EXPOSÉ DE MAGISTÈRE :
FORMULE DE FEYNMAN-KAC

Raphal Ponge

30 septembre 1994

Introduction

Soit une particule de masse m soumise au potentiel V. Son opérateur hamiltonien est :

$$H = \frac{-\hbar^2}{2m}\Delta + V.$$

On sait grâce à l'équation de Schrdinger que si φ est la fonction d'onde de la particule à l'instant initial, alors sa fonction d'onde à l'instant t est :

$$\varphi_t(x) = (e^{\frac{-it}{\hbar}H}\varphi)(x).$$

Dans sa thèse, Richard Feynman montre heuristiquement l'existence d'une probabilité $d\omega$ sur l'espace Ω_x des trajectoires continues qui ont la position x à l'instant $t = 0$, de telle sorte qu'on ait :

$$(e^{\frac{-it}{\hbar}}H\varphi)(x) = \int_{\Omega_x} e^{\frac{i}{\hbar}S_t(\omega)}d\omega,$$

o $S_t(\omega)$ est l'action de la trajectoire ω à l'instant t :

$$S_t(\omega) = \int_0^t \left(\frac{1}{2m}|\nabla V(\omega(s))|^2 + V(\omega(s))\right) ds.$$

Utilisant la méthode de la phase stationnaire, on voit que lorsque $\hbar \to 0$, les seules trajectoires qui comptent sont celles dont l'action est stationnaire. A la limite semi-classique, on retrouverait alors le principe de moindre action.

En dépit de nombreux efforts, on a toujours pas pu démontrer rigoureusement la formule de Feynman. Néanmoins, grâce à la mesure de Wiener, on peut exprimer $e^{-t/\hbar H}$ au moyen d'une intégrale fonctionnelle ; c'est la formule de Feynman-Kac.

La mesure de Wiener est en fait une famille de probabilités $(\mu_x)_{x\in\mathbb{R}^N}$ sur l'espace Ω des fonctions de $[0,\infty)$ à valeurs dans $\dot{\mathbb{R}}^N$, le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{R}^N$, mais grâce au théorème de Wiener, chaque μ_x est concentrée sur l'espace Ω_x, des fonctions continues de $[0,\infty)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ prennant la valeur x en 0. On démontre l'existence de la mesure de Wiener et la continuité des trajectoires section 2. A la section 3 on démontre la formule de Feynman-Kac. Le point de départ de la démonstration est la formule de Trotter qu'on démontre section 1 après avoir dit des généralités sur les opérateurs semi-bornés.

1 Formule de Trotter

1.1 Opérateurs non bornés

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable. On appelle *opérateur (non borné)* de $\mathcal{H}$ la donnée d'un sous espace vectoriel $D(A)$ de $\mathcal{H}$ et d'une application linéaire $A : D(A) \to \mathcal{H}$. Ceci est équivalent à la donnée du *graphe* de A :

$$G(A) = \{(x, Ty) \; ; \; y \in D(A)\},$$

qui est un sous espace de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ tel que la projection de $G(A)$ dans $\mathcal{H}$ $(x,y) \mapsto x$ est injective.

Si A et B sont des opérateurs de $\mathcal{H}$, on définit $A+B$ comme l'opérateur de domaine $D(A+B) = D(A) \cap D(B)$ tel que :

$$(A+B)x = Ax + Bx \qquad \forall x \in D(A) \cap D(B).$$

On dit que l'opérateur A est *densément défini* si $D(A)$ est dense dans $\mathcal{H}$. Dans ce cas le sous espace :

$$\{(y,z) \; ; \; \langle x|y\rangle = \langle Tx|z\rangle \quad \forall x \in D(A)\},$$

est le graphe d'un opérateur. On dit que cet opérateur est l'*adjoint* de A et on le note A^*.

On dit que l'opérateur A est *auto-adjoint* si on a $A = A^*$. Dans ce cas :

$$\operatorname{Sp} A = \{\lambda \in \mathbb{C} \; ; \; T - \lambda \text{n'est pas bijectif de } D(A) \text{ dans } \mathcal{H}\},$$

est un fermé inclus dans $\mathbb{R}$. On dit alors que A est *positif* si $\operatorname{Sp} T$ est inclus dans $[0,\infty[$, et qu'il est *semi-borné* s'il existe $c > 0$ tel que l'opérateur $A + c$ soit positif.

Si l'opérateur A est auto-adjoint, le théorème spectral affirme alors qu'il existe un espace localement compact X, une mesure de Radon μ sur X, un opérateur unitaire U de $\mathcal{H}$ dans $L^2(X,\mu)$ et une fonction continue à valeurs réelles f sur X de telle sorte que UAU^* soit l'opérateur de multiplication par f sur $L^2(X,\mu)$, i.e. :

$$D(UAU^*) = D(f) = \{g \in L^2(X,\mu) \; ; \; fg \in L^2(X,\mu)\},$$

$$(UTU^*)g = fg \qquad \forall g \in D(f).$$

En particulier $\operatorname{Sp} A = f(X)$. On peut alors définir un calcul fonctionnel pour A à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$: à toute fonction g dans l'algébre $\mathcal{B}^\infty(\operatorname{Sp} A)$ des fonctions boréliennes bornées sur $\operatorname{Sp} A$ on asocie l'opérateur borne' $g(A)$ de $\mathcal{H}$ tel que :

$$g(A)x = U^*(gof.Ux) \qquad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Ce calcul fonctionnel est un morphisme d'algèbres qui est continu au sens suivant : si (g_n) est une suite d'élèments de $\mathcal{B}^\infty(\operatorname{Sp} A)$ convergeant simplement vers $g \in \mathcal{B}^\infty(\operatorname{Sp} A)$, alors les opérateurs $g_n(A)$ convergent fortement vers $g(A)$.

1.2 Formule de Trotter

Si A est un opérateur semi-borné, on peut définir e^{-tA} pour tout $t \geq 0$. On obtient alors un semi groupe à 1-paramétre qui vérifie les propriètés suivantes :

i) $e^{-(s+t)A} = e^{-sA}e^{-tA}$ pour tout s et t dans $[0, \infty[$;

ii) $\|e^{-tA}\| \leq e^{-at} \quad \forall t \geq 0$, avec $a = \inf \operatorname{Sp} A$;

iii) pour tout $x \in \mathcal{H}$, l'application $t \mapsto e^{-tA}x$ est continue de $[0, \infty[$ dans $\mathcal{H}$ et son image est incluse dans $D(A)$;

iv) pour tout $x \in D(A)$, l'application $t \mapsto e^{-tA}x$ est dérivable, et on a :

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{e^{-tA}x - x}{t} = -Ax.$$

La formule de Trotter peut s'énoncer comme suit :

Théorème 1 *Soit A et B des opérateurs semi-bornés tels que l'opérateur $A + B$ soit semi boné. Alors :*

$$\lim_{n \to \infty} (e^{-\frac{tA}{n}} e^{-\frac{tB}{n}})^n x = e^{-t(A+B)}x \qquad \forall x \in \mathcal{H},\ \forall t \geq 0.$$

Démonstration. On peut supposer que $t = 1$. Soit $x \in \mathcal{H}$. On a :

$$\begin{aligned}
&\|e^{-(A+B)}x - (e^{-\frac{A}{n}} e^{-\frac{B}{n}})^n x\| \\
&\quad \leq \sum_{k=1}^{n} \|(e^{-\frac{A}{n}} e^{-\frac{B}{n}})^{k-1} (e^{-\frac{A}{n}} e^{-\frac{B}{n}} - e^{-\frac{A+B}{n}}) e^{-\frac{n-k}{n}(A+B)} x\|, \\
&\quad \leq \sum_{k=1}^{n} (\|e^{-A}\| \|e^{-B}\|)^{\frac{k-1}{n}} \|(e^{-\frac{A}{n}} e^{-\frac{B}{n}} - e^{-\frac{A+B}{n}}) e^{-\frac{n-k}{n}(A+B)} x\|, \\
&\quad \leq \max(1, \|e^{-A}\| \|e^{-B}\|). \sup_{0 \leq s \leq 1} \|n(e^{-\frac{A}{n}} e^{-\frac{B}{n}} - e^{-\frac{A+B}{n}}) e^{-s(A+B)} x\|.
\end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $y \in D(A+B)$, on a :

$$n(e^{-\frac{A}{n}}e^{-\frac{B}{n}} - e^{-\frac{A+B}{n}})y$$
$$= e^{-\frac{A}{n}}By \;+\; e^{-\frac{A}{n}}(\frac{e^{-\frac{B}{n}}y - y}{1/n} - By) \;+\; \frac{e^{-\frac{A}{n}}y - y}{1/n} \;-\; \frac{e^{-\frac{A+B}{n}}y - y}{1/n}.$$

D'o :

$$\lim_{n\to\infty} = By + 0 + Ay - (A+B)y = 0.$$

Maintenant, $G(A+B) = G((A+B)^*)$ étant fermé dans $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ on munit $D(A+B)$ d'une structure d'espace de Banach grâce à la norme-graphe :

$$\|y\|_{A+B} = \|y\| + \|(A+B)y\| \qquad \forall y \in D(A+B).$$

Pour cette norme les opérateurs $n(e^{-\frac{A}{n}}e^{-\frac{B}{n}} - e^{-\frac{A+B}{n}})$ $(n \geq 1)$ forment une suite d'opérateurs continus de $D(A+B)$ dans $\mathcal{H}$ convergeant simplement vers 0. Par le théorème de Banach-Steinhaus il existe alors une constante $C > 0$ telle qu'on ait :

$$\|n(e^{-\frac{A}{n}}e^{-\frac{B}{n}} - e^{-\frac{A+B}{n}})y\| \leq C\|y\|_{A+B} \qquad \forall y \in D(A+B).$$

On voit ainsi que la convergence est uniforme sur tout compact de $D(A+B)$. Mais l'application $s \mapsto e^{-s(A+B)}x$ étant continue de $[0,\infty[$ dans $D(A+B)$, l'ensemble :

$$\{e^{-sA}x \; ; \; 0 \leq s \leq 1\},$$

est un compact de $D(A+B)$. Par conséquent :

$$\sup_{0\leq s\leq 1} \|n(e^{-\frac{A}{n}}e^{-\frac{B}{n}} - e^{-\frac{A+B}{n}})e^{-s(A+B)}x\| \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } n \to \infty.$$

Il en résulte que $\lim_{n\to\infty}(e^{-\frac{A}{n}}e^{-\frac{B}{n}})^n x = e^{-(A+B)}x$. $\square$

Remarque. Ceci n'est qu'une version faible de la formule de Trotter. La véritable formule de Trotter se démontre dans le cas o l'opérateur $A+B$ n'ést plus supposé auto-adjoint, mais seulement essentiellement auto-adjoint (i.e. que $G(A+B)$ est un sous-ensemble dense de $G((A+B)^*)$. En fait, Kato a démontré la formule de Trotter dans le cas o les opérateurs ne sont plus supposés densément définis, mais positifs au sens o $\langle Ax|x\rangle \in \mathbb{R}^+ \quad \forall x \in D(A)$.

Supposons maintenant que $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^N)$ et appliquons la formule de Trotter à l'opérateur de Schrdinger $H = H_0 + V$, o $V \in C_c(\mathbb{R}^N)$ agit par multiplication et $H_0 = -\Delta$ est l'opposé du laplacien sur $\mathbb{R}^N$ et est défini sur :

$$D(H_0) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^N) \; ; \; \Delta f \in L^2(\mathbb{R}^N) \text{ au sens des distributions}\}.$$

La formule de Trotter peut s'appliquer et on obtient :

$$e^{-t(H_0+V)}f = \lim_{n\to\infty}(e^{-\frac{t}{n}H_0}e^{-\frac{t}{n}V})^n f \qquad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^N),\ \forall t \geq 0.$$

La convergence étant dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, il existe une sous-suite $(n_k) \subset \mathbb{N}$ telle que :

$$(e^{-t(H_0+V)}f)(x_0) = \lim_{k\to\infty}((e^{-\frac{t}{n_k}H_0}e^{-\frac{t}{n_k}V})^{n_k}f)(x_0) \qquad \text{p.p.}$$

D'autre part, l'opérateur e^{-tH_0} ayant pour noyau :

$$p(x,y;t) = \begin{cases} (4\pi t)^{\frac{-N}{2}}\exp(-\frac{\|x-y\|^2}{4t}) & \text{si } t>0, \\ \delta_0(x-y) & \text{sinon,} \end{cases}$$

on a :

$$\begin{aligned}(e^{-\frac{t}{n}H_0}e^{-\frac{t}{n}V})^n f(x_0) &= \int\dots\int \exp\left(-\frac{t}{n}\sum_{j=1}^{n}V(x_j)\right)f(x_n) \\ &\qquad p(x_0,x_1;\frac{t}{n})\dots p(x_{n-1},x_n;\frac{t}{n})dx_1\dots dx_n.\end{aligned}$$

Maintenant, soit $x_1,\dots,x_n$ dans $\mathbb{R}^N$ et soit ω une trajectoire continue de $[0,\infty[$ dans $\mathbb{R}^N$ de telle sorte que, $\omega(\frac{jt}{n}) = x_j$ et que ω soit affine sur l'intervalle $[\frac{jt}{n},\frac{(j+1)t}{n}]$ pour tout $j=0,1,\dots,n-1$. Alors, la somme :

$$\frac{t}{n}\sum_{j=1}^{n}V(x_j)) = \frac{t}{n}\sum_{j=1}^{n}V(\omega(\frac{jt}{n})),$$

est une somme de Riemman, qui lorsque n devient infini, tend vers :

$$\int_0^t V(\omega(s))ds.$$

De plus, on peut interpréter la probabilité :

$$p(x_0,x_1;\frac{t}{n})p(x_1,x_2;\frac{t}{n})\dots p(x_{n-1},x_n;\frac{t}{n})dx_1\dots dx_n,$$

comme une probabilité sur toutes les trajectoires qui à n fixé ont la mme forme que ω ci-dessus. Mais lorsque n devient grand les trajectoires continues ont tendance à tre toutes de cette forme. Intuitivement, on devrait obtenir une probabilité $d\omega$ sur l'espace toutes les trajectoires continues partant de x_0, et de telle sorte qu'on aurait :

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\int\dots\int e^{-\frac{t}{n}\sum_{j=1}^{n}V(x_j)}f(x_n)p(x_0,x_1;\frac{t}{n})\dots p(x_{n-1},x_n;\frac{t}{n})dx_1\dots dx_n \\ &= \int e^{-\int_0^t V(\omega(s))ds}f(\omega(t))d\omega.\end{aligned}$$

Il en résulterait alors la formule :

$$(e^{-t(H_0+V)}f)(x_0) = \int \exp(-\int_0^t V(\omega(s))ds)f(\omega(t))d\omega.$$

Cette probabilité c'est la mesure de Wiener, et la formule, la formule de Feynman-Kac.

2 La mesure de Wiener

Dans toute cette section on désigne par x_0 un èlèment de $\mathbb{R}^N$.

2.1 Construction de la mesure de Wiener

$x_0 \in \mathbb{R}^N$. Pour construire la mesure de Wiener il est commode d'introduire $\dot{\mathbb{R}}^N = \mathbb{R}^N \cup \{\infty\}$, le compactifié d'Alexendrov de $\mathbb{R}^N$, et $\Omega = \prod \dot{\mathbb{R}}^N$, le produit d'un nombre infini de copies de $\dot{\mathbb{R}}^N$ indexées par $[0, \infty[$, c.a.d. l'ensemble de toutes les applications ω de $[0, \infty[$ dans $\dot{\mathbb{R}}^N$. On munit Ω de la topologie produit, qui est la topologie la moins fine rendant continue les projections $\omega \mapsto \omega(t)$ $(t \geq 0)$. Par le théorème de Tichonoff, Ω est un espace compact. Il résulte alors théorème de Riesz que toute mesure borélienne finie sur Ω correspond alors à une forme linéaire positive sur $C(\Omega)$.

Maintenant soit φ une fonction continue sur Ω de la forme :

$$\varphi(\omega) = F(\omega(t_1), \dots, \omega(t_n)) \qquad \forall \omega \in \Omega,$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ et $F \in C((\dot{\mathbb{R}}^N)^n)$. Utilisant la propriété de semi-groupe :

$$\int p(x, y; s)p(y, z; t)dy \ = \ p(x, z; s+t) \qquad \forall (x, z) \in (\mathbb{R}^N)^2, \ \forall (s, t) \in (R_+)^2,$$

on montre que la valeur de l'intégrale :

$$\int \cdots \int F(x_1, \dots, x_n)p(x_0, x_1; t) \dots p(x_{n-1}, x_n; t)dx_1 \dots dx_n,$$

ne dépend que de φ. On note cette valeur $L_{x_0}(\varphi)$. On définit de cette faon une forme linéaire sur l'espace $C_{\text{fin}}(\Omega)$ des fonctions continues sur Ω qui sont de la forme ci-dessus pour n arbitraire. Par construction L_{x_0} est une forme linéaire positive telle que $L_{x_0}(1) = 1$, donc c'est une forme linéaire sur $C_{\text{fin}}(\Omega)$ qui est continue pour la norme de $C(\Omega)$ et dont la norme d'opérateur est égale à 1.

D'autre part $C_{\text{fin}}(\Omega)$ est une sous algèbre unitale de $C(\Omega)$ qui sépare les points. Par le théorème de Stone-Weierstrass elle est dense dans $C(\Omega)$ et on peut alors prolonger L_{x_0} par continuité en une forme linéaire sur $C(\Omega)$ qui est positive et de norme égale à 1. Le théorème de Riesz permet ensuite de représenter L_{x_0} par une probabilité sur Ω définie sur les boréliens. On note cette mesure μ_{x_0} : c'est la mesure de Wiener.

Par exemple, si $B_1, \ldots, B_n$ sont des boréliens de $\mathbb{R}^N$ et si $0 < t_1 < \ldots < t_n$, alors :

$$\begin{aligned} &\mu_{x_0}(\{\omega\ ;\ \omega(t_j) \in B_j \text{ pour } j = 1, \ldots, n\}) \\ &\quad = \int_{B_1} \cdots \int_{B_n} p(x_0, x_1; t) \ldots p(x_{n-1}, x_n; t) dx_1 \ldots dx_n. \end{aligned}$$

En particulier, on a :

$$\mu_{x_0}(\{\omega;\ \omega(0) = x_0\}) = 1.$$

2.2 Continuité des trajectoires

La propriété fondamentale de la mesure de Wiener c'est qu'elle est portée par les trajectoires continues qui sont à valeur dans $\mathbb{R}^N$. Il s'agit du théorème de Wiener. Pour le démontrer on introduit la notation :

$$\rho_\epsilon(\delta) = \sup_{t \leq \delta} \int_{|x-y|>\epsilon} p(x, y; t) dy \qquad \delta > 0,\ \epsilon > 0.$$

Cela ne dépend pas de $x \in \mathbb{R}^N$. Si $t \in]0, \delta[$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{|x-y|>\epsilon} p(x, y; t) dy &= \pi^{-N/2} \int_{|x-y|>\epsilon/2t^{1/2}} e^{-|y|^2} dy, \\ &\leq e^{-\epsilon/4t^{1/2}} \pi^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|y|^2}{2}} dy, \\ &\leq e^{\delta/4\delta^{1/2}} 2^{N/2}. \end{aligned}$$

D'o on déduit que :

$$\lim_{\delta \to 0^+} \frac{1}{\delta} \rho_\epsilon(\delta) = 0 \qquad \forall \epsilon > 0.$$

Lemme 1 *Soit $\delta > 0$, $\epsilon > 0$, et $0 < t_1 < \ldots < t_n$ avec $t_n - t_1 < \delta$. Alors :*

$$\mu_{x_0}\left(\bigcup_{1 \leq j,k \leq n} \{\omega\ ;\ |\omega(t_j) - \omega(t_k)| > 2\epsilon\} \right) \leq 2\rho_{\epsilon/2}(\delta).$$

Démonstration. On pose :

$$A = \bigcup_{1 \leq j,k \leq n} \{\omega\ ;\ |\omega(t_j) - \omega(t_k)| > 2\epsilon\},$$

$$B = \{\omega\ ;\ |\omega(t_1) - \omega(t_n)| > \epsilon/2\}.$$

Pour $j = 1, \dots, n$ on pose :

$$\Gamma_j = \{\omega\ ;\ |\omega(t_j) - \omega(t_n)| > \epsilon/2\},$$

$$\Delta_j = \{\omega\ ;\ |\omega(t_1) - \omega(t_j)| > \epsilon/2 \text{ et } |\omega(t_1) - \omega(t_k)| \leq \epsilon \text{ si } k < j\}.$$

Soit $\omega \in A$. Il existe des indices j et k tels que $|\omega(t_j) - \omega(t_k)| > 2\epsilon$. Comme on a :

$$\begin{aligned} \max\{|\omega(t_1) - \omega(t_j)|, |\omega(t_1) - \omega(t_k)|\} &\geq \frac{1}{2}(|\omega(t_1) - \omega(t_j)| + |\omega(t_1) - \omega(t_k)|, \\ &> \epsilon, \end{aligned}$$

il existe au moins un indice l tel que $|\omega(t_1) - \omega(t_l)| > \epsilon$. Soit p le plus petit petit de ces indices. Par définition $\omega \in \Delta_p$. Mais si $\omega \notin B$, alors $|\omega(t_1) - \omega(t_n)| \leq \epsilon/2$, et on a :

$$\begin{aligned} |\omega(t_p) - \omega(t_n)| &\geq |\omega(t_p) - \omega(t_1)| - |\omega(t_1) - \omega(t_n)|, \\ &> \epsilon/2, \end{aligned}$$

i.e. $\omega \in \Gamma_p$. On en déduit que $\omega \in B \cup (\Gamma_p \cap \Delta_p)$. Il en résulte l'inclusion :

$$A \subset B \bigcup_{1 \leq j \leq n} (\Gamma_j \cap \Delta_j).$$

A fortiori :

$$\mu_{x_0}(A) \leq \mu_{x_0}(B) + \sum_{j=1}^{n} \mu_{x_0}(\Gamma_j \cap \Delta_j).$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \mu_{x_0}(B) &= \int\int_{|x-y|>\epsilon/2} p(x_0, x_1; t_1) p(x_1, x_n; t_n - t_1) dx_1 dx_n, \\ &= \int p(x_0, x_1; t_1) \left(\int_{|x-y|>\epsilon/2} p(x_1, x_n; t_n - t_1) dx_n \right) dx_1, \\ &\leq \rho_{\frac{\epsilon}{2}}(\delta). \end{aligned}$$

Puis, soit D_j la fonction telle que :

$$D_j(\omega(t_1), \dots, \omega(t_j)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in \Delta_j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors on a :

$$\begin{aligned} \mu_{x_0}(\Delta_j) &= \int \cdots \int D_j(x_1, \dots, x_j) p(x_0, x_1; t_1) \dots \\ &\quad \dots p(x_{j-1}, x_j; t_j - t_{j-1}) dx_1 \dots dx_j, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mu_{x_0}(\Gamma_j \cap \Delta_j) &= \int \dots \int_{|x_j - x_n| > \epsilon/2} D_j(x_1, \dots, x_j) p(x_j, x_n; t_n - t_j) \\
&\quad p(x_0, x_1; t_1) \dots p(x_{j-1}, x_j; t_j - t_{j-1}) dx_1 \dots dx_j dx_n, \\
&\leq \rho_{\frac{\epsilon}{2}}(\delta) \mu_{x_0}(\Delta_j).
\end{aligned}
$$

Mais les Δ_j sont disjoints 2 à 2, donc :

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \mu_{x_0}(\Gamma_j \cap \Delta_j) &\leq \rho_{\frac{\epsilon}{2}}(\delta) \sum_{j=1}^{n} \mu_{x_0}(\Delta_j), \\
&\leq \rho_{\frac{\epsilon}{2}}(\delta).
\end{aligned}
$$

D'o $\mu_{x_0}(A) \leq \mu_{x_0}(B) + \sum_{j=1}^{n} \mu_{x_0}(\Gamma_j \cap \Delta_j) \leq 2\rho_{\frac{\epsilon}{2}}(\delta)$. □

L'idée qui est derrière la démonstration du lemme, c'est que la trajectoire n'a pas de mémoire : le passé (ω est dans Δ_j) n'a aucune influence sur le présent (ω est dans Γ_j).

Lemme 2 *Soit* $\delta > 0$, $\epsilon > 0$, $0 \leq a < b$ *avec* $b - a \leq \delta$, *et soit :*

$$E_{a,b,\epsilon,\delta} = \{\omega \ ; \ \exists (s,t) \in [a,b]^2, \ |\omega(s) - \omega(t)| > 2\epsilon\}.$$

Alors :

$$\mu_{x_0}(E_{a,b,\epsilon,\delta}) \leq 2\rho_{\frac{\epsilon}{2}}(\delta).$$

Démonstration. Notons Σ l'ensemble de toutes les parties finies de l'intervalle $[a,b]$. Pour $S \in \Sigma$ on pose :

$$O_S = \{\omega \ ; \ \exists (s,t) \in S^2, \ |\omega(s) - \omega(t)| > 2\epsilon\}.$$

La famille $(O_S)_{S \in \Sigma}$ est une famille d'ouverts de Ω dont la réunion est $E_{a,b,\epsilon,\delta}$.

D'autre part, μ_{x_0} est une mesure borélienne finie sur l'espace compact Ω, donc elle est régulière et on a :

$$\mu_{x_0}(E_{a,b,\epsilon,\delta}) = \sup\{\mu_{x_0}(K); \ K \text{ compact inclus dans } E_{a,b,\epsilon,\delta}\}.$$

Maintenant, si K est un compact inclus dans $E_{a,b,\epsilon,\delta}$, alors il est contenu dans la réunion des O_S, et par compacité il existe $\Sigma' \subset \Sigma$ finie telle que :

$$K \subset \bigcup_{S \in \Sigma'} O_S.$$

Mais une réunion finie de parties finies est une partie finie, donc :

$$S_0 = \cup_{S \in \Sigma'} S,$$

est une partie fine de $[a,b]$, de telle sorte que O_{S_0} contienne K. Or le lemme 1 dit que $\mu_{x_0}(O_{S_0}) \leq 2\rho_{\frac{\epsilon}{2}}(\delta)$, donc $\mu_{x_0}(K) \leq 2\rho_{\frac{\epsilon}{2}}(\delta)$, et a fortiori, $\mu_{x_0}(E_{a,b,\epsilon,\delta}) \leq 2\rho_{\frac{\epsilon}{2}}(\delta)$. □

Ce lemme 2 exprime que la probabilité pour qu'on ait une variationde 2ϵ sur un intervalle donné de longueur δ est un $o(\delta)$. Il en résulte que la probabilité pour qu'on ait une variation de 2ϵ sur un intervalle donné est un $o(1)$. C'est ce que dit le lemme suivant :

Lemme 3 *Soit $k \in \mathbb{N}, \delta > 0,\ \epsilon > 0$ et soit :*

$$\Phi_{k,\epsilon,\delta} = \{\omega\ ;\ \exists (s,t) \in [O,k]^2,\ |s-t| \leq \delta \text{ et } |\omega(s) - \omega(t)| > 4\epsilon\}.$$

Alors :

$$\mu_{x_0}(\Phi_{k,\epsilon,\delta}) \leq 2(1 + \frac{k}{\delta})\rho_{\frac{\epsilon}{2}}(\delta).$$

Démonstration. Pour $j \leq k/\delta$ on pose $a_j = j\delta$. Soit $\omega \in \Phi_{k,\epsilon,\delta}$. Il existe s et t dans $[0,k]$ tels que $s \leq t \leq s + \delta$ et $|\omega(s) - \omega(t)| > 4\epsilon$. Soit j la partie entière de t/δ. On a $t \in [a_j, a_{j+1}]$ et $s \in [a_{j-1}, a_{j+1}]$. Comme $|\omega(s) - \omega(t)| > 4\epsilon$, on a soit $|\omega(s) - \omega(a_j)| > 2\epsilon$, soit $|\omega(t) - \omega(a_j)| > 2\epsilon$. D'o, avec les notations du lemme 2 $\omega \in E_{a_{j-1},a_j,\epsilon,\delta} \cup E_{a_j,a_{j+1},\epsilon,\delta}$. On a ainsi montré que :

$$\Phi_{k,\epsilon,\delta} \subset \bigcup_{0 \leq j \leq k/\delta} E_{a_j,a_{j+1},\epsilon,\delta}.$$

Mais par le lemme 2 on a $\mu_{x_0}(E_{a_j,a_{j+1},\epsilon,\delta}) \leq 2\rho_{\frac{\epsilon}{2}}(\delta)$ pour tout j, donc $\mu_{x_0}(\Phi_{k,\epsilon,\delta}) \leq 2(1 + \frac{k}{\delta})\rho_{\frac{\epsilon}{2}}(\delta)$. □

Théorème 2 (Wiener) *Soit Ω_0 le sous ensemble de Ω formé des fonctions continues qui sont à valeurs dans $\mathbb{R}^N$. Alors Ω_0 est un borélien de Ω, et on a :*

$$\mu_{x_0}(\Omega_0) = 1.$$

Démonstration. On a :

$$\Omega_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{p=1}^{\infty} \bigcup_{q=1}^{\infty} \{\omega\ ;\ \forall (s,t) \in [0,k]^2,\ |s-t| < 1/q \Rightarrow |\omega(s) - \omega(t)| \leq 1/p\}.$$

Ceci exprime le fait qu'une fonction est continue sur $[0,\infty[$ si, et seulement si, elle est uniformément continue sur chacun des intervalles $[0,k]$. En particulier, Ω_0 est un borélien et avec les notations du lemme 3 on a :

$$\Omega \setminus \Omega_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{p=1}^{\infty} \bigcap_{q=1}^{\infty} \Phi_{k,1/p,1/q}.$$

Comme une réunion dénombrable d'ensemble de mesure nulle est de mesure nulle, il nous suffit de montrer que :

$$\lim_{q\to\infty} \mu_{x_0}(\Phi_{k,1/p,1/q}) = 0 \qquad \forall (k,p) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*.$$

Or, c'est justement ce qu'affirme le lemme 3. $\square$

Remarque. On peut démontrer un résultat encore plus fort : soit $\alpha > 0$ et soit Ω_α l'espace formé des $\omega \in \Omega$ qui sont hlderiennes d'exposant α, i.e. :

$$\exists C > 0 \text{ tel que } \forall (s,t) \in [0,\infty]^2 \; |\omega(s) - \omega(t)| \le C|s-t|^\alpha.$$

Alors on a :

$$\mu_{x_0}(\Omega_\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3 La formule de Feynman-Kac

Théorème 3 (Feynman-Kac) *Soit V une fonction continue sur $\mathbb{R}^N$ à valeurs réelle et qui s'annulle à l'infini. Alors, pour tout $t \ge 0$ et $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, on a :*

$$(e^{-t(H_0+V)}f)(x_0) = \int_{\Omega_0} \exp\left(-\int_0^t V(\omega(s))ds\right) f(\omega(t))d\mu_{x_0}(\omega) \qquad \text{p.p.}$$

Démonstration. On sait déjà qu'il existe une sous suite $(n_k) \subset \mathbb{N}$ telle que :

$$(e^{-t(H_0+V)})f(x_0) = \lim_{k\to\infty}((e^{-\frac{t}{n_k}H_0}e^{-\frac{t}{n_k}V})^{n_k}f)(x_0) \qquad \text{p.p.}$$

Fixons $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Comme V se prolonge en une fonction continue sur $\dot{\mathbb{R}}^N$, on a :

$$\begin{aligned} ((e^{-\frac{t}{n}H_0}e^{-\frac{t}{n}V})^n f)(x_0) &= \int \dots \int \exp\left(-\frac{t}{n}\sum_{j=1}^n V(x_j)\right) f(x_n) \\ &\qquad p(x_0,x_1;\frac{t}{n})\dots p(x_{n-1},x_n;\frac{t}{n})dx_1\dots dx_n, \\ &= \int_{\Omega_0} \exp\left(-\frac{t}{n}\sum_{j=1}^n V(\omega(\frac{jt}{n}))\right) f(\omega(t))d\mu_{x_0}(\omega). \end{aligned}$$

Maintenant, pour tout $\omega \in \Omega_0$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \exp\left(-\frac{t}{n}\sum_{j=1}^n V(\omega(\frac{jt}{n}))\right) f(\omega(t)) = \exp(-\int_0^t V(\omega(s))ds)f(\omega(t)).$$

De plus :

$$\left|\exp\left(-\frac{t}{n}\sum_{j=1}^{n}V(\omega(\frac{jt}{n}))\right)f(\omega(t))\right| \leq e^{-t\sup|V|}|f(\omega(t))|.$$

Mais la fonction $e^{-t\sup|V|}|f(\omega(t))|$ est μ_{x_0}-intégarable sur Ω_0, car on a :

$$\begin{aligned} e^{-t\sup|V|}\int_{\Omega_0}|f(\omega(t))|d\mu_{x_0}(\omega) &\leq e^{-t\sup|V|}(e^{-tH_0}|f|)(x_0), \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Par conséquent, le théorème de convergence dominée s'applique, et on obtient :

$$\lim_{n\to}\int_{\Omega_0}\exp\left(-\frac{t}{n}\sum_{j=1}^{n}V(\omega(\frac{jt}{n}))\right)f(\omega(t))d\mu_{x_0}(\omega)$$
$$= \int_{\Omega_0}\exp\left(-\int_0^t V(\omega(s))ds\right)f(\omega(t))d\mu_{x_0}(\omega).$$

Il en résulte que :

$$(e^{-t(H_0+V)}f)(x_0) = \int_{\Omega_0}\exp\left(-\int_0^t V(\omega(s))ds\right)f(\omega(t))d\mu_{x_0}(\omega) \qquad \text{p.p.}$$

$\square$

De la mme manière qu'on a construit la mesure μ_x, on peut construire, pour tout $y \in \mathbb{R}^N$ et $t > 0$, une probabilité conditionnelle $\mu_{x,y;t}$ sur Ω de telle sorte qu'on ait :

$$\int_{\Omega_O} f(\omega)d\mu_x(\omega) = \int\left(\int_{\Omega_O} f(\omega)d\mu_{x,y;t}(\omega)\right)dy \qquad \forall f \in C(\Omega).$$

Cette mesure est supportée par les trajectoires continues ω telles que $\omega(0) = x$ et $\omega(t) = y$. Par exemple, si $t_1 < t < t_2$ et F est une fonction continue sur $\mathbb{R}^N$, on a :

$$\int_{\Omega_0} F(\omega(t_1),\omega(t_2))d\mu_{x,y;t}(\omega)$$
$$= \int\int F(x_1,x_2)p(x,x_1;t_1)p(x_1,y;t-t_1)p(y,x_2;t_2-t)dx_1dx_2.$$

Grâce à cette probabilité conditionnelle, on peut exprimé le noyau $K_t(x,y)$ de $e^{-t(H_0+V)}$ au moyen d'une intégrale fonctionnelle :

$$K_t(x,y) = \int_{\Omega_0}\exp\left(-\int_0^t V(\omega(s))ds\right)d\mu_{x,y;t}(\omega).$$

Considérons maintenant une particule de masse m, soumise au potentiel V, à la température T. En mécanique statistique classique la fonction de partition qui lui est associée est :

$$Z_C = \int\int e^{-\beta(\frac{p^2}{2m}+V(x))} d^3p d^3x,$$

o $\beta = 1/kT$, k étant la constante de Boltzmann.

En mécanique statistique quantique, la fonction de partition est :

$$Z_Q(\hbar) = \text{Trace}\left(\exp(-\beta(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V))\right).$$

On voit que :

$$Z_Q(\hbar) = \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\Omega_0}\exp\left(\frac{-1}{\hbar}\int_0^\tau V(\omega(s))ds\right)d\mu_{x,x;\tau}(\omega)\right)dx,$$

o on a posé $\tau = \hbar\beta$. On montre alors que :

$$\lim_{\hbar\to 0} Z_Q(\hbar) = Z_C.$$

En d'autres termes, à la limite semi-classique, on retrouve la mécanique satistique classique.

Pour d'autres applications de la formule de Feynman-Kac on pourra consulter le livre de B. Simon.

References

[N] E. Nelson. *Feynmam Integral and the Schrdinger Equation.* J. Math. Phys. **5** (1964).

[RS] M. Reed et B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis, Selfadjointess.* Academic Press, 1975.

[S] B. Simon. *Functionnal Integration and Quantum Physics.* Pure and Aplied Mathematics, Academic Press, 1979.