5 月 1 日 数学 II 演習 (解答)

2.1 問題

次の外積を求めよ． (i) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$． (ii) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$.

(解答) (i) $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$. (ii) $\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$.

2.2 問題

次の等式を示せ.

(i) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = -\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle\boldsymbol{a} + \langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle\boldsymbol{b}$.

(ii) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} + (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$.

(解答) (i) 左辺の第一成分を調べてみると,

$$\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -(b_2c_2 + b_3c_3)a_1 + (a_2c_2 + a_3c_3)b_1$$

となる． $a_1b_1c_1$ の正負の項を足しても値は変わらず, これは右辺の第一成分に等しい．ほかの成分も同様である．(ii) は, (i) からすぐに従う．

2.3 問題

ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ に対して, $\boldsymbol{d}_1 = \boldsymbol{a}/\|\boldsymbol{a}\|$ と置く． $\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \boldsymbol{d}_3$ がこの順で右手系の直交座標系 ($\|\boldsymbol{d}_1\| = \|\boldsymbol{d}_2\| = \|\boldsymbol{d}_3\| = 1$) となるような $\boldsymbol{d}_2, \boldsymbol{d}_3$ を求めよ．解は一意ではない.

(解答) ベクトル $\boldsymbol{a}$ と直交するベクトル $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ は, 内積が 0 になることから $x - y + 2z = 0$ を満たす． すなわち, y と z をパラメータとして, $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ と表せる． y と z は任意だが, たとえば, $y = 1$, $z = 0$ と取れば, $\boldsymbol{a}$ と直交する一つのベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ が得られる．ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が直交系 (右手系) をなすようなベクトル $\boldsymbol{c}$ は外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ で得られ

るので, これを実際計算すると $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ となる. あとは, ベクトルの長さが 1 になるように, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を実数で割ってやればよい. そのようにしてできるベクトルは, $\boldsymbol{d}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{d}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{d}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である.

2.4 問題

原点および $(1,2,-2)$, $(0,3,-1)$, $(-2,0,2)$ を頂点とする四面体の体積を求めよ.

(解答)　与えられた 3 つの点の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ と書くことにする. これらで張られる 平行六面体の体積は, $|(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}|$ の計算で 2 となる. 四面体の体積はその 1/6 なので, 答えは 1/3 である.

2.5 問題

次の方程式を満たす複素数 z をすべて求めよ.　(i) $z^3 = i$.　(ii) $z^2 - 2z + i\sqrt{3} = 0$.

(解答)　(i) $3 \arg z = \pi/2 + 2n\pi$ が成り立つので, 偏角 $\arg z$ は $\pi/6, 5\pi/6, 3\pi/2$ の 3 個 (およびそれらに $2n\pi$ を足したもの) である. また, 絶対値に関しては $|z|^3 = 1$ より $|z| = 1$ である. よって, $\sqrt{3}/2 \pm i \cdot 1/2$ および $-i$ が解である.
(ii) 変形すると $(z-1)^2 = 1 - i\sqrt{3}$ となる. 右辺は絶対値が 2 で, 偏角が $-\pi/3$ であるような複素数である. よって, $z-1$ は絶対値が $\sqrt{2}$ で, 偏角が $-\pi/6$ および $5\pi/6$ となるような複素数である. すなわち, $z = 1 \pm 2^{-1/2}(\sqrt{3} - i)$ となる.

2.6 問題

x 軸, y 軸, z 軸正の方向の単位ベクトルを

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/8 \\ -7/8 \\ \sqrt{3}/4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5/8 \\ -\sqrt{3}/8 \\ -3/4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3/4 \\ \sqrt{3}/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

に写す回転を, Euler の角を用いて表せ.

(解答)　x 軸, y 軸, z 軸正の方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ で表し, 問題に与えられた 3 つの単位長ベクトルを $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'$ で表すことにする. また, これらの方向を x' 軸, y' 軸, z' 軸と呼ぶことにする. z' 軸と z 軸のなす角 θ $(0 \leq \theta \leq 90°)$ を求めると, $\cos\theta = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1' \rangle = 1/2$ より, $\theta = 60°$ となる. また, z' 軸方向 $\boldsymbol{e}_3'$ の xy-平面への射影 $(3/4, \sqrt{3}/4)$ が x 軸となす角 φ を求め

ると, $\varphi = 30°$ となる. この $\varphi = 30°$ で xy-平面を回転させたとき, y 軸方向の $\boldsymbol{e}_2$ は

$$\begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

に写る. この単位長ベクトルを $\boldsymbol{p}$ と書くことにする. Euler の角を定める残りの一つの角 ψ は, $\boldsymbol{p}$ からみて, y' 軸方向 $\boldsymbol{e}_2'$ のなす角である. $\cos\psi = \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{e}_2' \rangle = -1/2$ より, $\psi = 120°, 240°$ が得られる. この 2 つのうち, いずれになるかを調べる必要がある. 一つの方法は,

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

に代入して計算する方法である. 計算の結果得られる行列が, 与えられたベクトル 3 つをならべた $(\boldsymbol{e}_1' \, \boldsymbol{e}_2' \, \boldsymbol{e}_3')$ に等しい方が答えである. 別の方法は, 外積 $\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{e}_2'$ を計算してみる方法である. それが $\boldsymbol{e}_3'$ の正の定数倍ならば, $\boldsymbol{p}$ から見て $\boldsymbol{e}_2'$ は $0°$ から $180°$ の内にあり, 負の定数倍ならば $180°$ から $360°$ の内にある. 実際に外積を計算してみると, $\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{e}_2' = (-\sqrt{3}/2)\boldsymbol{e}_3'$ と負の定数倍になるので, $\psi = 240°$ が答えになる. すなわち, $\theta = 60°$, $\varphi = 30°$, $\psi = 240°$ が求める Euler の角となる.

2.7 問題

行列の和と積に関する分配法則 $A(B+C) = AB + AC$ を証明せよ.

(解答)　$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ と置く. 両辺の (i,k) 成分が等しいことを示す. 左辺の (i,k) 成分からスタートすると, $\sum_j a_{ij}(b_{jk} + c_{jk}) = \sum_j (a_{ij}b_{jk} + a_{ij}c_{jk}) = \sum_j a_{ij}b_{jk} + \sum_j a_{ij}c_{jk}$ となり, 最後の式は右辺の (i,k) 成分に等しい.

2.8 問題

二つの上三角行列 A, B の積は, 上三角行列になることを示せ.

(解答)　$A = (a_{ij})$ および $B = (b_{ij})$ と置く. 上三角であるとは $i > j$ のときに, $a_{ij} = 0 = b_{ij}$ になることである. 積 AB の (i,k) 成分 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$ が, $i > k$ のときに 0 になることを示せばよい. n 個の項の和 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$, すなわち, $a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}$ において, 始めの $i-1$ 個の項 $a_{i1}b_{1k} + \cdots + a_{i\,i-1}b_{i-1\,k}$ は, a の側がすべて 0 になる. また, 終わりの $n-k$ 個の項 $a_{i\,k+1}b_{k+1\,k} + \cdots + a_{in}b_{nk}$ は, b の側がすべて 0 になる. 仮定より $i-1 \geq k$ なので, $(i-1)+(n-k) \geq n$ となり, 始めの $i-1$ 項と終わりの $n-k$

項ですべての $a_{ij}b_{jk}$ がカバーされていることになる. よって, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$ は, $i > k$ のとき 0 になり, 上三角である.