1月13日 数学II演習 (解答)

13.1 問題

2つの行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ および $B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ 6 & -2 & 7 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ を考える.

(i) $AB = BA$ であることを確かめよ.

(ii) A が固有値 1 を持つことを示し, その固有空間を決定せよ.

(iii) 固有値 1 に対する A の固有ベクトルであり, なおかつ B の固有ベクトルでもあるようなベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ. また, そのベクトルに対する B の固有値はいくつか.

(解答) (i) AB も BA もいずれも $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 7 \\ 8 & -4 & 9 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ になる. (ii) 1 に対する固有空間を W_1 とすると, それは 2 次元で基底としてはたとえば, $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を取れる. (iii) $AB = BA$ なので, 部分空間 W_1 は B に関して不変である. すなわち, W_1 上へ制限することで, B は W_1 上の線形変換をなす. 上で与えた W_1 の基底に対して, B の制限を行列で表してみよう. 計算によって, $B\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\boldsymbol{e}_1 - 4\boldsymbol{e}_2$ となる. また $B\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_1$ である. これより, 基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ に対して, B の制限は行列 $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ で与えられることが分かった. この 2 次正方行列の固有多項式は $(\lambda - 2)^2$ なので 2 のみが固有値であり, その固有空間は $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ から張られる 1 次元空間である. この列ベクトルによって表される W_1 のベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする. $\mathbb{C}^3$ の標準基底に戻すと $\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ が $\boldsymbol{x}$ のことである. これ (あるいはその 0 でないスカラー倍) は W_1 に属するので固有値 1 に対する A の固有ベクトルであり, さらに作り方から固有値 2 に対する B の固有ベクトルになっている.

13.2 問題

次の行列が正規行列であることを確かめ, さらにユニタリ行列で対角化せよ.

(i) $\begin{pmatrix} -1-4i & -2i \\ 2i & -1-4i \end{pmatrix}$.

(ii) $\begin{pmatrix} -15+10i & -5+10i & 10-20i \\ -5-10i & -19-14i & -2-12i \\ 10+20i & -2-12i & -16+4i \end{pmatrix}$. ちなみに固有値は, $-40+10i, 10+10i$, $-20-20i$ である.

(解答)　(i) 問題の行列を A と置くと, AA^* も A^*A もともに $\begin{pmatrix} 21 & 4i \\ -4i & 21 \end{pmatrix}$ となるので, 正規行列である. よって, ユニタリ行列で対角化できる. 行列 A の固有方程式は $\lambda^2 + (2+8i)\lambda + (-19+8i) = 0$ となるので, これを解くと固有値として $1-4i$ と $-3-4i$ が得られる. それぞれの固有ベクトルを求めると, 前者からは $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ が得られ, 後者からは $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ が得られる. これらは相異なる固有値に対する固有ベクトルであるから直交する. いずれもノルムが $\sqrt{2}$ なのでそれで割ると正規直交基底となる. すなわち, ユニタリ行列としては $U = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ をとればよく, U^*AU によって, 対角行列 $\begin{pmatrix} 1-4i & \\ & -3-4i \end{pmatrix}$ が得られる.

(ii) AA^* も A^*A もともに $\begin{pmatrix} 950 & 150-300i & -300+600i \\ 150+300i & 830 & -60 \\ -300-600i & -60 & 920 \end{pmatrix}$ となるので, 確かに正規行列である. 各固有値に対する固有ベクトルを求めると, 順にたとえば, $\begin{pmatrix} -1+2i \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1-2i \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ が得られる. あとはノルムが 1 になるようにスカラーで割って, $U = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -1+2i & 1-2i & 0 \\ -1 & -1 & 2\sqrt{2} \\ 2 & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ とすれば, U はユニタリ行列となって, U^*AU は対角行列となる. 対角成分は固有値 $-40+10i$, $10+10i$, $-20-20i$ をこの順に並べたものである. ユニタリ行列 U の各列がなす正規直交基底は, それぞれに絶対値 1 の複素数をかけてもその性質を保つので, 見た目上異なる U の選択はあり得る. たとえば, $U = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 3-i & 3-i & 0 \\ 1+i & -1-i & 4 \\ -2-2i & 2+2i & 2 \end{pmatrix}$ も答えである.

13.3 問題

次の対称行列および Hermite 行列を, 直交行列ないしはユニタリ行列で対角化せよ.

(i) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & -3 & 8 \\ -6 & 8 & -1 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} -2 & -9-9i & 9-9i \\ -9+9i & 9 & -11i \\ 9+9i & 11i & 9 \end{pmatrix}$

(解答) 問題の行列を A とする. (i) 固有多項式は $\lambda^2 - 25$ となるので固有値は ± 5 である. ノルム 1 の固有ベクトルを求めることで直交行列 $U = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ が得られて, U^*AU は対角行列 $\begin{pmatrix} 5 & \\ & -5 \end{pmatrix}$ となる.

(ii) 固有多項式は $\lambda^3 - 117\lambda + 324 = (\lambda-3)(\lambda-9)(\lambda+12)$ となるので, 固有値は $3, 9, -12$ である. ノルム 1 の固有ベクトルを求めることで直交行列 $U = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ が得られて, U^*AU は対角行列になり, その対角成分は順に $3, 9, -12$ である.

(iii) 固有多項式は $\lambda^3 - 16\lambda^2 - 400\lambda + 6400 = (\lambda-16)(\lambda-20)(\lambda+20)$ となるので固有値は, $16, \pm 20$ である. ノルム 1 の固有ベクトルを求めることでユニタリ行列 U としてたとえば, $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-i & 0 & -1+i \\ i & -i\sqrt{2} & i \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$ が得られて, U^*AU は対角行列になり, その対角成分は順に $16, 20, -20$ である.

13.4 問題

ユニタリかつ Hermite な正方行列 A を考える. このとき, $\|\boldsymbol{v}_i\| = 1$ を満たす複素列ベクトルを用いて, $A = E - 2(\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_1^* + \boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_2^* + \cdots + \boldsymbol{v}_s\boldsymbol{v}_s^*)$ $(s \geq 0)$ と書けることを示せ (E は単位行列).

(解答) ユニタリかつ Hermite なので, A の固有値は 1 と -1 のみである. それぞれの固有空間を W_1, W_{-1} と書く. 正規変換に対しては, 固有空間によって全体のベクトル空間が張られることに注意すると, $\mathbb{C}^n = W_1 + W_{-1}$ である (どちらかが零空間となる場合も含む). さらに, 正規行列の相異なる固有値に対する固有空間として, W_1 と W_{-1} は直交する. そこで, W_{-1} の正規直交規定 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_s$ $(s \geq 0)$ を取り, $B = A + 2(\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_1^* + \boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_2^* + \cdots + \boldsymbol{v}_s\boldsymbol{v}_s^*)$ と置く. このとき, すべての $\boldsymbol{x} \in W_1$ に対して, $B\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ である. ここで, 上に述べた直交性を使った. また, 各 $\boldsymbol{v}_i$ に対して, $B\boldsymbol{v}_i = A\boldsymbol{v}_i + 2\boldsymbol{v}_i = -\boldsymbol{v}_i + 2\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_i$ である. よって, $\boldsymbol{x} \in W_{-1}$ に対しても $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ が成り立つ. すなわちすべての $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ に対して B は恒等変換となり, よって $B = E$ が成り立つ. これより $A = E - 2(\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_1^* + \boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_2^* + \cdots + \boldsymbol{v}_s\boldsymbol{v}_s^*)$ が従う.

13.5 問題

$\mathbb{R}^3$ の中の m 点 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ が与えられているとする．$\boldsymbol{x}_i$ から直線 ℓ への距離を d_i と置くとき, 距離の 2 乗和 $\delta = d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_m^2$ を最小にするような直線 ℓ は, 次のように求められることが知られている．m 点の平均 $\bar{\boldsymbol{x}} = (1/m)\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x}_i$ をとり, $\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{x}_i - \bar{\boldsymbol{x}}$ と置く．3 次の対称行列を $T = \boldsymbol{y}_1{}^t\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2{}^t\boldsymbol{y}_2 + \cdots + \boldsymbol{y}_m{}^t\boldsymbol{y}_m$ で定義する (各 $\boldsymbol{y}_i$ を列ベクトルと見ている)．いま T の最大固有値に対する (任意の) 固有ベクトルを $\boldsymbol{a}$ とするとき, 求める直線 ℓ は, t をパラメータとして $\bar{\boldsymbol{x}} + t\boldsymbol{a}$ で与えられる．このことを既知として, 以下の問に答えよ．$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ からの距離の 2 乗和 δ が最小となるような直線と, そのときの δ の値を求めよ．

(解答)　平均 $\bar{\boldsymbol{x}}$ は $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる．したがって, $\boldsymbol{y}_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}_4 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ である．これより, 対称行列 T を求めると $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ となる．この対称行列の固有多項式は $(\lambda - 1/4)(\lambda - 1)^2$ となるので, 固有値は 1/4 および 1 である．よって, 最大固有値は 1 であり, その固有空間を求めると $a + b + c = 0$ を満たすベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ 全体である (すなわち固有空間は 2 次元)．よって, そのような固有ベクトルを用いて, $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ と表される直線はいずれも, 距離の 2 乗和 δ を最小にする直線 ℓ である．実際に δ を求めてみよう．上に求めた固有ベクトルで, 長さが 1 のものを $\boldsymbol{e}$ とする．すなわち $a + b + c = 0$ かつ $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ である．このとき, 直線 ℓ 上の $\bar{\boldsymbol{x}}$ を始点とする $\boldsymbol{x}_i$ の位置ベクトル $\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{x}_i - \bar{\boldsymbol{x}}$ の, 直線 ℓ への射影は, $\langle \boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{e} \rangle \boldsymbol{e}$ で与えられる．よって, $\boldsymbol{x}_i$ から直線 ℓ への距離 d_i は, $\|\boldsymbol{y}_i - \langle \boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{e} \rangle \boldsymbol{e}\|$ で求めることができる．これの 2 乗を, $i = 1, 2, 3, 4$ について計算して, 足し合わせたものが δ である．実際に計算してみると, $a + b + c = 0$ と $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ を用いて, 距離の 2 乗はそれぞれ, 3/16, $11/16 - a^2$, $11/16 - b^2$, $11/16 - c^2$ となる．これらを足し

た $\delta = 5/4$ が求める答えである.