Propriété de décroissance rapide pour le groupe de Wise

Sylvain Barré [a], Mikaël Pichot [b]

[a] *Université de Bretagne Sud, BP 573, Centre Yves Coppens, Campus de Tohannic, 56017 Vannes, France*
[b] *University of Tokyo, Department of Mathematical Sciences, 3-8-1 Komaba, Tokyo, 153-8914, Japan*

Reçu le ***** ; accepté après révision le +++++

Présenté par

Résumé

On montre que le groupe G de présentation

$$\langle a, b, c, s, t \mid c = ab = ba,\ c^2 = sas^{-1} = tbt^{-1} \rangle$$

(introduit par D. Wise) a la propriété de décroissance rapide de Haagerup-Jolissaint, et qu'il vérifie donc la conjecture de Baum-Connes. La démonstration repose sur l'étude de ses propriétés de rang intermédiaire (entre 1 et 2). On prouve que, bien que G soit de rang mésoscopique exponentiel et que ses plats bifurquent exponentiellement, son rang croit *polynomialement* relativement à une métrique des mots naturelle. Ceci entraîne la propriété de décroissance rapide. *Pour citer cet article : S. Barré, M. Pichot, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I *****.*

Abstract

Property RD for D. Wise's non Hopfian group. It is proved that D. Wise's non Hopfian group has Haagerup-Jolissaint's property RD and therefore that it satisfies the Baum-Connes conjecture.

For this we prove that this group, although being of exponential mesoscopic rank and having exponential branching of flats, has *polynomial* growth rank with respect to a natural word metric. This implies property RD. *To cite this article: S. Barré, M. Pichot, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I *****.*

Abridged English version

Consider the group G defined by the presentation

$$\langle a, b, c, s, t \mid c = ab = ba,\ c^2 = sas^{-1} = tbt^{-1} \rangle.$$

Email addresses: `sylvain.barre@univ.ubs.fr` (Sylvain Barré), `pichot@ms.u-tokyo.ac.jp` (Mikaël Pichot).

[1] The second author is supported by JSPS.

This group has been introduced by D. Wise in [6] who showed it was non Hopfian (and hence non residually finite). We let ℓ be the word length on G associated to the above presentation.

Recall that a countable group G is said to have *property RD* with respect to a length ℓ if there is a polynomial P such that for any $r \in \mathbf{R}_+$ and $f, g \in \mathbf{C}G$ with $\mathrm{supp}(f) \subset B_r$ one has

$$\|f * g\|_2 \leq P(r)\|f\|_2\|g\|_2$$

where $B_r = \{x \in G,\ \ell(x) \leq r\}$ is the ball of radius r in G, $\mathrm{supp}(f)$ is the set of $x \in G$ with $f(x) \neq 0$, and $\mathbf{C}G$ is the complex group algebra of G. (See [5] for an introduction to property RD.)

In this Note we prove the following theorem.

Theorem 1 *The Wise group has property RD with respect to the length ℓ.*

This answers Question 5.2 in [1]. As mentioned there the group G doesn't act on any cube complex, nor it is relatively hyperbolic. Also, being non residually finite, it is not isomorphic to a finitely generated subgroup of SL_3 over any field (by Malcev's theorem) and thus it fails to satisfy previously known criteria for property RD. In fact G was proposed as a possible counterexample to this property in Question 6.6 of [1]. It has been shown recently that groups acting properly on triangle polyhedra do have property RD (see [3]) but there is no obvious action of G satisfying this criterion.

The following result is a direct application of V. Lafforgue's theorem [4].

Corollary 2 *The Wise group G satisfies the Baum-Connes conjecture, i.e. the Baum-Connes assembly map*

$$\mu_r : K_*^{\mathrm{top}}(G) \to K_*(C_r^*(G))$$

is an isomorphism.

The main steps of the proof of Theorem 1, which relies on studying *intermediate growth rank* properties of G (see [3]), are sketched below. Complete proofs and further results will appear in [2], where we give an extensive description of the asymptotic intermediate rank behavior of G (and some other groups). In particular we prove the following theorem.

Theorem 3 *The Wise group has polynomial growth rank with respect to ℓ, although its Cayley complex (with respect to the above presentation) is a CAT(0) space of exponential mesoscopic rank.*

Polynomial growth rank and mesoscopic rank (see [3]) capture rank behaviors that are situated in between the classical (integer) values of the rank (i.e. 1 and 2 here). For a countable group, polynomial growth rank indicates "low" rank (i.e. relatively close to 1) and is far more specific than property RD. One can deduce Theorem 1 from Theorem 3 as in Section 2 of [3] (we should probably point out that the definition polynomial growth rank we are using above is slightly more general than the original one [3, Definition 16]). On the contrary exponential mesoscopic rank is a "higher rank" type behavior (still < 2; that the Wise group has the latter property was announced in [3]). In the Wise group, the branching of flats is polynomial as far as growth rank is concerned, but it is exponential when viewed from the CAT(0) perspective of flats. This is sharply contrasting with the case of triangle polyhedra where the two notions coincide by [3, Proposition 31]. This phenomenon can be explained by the presence of singularities within 'analytic hulls' along which triangles get reduced in the proof of Theorem 1.

1. Introduction

Le groupe de Wise G (voir [6]) est defini par la présentation

$$\langle a, b, c, s, t \mid c = ab = ba,\ c^2 = sas^{-1} = tbt^{-1}\rangle.$$

L'objet de cette note est de montrer que G, pour la métrique des mots ℓ correspondante (ou toute autre métrique des mots de type fini), a la propriété de décroissance rapide de Haagerup-Jolissaint. Ceci répond à [1, Question 5.2] et confirme la discussion concluant l'introduction de [3].

Théorème 1 *Le groupe de Wise G a la propriété de décroissance rapide.*

Ci-dessous nous expliquons les étapes principales de la preuve de ce résultat. Les preuves complètes seront présentées dans [2], où nous étudions in extenso le comportement de G du point de vue du rang asymptotique (au sens de [3]). Pour la propriété de décroissance rapide nous renvoyons à [5] et ses références.

Du théorème de Lafforgue [4] on déduit que le groupe de Wise vérifie la conjecture de Baum-Connes.

2. Étapes de la démonstration

Nous découpons la preuve en cinq parties.

2.1. *Propriétés du link.*

La présentation de G donnée ci-dessus détermine un complexe X à courbure négative (au sens CAT(0)) de dimension 2 et une action libre cocompacte de G avec une orbite de sommets. Le link L aux sommets de X est représenté sur la figure suivante.

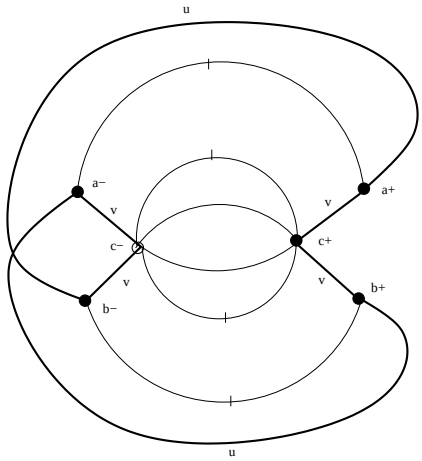

Fig. 1. Le link du groupe de Wise

On rappelle que le link en un sommet de X est le graphe métrique donnée par la trace sur X d'une sphère de petit rayon centrée en ce sommet, munie de la métrique angulaire. Les faces de X sont composées de triangles isocèles ayant deux côtés de longueur 1 et un de longueur $\frac{1}{2}$, et de carrés dont les côtés ont longueur 1. On note u et v les angles aux sommets des triangles, de sorte que $u + 2v = \pi$. Dans L la longueur des arêtes en gras est indiquée sur la Figure 1. Les autres arêtes ont longueur π. Les cycles (i.e. courbes fermées simples) de longueur 2π de L sont de trois sortes :

(1) le cycle gras, donné par le chemin $u + 2v + u + 2v$,

(2) les cycles mixtes, donnés par les chemins $u + 2v + \pi$,

(3) les cycles non gras, donnés par les chemins centraux de la forme $\pi + \pi$.

Le cycle gras correspond aux pavages du plan en triangles isocèles dans X. Les arêtes de longueur π viennent compléter ce cycle pour former le link tout entier. Notons que les cycles non gras se répartissent eux-mêmes en trois sous-catégories : le cycle de la forme $\pi+\pi$, les quatre cycles de la forme $(\pi/2+\pi/2)+\pi$, et le cycle de la forme $(\pi/2 + \pi/2) + (\pi/2 + \pi/2)$.

Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2 *Soient α, β deux points de L à distance $> \pi$. Alors α et β appartiennent à un cycle de L de longueur $2\pi + 2u$ ou de longueur $2\pi + 2v$. Ce cycle est alors l'unique plus petit cycle qui contient α et β.*

2.2. *Classification des chromosomes.*

Définition 3 *On appelle* bande *dans le revêtement universel X l'adhérence d'une composante connexe non bornée du complémentaire du lieu singulier.*

On voit que les bandes de X sont de largeur 1.

Lemme 4 *Dans X étant données deux bandes B_1 et B_2 il y a trois types d'intersections possibles :*

(i) soit B_1 et B_2 ont un bord commun,

(ii) soit B_1 et B_2 ont un unique sommet commun $A \in X$, et elles définissent dans le link en A un cycle de longueur $2\pi + 2u$,

(iii) soit B_1 et B_2 ont un unique sommet commun $A \in X$, et elles définissent dans le link en A un cycle de longueur $2\pi + 2v$,

On appelle *chromosome* de X la réunion de deux bandes d'intersection non vide. Un chromosome est dit respectivement *collé*, *de type u*, ou *de type v*, suivant les cas (i), (ii) et (iii) du Lemme 4 ci-dessus. Dans les cas (ii) et (iii) le point A est appelé *centromère*. Les trois types de chromosomes de X sont représentés sur la figure suivante (le troisième est de type u, les deux derniers de type v).

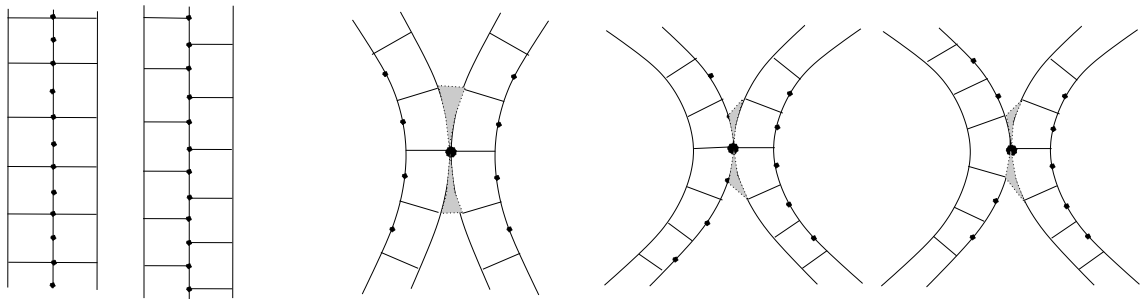

FIG. 2. Chromosomes collés, de type u, de type v

Soit γ un segment géodésique de X et soit B une bande. On dit que γ *rencontre* B s'il contient au moins un point intérieur à B. On dit que γ *rencontre successivement* deux bandes B_1 et B_2 de X si γ rencontre B_1 et B_2 et si l'intérieur de toute autre bande B de X, $B \neq B_1$, $B \neq B_2$, est disjoint du sous-segment géodésique γ_0 de γ entre compris entre B_1 et B_2 (i.e. γ_0 ne rencontre pas B).

Lemme 5 *(i) Soit Π un plat de triangles isocèles de X. Une bande dans X dont l'intersection avec Π est non vide, et non réduite à un point, contient une géodésique singulière de Π.*

(ii) Soit γ un segment géodésique de X. Si γ ne rencontre aucune bande de X, alors γ est contenu dans un unique plat en triangles isocèles de X.

(iii) Soit γ un segment géodésique et soient B_1, B_2 deux bandes de X d'intersection vide. Si γ rencontre successivement B_1 et B_2, alors il existe un plat de triangles isocèles Π dans X tel que les intersections $\Pi \cap B_1$ et $\Pi \cap B_2$ sont deux droites singulières parallèles de Π.

2.3. *Enveloppe analytique et enveloppe analytique réduite d'un segment.*

Soit γ un segment géodésique de X. On appelle *enveloppe analytique* de γ la surface $H(\gamma)$ de X (éventuellement à bords, branchée, et non nécéssairement totalement géodésique) construite de la façon suivante.

• Si γ ne rencontre aucune bande de X, alors $H(\gamma)$ est soit :

(1) l'enveloppe convexe simpliciale de γ dans le plat Π en triangles isocèles donné par le lemme 5 (ii) si γ est non singulier,

(2) la réunion des chromosomes collés de X qui intersectent γ en au moins deux points si γ est singulier.

• Si γ rencontre au moins une bande de X, notons $B_1, \dots B_n$ les bandes de X que γ rencontrent successivement en partant de son origine (pour une orientation fixée de γ) et procédons de la façon suivante. Soit $H_0(\gamma)$ la réunion des bandes B_i, $i = 1 \dots n$. Construisons par récurrence une suite emboitée de surfaces à bords

$$H_0(\gamma) \subset H_1(\gamma) \subset \dots \subset H_{n-1}(\gamma).$$

Supposons $H_{i-1}(\gamma)$ construite pour un entier $i \geqslant 1$ et construisons $H_i(\gamma)$ pour $i < n$. On distingue les cas suivant.

(1) B_i et B_{i+1} ne s'intersectent pas : on applique la partie (iii) du Lemme 5 en posant $H_i(\gamma) = H_{i-1}(\gamma) \cup P$, où P est la partie du plat Π entre les deux droites singulières définies dans (iii).

(2) B_i et B_{i+1} ont un bord commun : on pose $H_i(\gamma) = H_{i-1}(\gamma)$.

(3) B_i et B_{i+1} ont exactement un point commun $A \in X$: dans ce cas $B_i \cup B_{i+1}$ est un chromosome C non collé de X de centromère A. Par construction γ et C sont transverses, i.e. γ a une intersection non vide avec l'intérieur des deux branches de C, et on complète en posant $H_i(\gamma) = H_{i-1}(\gamma) \cup P$, où P est la réunion des deux secteurs de triangles d'angles u (ou v) en A, déterminés par le type u (ou v) du chromosome C.

D'après le lemme 4 il n'y a pas d'autre possibilité d'intersection.

La construction ci-dessus détermine une surface $H_{n-1}(\gamma)$ dans X. On pose alors $H(\gamma) = H_{n-1}(\gamma) \cup P_1 \cup P_2 \cup Q$ où Q est la réunion des chromosomes collés de X qui intersectent γ en au moins deux points, et P_1, P_2 sont définis comme suit : si l'origine de γ (resp. l'extrémité de γ) n'est pas incluse dans H_{n-1}, alors P_1 (resp. P_2) est le demi-plan en triangles isocèles bordant B_1 et contenant l'origine (resp. l'extrémité) de γ ; sinon on pose $P_1 = \emptyset$ (resp. $P_2 = \emptyset$).

Ceci termine la construction de $H(\gamma)$. On a choisi le terme 'analytique' en référence au prolongement analytique usuel (l'enveloppe $H(\gamma)$ est le prolongement naturel du segment γ dans X).

Enfin nous tronquons cette enveloppe :

Définition 6 *Soit γ un segment géodésique de X. On appelle* enveloppe analytique réduite *de γ, et on note $H'(\gamma)$, l'ensemble des points de l'enveloppe analytique $H(\gamma)$ de γ qui sont à distance au plus $2|\gamma|$ du milieu de γ, où $|\gamma|$ est la longueur CAT(0) de γ dans X.*

2.4. *Réduction des triangles géodésiques.*

Lemme 7 *Soient A, B, C trois sommets de X et soit D le disque totalement géodésique de X de bord le triangle géodésique (ABC). Alors*

$$D_0 = D \setminus (H'([AB]) \cup H'([BC]) \cup H'([AC]))$$

est soit vide, soit un disque inclus dans un plat Π *en triangles isocèles, dont le bord* $T = \partial D_0$ *est un triangle isocèle simplicial de* Π.

Dans la plupart des cas D_0 est vide. Le lemme 7 se démontre en étudiant les positions possibles des chromosomes à l'intérieur de D. On a représenté un cas significatif sur la figure suivante. On observera que les centromères de D se trouvent sur les bords.

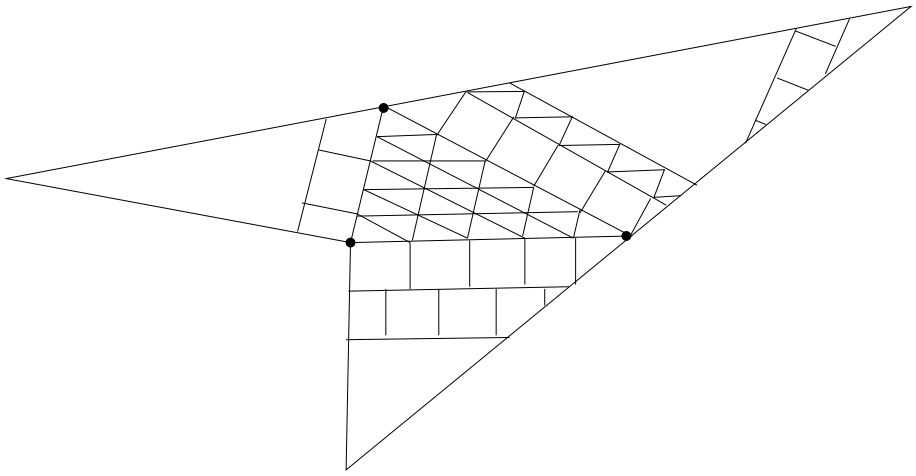

Fig. 3. Réduction le long des enveloppes analytiques réduites

Notons qu'on aurait aussi pu saturer l'enveloppe analytique au sens des plats en triangles isocèles (puisqu'ils sont isolés). Ceci aurait permis de réduire tous les triangles sur des points, même dans le cas où les points A, B, C sont dans un même plat en triangles. Par ailleurs le caractère isolé de ces plats n'est pas essentiel pour établir la propriété de décroissance rapide.

2.5. *En déduire la propriété de décroissance rapide.*

Ce qui précède permet de montrer que le rang de G croit polynomialement relativement à la métrique ℓ au sens de [3, Definition 16] (quitte à généraliser un peu cette définition). On peut alors conclure à la propriété de décroissance rapide comme dans [3] (voir en particulier la section 2.2 et ses références). Ceci termine la preuve du théorème 1.

Références

[1] Property of rapid decay. List of open problems from the workshop held at the AIM, Palo Alto, California (2006). Organized by I. Chatterji and L. Saloff-Coste. Available at http ://www.aimath.org/WWN/rapiddecay.

[2] Barré S., Pichot M., Groups of frizes and variations of the asymptotic growth rank, en préparation.

[3] Barré S., Pichot M., Intermediate rank and property RD, preprint, http ://arxiv.org/abs/0710.1514.

[4] Lafforgue, Vincent, K-théorie bivariante pour les algèbres de Banach et conjecture de Baum-Connes. (French) [Bivariant K-theory for Banach algebras and the Baum-Connes conjecture] Invent. Math. 149 (2002), no. 1, 1–95.

[5] Valette, Alain, Introduction to the Baum-Connes conjecture. With an appendix by Guido Mislin. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 2002

[6] Wise, Daniel T., A non-Hopfian automatic group. J. Algebra 180 (1996), no. 3, 845–847.