすべて 0 と異なることが必要十分であることを示せ. また, 逆行列も上三角行列であることを示せ.

(解答)　$A=(a_{ij})$ を上三角行列とする. すなわち, $i>j$ のとき, $a_{ij}=0$ である. 正方行列 $X=(x_{ij})$ に対して, $XA=E$ と置いてみる. X を第 1 列から順に右に向かって処理していく. 第 k 列の処理時に示すべきことは, $a_{kk}\neq 0$ ならば X の第 k 列が一意に決定し, $a_{kk}=0$ ならばそのような X が存在し得ないことである. さらに X が上三角になるように $x_{k+1\,k}=\cdots=x_{nk}=0$ となることを同時に示す. まず, 第 1 列を考えてみる. 行列 A が上三角より $a_{21}=\cdots=a_{n1}=0$ なので, $XA=E$ の第 1 列を比較すると, $x_{i1}a_{11}=\delta_{i1}$ となる. よって, $a_{11}\neq 0$ ならば, $x_{11}=1/a_{11}$ および $x_{21}=\cdots=x_{n1}=0$ で X の第 1 列が定まる. $a_{11}=0$ ならば, そのような x_{11} が存在し得ない. 以下順次 $k-1$ 列まで定まったとして, 第 k 列を考える. XA の (i,k) 成分 $x_{i1}a_{1k}+x_{i2}a_{2k}+\cdots+x_{in}a_{nk}$ において, X の第 $k-1$ 列までは上三角になるように決定済みであることから $x_{i\,i-1}a_{i-1\,k}$ ($i<k$ のとき) もしくは $x_{i\,k-1}a_{k-1\,k}$ ($k\le i$ のとき) までの項が 0 となって消え, A が上三角であるこ

とから $x_{i\,k+1}a_{k+1\,k}$ から先の項が消える. よって, (i,k) 成分は, $i<k$ ならば $x_{ii}a_{ik}+\cdots+x_{ik}a_{kk}$ であり, $k\leq i$ ならば $x_{ik}a_{kk}$ である. すなわち $XA=E$ の第 k 列の比較から,

$$\begin{cases} x_{ii}a_{ik}+\cdots+x_{i\,k-1}a_{k-1\,k}+x_{ik}a_{kk} &= 0 \quad i<k \text{ のとき} \\ x_{ik}a_{kk} &= \delta_{ik} \quad k\leq i \text{ のとき} \end{cases}$$

となる. ここで, $x_{ii},\ldots,x_{i\,k-1}$ は, 第 $k-1$ 列までの成分なので既に決定済みである. よってこれを解くことで, $a_{kk}\neq 0$ ならば, X の第 k 列 x_{ik} が一意に決定する. 実際に求めると, $i<k$ ならば $x_{ik}=-a_{kk}^{-1}(x_{ii}a_{ik}+\cdots+x_{i\,k-1}a_{k-1\,k})$ であり, また $x_{kk}=1/a_{kk}$ である. さらに $x_{k+1\,k}=\cdots=x_{nk}=0$ である. 対角成分 a_{kk} が 0 のときは x_{kk} が存在し得ない. 以上で, 第 k 列についても成り立つことが分かったので, 帰納的にすべての列で成り立つ. よって, 対角成分 a_{kk} がすべて 0 と異なるときは $XA=E$ となる上三角行列 X が存在し, 一つでも対角成分に 0 があれば, そのような X は存在しない.

3.5 問題

正方行列 N を $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ とするとき, N は冪零であることを示せ. すなわち, ある $n\geq 1$ があって, $N^n=O$ であることを示せ.

(解答)　行列 N のサイズを $n\times n$ とするとき, $N^n=O$ となることを示す. N の (i,j) 成分は, Kronecker のデルタを用いて $\delta_{i+1\,j}$ と表せる. したがって, N^2 の (i,k) 成分は $\sum_j \delta_{i+1\,j}\delta_{j+1,k}=\delta_{i+2\,k}$ である. つまり, N^2 は $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$ の形になる. 以下, 順次 1 の列が右上にずれていって, N^n が零行列となる.

3.6 問題

実ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ に対して, 3 次正方行列 $X(\boldsymbol{a})=\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$ を対応させるとき, $X(\boldsymbol{a})X(\boldsymbol{b})-X(\boldsymbol{b})X(\boldsymbol{a})=X(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ が成り立つことを示せ.

(解答)　$X(\boldsymbol{a})X(\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix} -a_2b_2-a_3b_3 & a_2b_1 & a_3b_1 \\ a_1b_2 & -a_1b_1-a_3b_3 & a_3b_2 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & -a_1b_1-a_2b_2 \end{pmatrix}$ である. $X(\boldsymbol{b})X(\boldsymbol{a})$ は, a_i と b_i を入れ替えたものである. よって, $X(\boldsymbol{a})X(\boldsymbol{b})-X(\boldsymbol{b})X(\boldsymbol{a})$ の各成分を調べて, $X(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ になっていることが示される.

3.7 問題

A, B を $\mathbb{R}$ 上の n 次正方行列とする. $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ の形の行列が正則ならば, その逆行列は $\begin{pmatrix} C & -D \\ D & C \end{pmatrix}$ の形をしていることを示せ.

(解答) i を虚数単位とすると, 簡単な計算で

$$\begin{pmatrix} E & iE \\ O & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -iE \\ O & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+iB & O \\ O & A-iB \end{pmatrix}$$

となる. 左辺の 3 個の行列の積のうち, 真ん中の行列は仮定により正則であり, その両側の行列は, $\begin{pmatrix} E & iE \\ O & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -iE \\ O & E \end{pmatrix} = E$ なので, 互いに逆行列になっている. よって, 3 個の行列はいずれも正則なので, その積, 翻っては $\begin{pmatrix} A+iB & O \\ O & A-iB \end{pmatrix}$ も正則である. 従って, $A+iB$ も正則である (問題 3.2 の証明参照). その逆行列を実部と虚部に分けて $C+iD$ と書くと, $(A+iB)(C+iD) = (AC-BD)+i(AD+BC)$ が単位行列に等しくなるので, $AC-BD = E$ および $AD+BC = O$ が得られる. これらの等式より, $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & -D \\ D & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}$ と単位行列になる. よって, $\begin{pmatrix} C & -D \\ D & C \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ の逆行列になっている. (注意: 実際には, A, B は $\mathbb{R}$ 上でなくても成立する.)