

## 2007年度 計算数学 I レポート課題

1. 単純型付きラムダ計算に対する自然意味論は既知とする. これに直積型を加えたシステムの, 自然意味論に対する実行時安全性を証明したい. 値  $V$  の定義としては,

$$V ::= c \mid \text{cls}(\lambda x^\sigma.M, E) \mid (V, V, \dots, V) \mid \text{wrong}$$

を用いる. 推論規則としては新たに,

$$\frac{E \vdash M_1 \Downarrow V_1 \quad E \vdash M_2 \Downarrow V_2 \quad \dots \quad E \vdash M_n \Downarrow V_n}{E \vdash (M_1, M_2, \dots, M_n) \Downarrow (V_1, V_2, \dots, V_n)}$$

$$\frac{E \vdash M \Downarrow (V_1, V_2, \dots, V_n)}{E \vdash M \cdot i \Downarrow V_i}$$

を付け加える. ただし,  $\text{wrong}$  に関する規則は省略してある.

(i)  $\text{wrong}$  に関する推論規則を適切に与えよ.

(ii) 次の実行時安全性を証明せよ. 自由変数を持たない項  $M$  に対して,  $\triangleright M : \sigma$  かつ  $M \Downarrow V$  ならば,  $V \neq \text{wrong}$  である.

2.  $M \Rightarrow M'$  で, 型なしラムダ計算の Church-Rosser 性の証明で用いられた parallel reduction を表す. その証明の途中で用いられた次の補題を証明せよ.

$M \Rightarrow M'$  かつ  $N \Rightarrow N'$  とするとき,  $M[N/x] \Rightarrow M'[N'/x]$  が成り立つ.

代入  $M[N/x]$  において変数名のバッティングが起きる可能性に注意して, 正しく処理せよ. ちなみに,  $(\lambda y.M)[N/x]$  は,  $\lambda v.M[v/y][N/x]$  で定義される. 記号  $FV(M)$  で  $M$  の中に現れる自由変数の集合を表すことにすると, ここで  $v$  は  $FV(\lambda y.M) \cup FV(N)$  に属さない任意の変数である.