4月15日 数学II 演習 (解答)

1.1 問題

行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ による一次変換を考える. 単位円 $x^2+y^2=1$ を写して得られる曲線の方程式を求めよ.

(解答)　一次変換によって, 点 (x,y) が (X,Y) に写るとすると, $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる. これより, $x=(1/3)\cdot(-X-2Y)$ および $y=(1/3)\cdot(2X+Y)$ となるので, $x^2+y^2=1$ に代入して整理すれば, 式 $5X^2+5Y^2+8XY=9$ が得られる. ちなみにこれは, 楕円 $x^2+(y/3)^2=1$ を原点中心に $45°$ 回転させた図形である.

1.2 問題

平面上の直線 $\ell : ax+by=0$ が与えられているとする. 直線 ℓ に関して線対称な点に写す一次変換を次の二通りの方法で求めよ. (i) 各点 (s,t) に対して, 直線 ℓ に関し線対称な点 (u,v) を具体的に求める方法. (ii) ある角度 θ で回転させることによって直線が x 軸に一致するように変換した上で, x 軸対称な点に写し, その後で $-\theta$ 回転させて戻す方法.

(解答)　(i) ベクトル (a,b) は ℓ の法線ベクトルである. よって, $(u-s, v-t)$ は (a,b) に平行となる. すなわち, 実数 k を用いて $u-s=ka$ および $v-t=kb$ と表せる. よって, $u=ka+s$ および $v=kb+t$ となる. 一方, 中点 $((u+s)/2, (v+t)/2)$ は直線 ℓ 上に乗っていることから $a(u+s)/2+b(v+t)/2=0$ が成り立つ. この式に上の u と v の式を代入した上で, k について解くと, $k=-2(as+bt)/(a^2+b^2)$ となる. これを u と v の式に戻すことで, s,t の一次式が得られ,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} -a^2+b^2 & -2ab \\ -2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

と一次変換が求められる. (ii) 直線 ℓ が x 軸となす角を η とすると, ちょうど $-\eta$ だけ回転させれば ℓ が x 軸に一致する. すなわち $\theta=-\eta$ であって, 問題を読み替えると, 角度 $-\eta$ で回転させた後で, x 軸対称な点に写し, η で回転させて戻せばよい. よって, 求める一次変換は,

$$\begin{pmatrix} \cos\eta & -\sin\eta \\ \sin\eta & \cos\eta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(-\eta) & -\sin(-\eta) \\ \sin(-\eta) & \cos(-\eta) \end{pmatrix}$$

で与えられる. 傾きを考えればすぐに分かるように, 直線 $\ell : ax+by=0$ と x 軸のなす角 η の余弦と正弦は, $\cos\eta=\pm b/\sqrt{a^2+b^2}$ および $\sin\eta=$

$\mp a/\sqrt{a^2+b^2}$ で与えられる．これらを代入して計算すれば, (i) のときと同じ一次変換が得られる．

1.3 問題

空間内の点 $P=(-1,1,1)$ と $Q=(3,1,2)$ を考える．次を満たす点 X の軌跡を求めよ: ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ は, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と直交し, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ と角 $120°$ をなす．

(解答)　点 X の座標を (x,y,z) とすると, 条件より, $-x+y+z=0$ および $\sqrt{14}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cos 120°=3x+y+2z$ が得られる．後者を 2 乗した式に前者から得られる $z=x-y$ を代入すると, $(3x-2y)(2x+y)=0$ となる．よって, t をパラメータとして, $t(-2,-3,1)$ あるいは $t(-1,2,-3)$ と表されることが必要条件である．途中で 2 乗しているので, 十分性を調べるために, 後者の方の式に代入すると, ともに $t\geq 0$ でなければならないことが分かる．ただし, $t=0$ のときは $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ が零ベクトルとなって, 角 $120°$ といわない方がよさそうなので, 答えるべき X の範囲は, $t>0$ の範囲で, 位置ベクトルが $t(-2,-3,1)$ および $t(-1,2,-3)$ で表される 2 本の半直線上である．

1.4 問題

空間内の点 A,B,P,Q を取る．ただし, $A\neq B$ 及び $P\neq Q$ であり, 線分 AB と線分 PQ は平行でないと仮定する．4 本の線分 AP,AQ,BP,BQ を $t:(1-t)$ に内分する 4 点は平行四辺形の頂点となることを示せ．ただし $0\lneq t\lneq 1$ とする．

(解答)　線分 AP,AQ,BP,BQ を $t:(1-t)$ に内分する点をそれぞれ X,Y,Z,W と置く．点 A の位置ベクトルを, 対応する小文字を用いて $\boldsymbol{a}$ と表す．他の点に対しても同様の記法を取ることにする．すると,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= t\boldsymbol{p}+(1-t)\boldsymbol{a}\\
\boldsymbol{y} &= t\boldsymbol{q}+(1-t)\boldsymbol{a}\\
\boldsymbol{z} &= t\boldsymbol{p}+(1-t)\boldsymbol{b}\\
\boldsymbol{w} &= t\boldsymbol{q}+(1-t)\boldsymbol{b}
\end{aligned}
$$

よって, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{XY}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{ZW}}$ はともに $t(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p})$ となる．このベクトルは, 仮定 $t\neq 0, P\neq Q$ から零ベクトルではない．したがって, XY と ZW は平行である．同様に, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{XZ}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{YW}}$ はともに $(1-t)(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$ となる．これも零ベクトルではなく, したがって, XZ と YW は平行である．また, AB と PQ は平行でないと仮定したので, $t(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p})$ と $(1-t)(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$ は平行でない．すなわち 4 点が一直線上になってしまうことはない．よって, X,Y,W,Z はこの順で平行四辺形の 4 頂点となる．

1.5 問題

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ に対して, A^n を求めよ.

(解答)　$a \neq c$ のときは, $A^n = \begin{pmatrix} a^n & b(a^n - c^n)/(a-c) \\ 0 & c^n \end{pmatrix}$ となる. $a = c$ のときは, $A^n = \begin{pmatrix} a^n & nba^n \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$ となる. 数学的帰納法で証明すればよい.

1.6 問題

p を奇素数とする. 行列 $\begin{pmatrix} 1 & p \\ p & 1+p \end{pmatrix}$ の p 乗を考える. その $(1,2)$-成分 (右上の成分) は, p^2 で割り切れるが p^3 では割り切れないことを示せ.

(解答)　行列 A を $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ と置いて, $(E+pA)^p$ を考えればよい. ここで, E は単位行列である. 二項展開により,

$$(E+pA)^p \;=\; E + \binom{p}{1} pA + \binom{p}{2} p^2 A^2 + \binom{p}{3} p^3 A^3 + \cdots$$

となる. A^k は, 整数を成分に持つ行列であることを一応注意しておく. 第 3 項において, $\binom{p}{2} p^2 = (p(p-1)/2) \cdot p^2$ であるが, p は奇素数と仮定されているので, $p(p-1)/2$ で p が 2 に約されてしまうことはない. よって, $\binom{p}{2} p^2$ は p^3 で割り切れる. すなわち, p^3 を法として 0 である. また, 第 4 項以下の係数は少なくとも p^3 がかかるので, 明らかに p^3 を法として 0 である. よって, p^3 を法として考えると, 第 3 項以下は消えて, $(E+pA)^p$ は $E + p^2 A$, すなわち $\begin{pmatrix} 1 & p^2 \\ p^2 & 1+p^2 \end{pmatrix}$ に等しい. つまり, $(1,2)$ 成分は, $p^2 + (\text{整数}) \times p^3$ の形をしているということである. よって, p^2 で割れるが, p^3 で割り切れることはない. (注意: p が素数であることは使っていない. 3 以上の奇数であれば成立する.)