LE COÛT EST UN INVARIANT ISOPÉRIMÉTRIQUE

MIKAËL PICHOT ET STÉPHANE VASSOUT

RÉSUMÉ. Soit R une relation d'équivalence mesurée ergodique de type II_1 sur un espace de probabilité (X, μ) sans atome. On montre que

$$C(R) = 1 + \frac{1}{2}h(R),$$

où $C(R)$ est le coût de R, supposé fini, et $h(R)$ sa constante isopérimétrique. Cela fait suite aux résultats récents de Russell Lyons et des auteurs sur le sujet.

1. Introduction

Soit R une relation d'équivalence mesurée ergodique de type II_1 (à classes dénombrables) sur un espace de probabilité (X, μ) sans atome. Comme pour les groupes dénombrables, on associe à tout système générateur Φ de R un graphe de Cayley Σ_Φ sur lequel la relation R agit (Φ est aussi appelé un graphage de R). Suivant G. Levitt (voir [1]), le *coût* de R est défini par

$$C(R) = \inf_{\Phi} \frac{1}{2}\mathrm{val}_\mu(\Sigma_\Phi)$$

où l'infimum porte sur les systèmes générateurs de R et val_μ est la valence moyenne dans Σ_Φ prise relativement à μ. Il s'agit a priori d'un nombre réel compris entre 1 et ∞ (inclus) ; D. Gaboriau a montré dans [1] que toutes les valeurs de $[1, \infty]$ étaient atteintes.

Un autre invariant de R, la *constante isoperimétrique* $h(R)$, peut être défini à partir des Σ_Φ :

$$h(R) = \inf_{\Phi} h(\Sigma_\Phi)$$

où $h(\Sigma_\Phi)$ est la constante isopérimétrique de Σ_Φ, définie de façon appropriée (une définition précise est rappelée à la section 2). Cet invariant, à valeurs dans $[0, \infty]$, a été introduit par R. Lyons et les auteurs dans [3].

Dans [3] il est montré que

$$C(R) \leqslant 1 + \frac{1}{2}h(R),$$

si R est de coût fini, et que $h(R) = 0$ dès que $C(R) = 1$. Nous renvoyons à cet article pour des détails sur ces deux énoncés ainsi que leurs preuves. Le théorème principal de cet article complète ces deux résultats :

Théorème 1. *Soit R une relation d'équivalence mesurée ergodique de type* II_1 *sur un espace de probabilité (X, μ) sans atome. Si $C(R) < \infty$, alors*

$$C(R) = 1 + \frac{1}{2}h(R),$$

où $C(R)$ est le coût de R et $h(R)$ la constante isopérimétrique.

Le théorème 1 établit l'égalité entre deux invariants de R de nature très différente : le coût de R est un invariant *local* des graphes de Cayley de R (par définition), alors que la constante isopérimétrique en est un invariant *asymptotique*. L'énoncé correspondant en théorie des groupes n'est bien sûr pas correct. Si Γ est un groupe dénombrable infini de type fini, l'analogue du coût est le nombre minimal $g(\Gamma)$ de générateurs de Γ (i.e. la valence minimale des graphes de Cayley divisée par 2), et la constante isopérimétrique de

Date: 4 mars 2009.

Γ est l'infimum $h(\Gamma)$, sur les graphes de Cayley Y de type fini de Γ, de la constante de isopérimétrique habituelle de Y. En général, les deux constantes $g(\Gamma)$ et $h(\Gamma)$ ne coïncident pas modulo renormalisations. Par exemple pour les groupes abéliens libres $\mathbf{Z}^n$, $n \geqslant 2$, ou plus généralement pour les groupes moyennables non cycliques, on a $h(\Gamma) = 0$ et $g(\Gamma) > 1$. Une égalité analogue à celle du théorème 1 a lieu cependant pour le groupe libre $\Gamma = F_k$ à k générateurs ; dans ce cas $g(F_k) = k$ et $h(F_k) = 2k - 2$. En fait, il est facile de voir que pour un groupe de type fini Γ, l'égalité $g(\Gamma) = 1 + \frac{1}{2}h(\Gamma)$ n'a lieu que si Γ est un groupe libre. En effet, $g(\Gamma)$ est atteint pour un certain système générateur (fini) S, et pour ce S on a donc $2(|S| - 1) = h(\Gamma) \leqslant h(Y)$, où $h(Y)$ est la constante isopérimétrique du graphe de Cayley Y de Γ relativement à S. En appliquant cette inégalité aux boules B_n de Y, on obtient par un calcul immédiat que $\|B_n| \geqslant 2|S|(2|S| - 1)^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$, et donc que Γ est un groupe libre. Au contraire, le coût $C(R)$ de R n'est jamais atteint, sauf si R est arborable (cf. [1]).

Remerciements. Nous remercions George Skandalis qui a suggéré que l'inégalité de [3] était une égalité. Le premier auteur est financé par JSPS et l'Université de Tokyo (IPMU).

2. Rappels et notations

Faisons quelques brefs rappels pour fixer les notations. Pour plus de détails sur les graphages et le coût des relations d'équivalences, nous renvoyons aux articles [1, 2] de D. Gaboriau.

Soit Φ une famille dénombrable d'isomorphismes partiels de R, i.e. d'isomorphismes partiels φ de X tels que $x \sim \varphi(x) \bmod(R)$. Le *coût* de Φ est le nombre positif (possiblement infini)

$$C(\Phi) = \sum_{\varphi \in \Phi} \mu(\operatorname{dom} \varphi) = \sum_{\varphi \in \Phi} \mu(\operatorname{Im} \varphi)$$

où $\operatorname{dom} \varphi$ et $\operatorname{Im} \varphi$ sont respectivement le domaine et l'image de φ. On dit que Φ est un *système de générateurs* de R si, presque surement, étant donnés deux points $x, y \in X$ équivalents modulo R, il existe une composée $\psi = \varphi_n^{\varepsilon_n} \dots \varphi_1^{\varepsilon_1}$ telle que $\psi(x) = y$, où $\varphi_i \in \Phi$ et $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$. Le *coût* de R est l'infimum

$$C(R) = \inf_{\Phi} C(\Phi)$$

pris sur tous les systèmes générateurs Φ de R (voir [1]). À un système générateur Φ de R est naturellement associé un *graphe de Cayley* Σ_Φ de R. Rappelons simplement que Σ_Φ est fibré au-dessus de X, et que la fibre Σ_Φ^x en $x \in X$ est un graphe connexe dont les sommets sont les éléments de R^x et les arêtes l'ensemble des couples $\big((x, y), (x, \varphi(y)\big) \in R^x \times R^x$ pour $\varphi \in \Phi$ tel que $y \in \operatorname{dom} \varphi$. Il est clair que la définition du coût de R donné ci-dessus coïncide avec celle donnée en introduction.

Dans [3] nous définissons une constante isopérimétrique $h(\Sigma_\Phi)$ de Σ_Φ comme suit :

$$h(\Sigma_\Phi) = \inf_A \frac{\nu^{(1)}(\partial_{\Sigma_\Phi} A)}{|A|}$$

où $\nu^{(1)}$ est la mesure de décompte sur le 1-squelette de Σ_Φ, et A un ensemble fini de sommets symétriques de Σ_Φ deux à deux disjoints . Par définition, on appelle sommet symétrique de Σ_Φ (le graphe d') un automorphisme du groupe plein de R (i.e. un automorphisme de X dont le graphe est inclus dans R), et on dit que deux sommets sont disjoints si l'intersection de leurs graphes est négligeable pour la mesure sur R (voir [3, Definition 4.1]). Le bord $\partial_{\Sigma_\Phi} A$ de l'ensemble A est l'ensemble des arêtes de Σ_Φ avec exactement un sommet dans A (i.e. dans le graphe d'un automorphisme de A). Notons que cette définition de $h(\Sigma_\Phi)$ ne revient pas à « moyenner la constante isopérimétrique des fibres ».

La *constante isopérimétrique de R* est l'infimum

$$h(R) = \inf_{\Phi} h(\Sigma_\Phi)$$

pris sur tous les systèmes générateurs Φ de R.

3. Démonstration du théorème 1

Soit R une relation d'équivalence ergodique de type II_1 sur un espace de probabilité (X, μ) sans atome. Nous montrons ici que

$$C(R) \geqslant 1 + \frac{1}{2} h(R),$$

l'inégalité inverse faisant l'objet de [3, Theorem 12]. On suppose $C(R) < \infty$.

Soit φ un automorphisme ergodique du groupe plein de R. Étant donné $\varepsilon > 0$, on peut compléter φ par une famille Φ'_ε d'isomorphismes partiels de R de sorte que

$$\Phi_\varepsilon = \Phi'_\varepsilon \cup \{\varphi\}$$

soit un graphage de R, satisfaisant

$$C(\Phi_\varepsilon) < C(R) + \varepsilon/4$$

(voir [1, Lemme III.5]).

Soit f la fonction définie pour $x \in X$ par

$$f(x) = \sum_{\psi \in \Phi'_\varepsilon} \chi_{\mathrm{dom}\,\psi}(x) + \chi_{\mathrm{Im}\,\psi}(x).$$

Elle a pour intégrale

$$\int_X f \mathrm{d}\mu = 2C(\Phi'_\varepsilon).$$

Comme la mesure μ est invariante, il en résulte que

$$\frac{1}{n+1} \int_X \sum_{i=0}^{n} f(\varphi^i(x)) \mathrm{d}\mu(x) = 2C(\Phi'_\varepsilon)$$

pour tout nombre entier $n \geqslant 0$.

Fixons $n > 4/\varepsilon$ et considérons l'ensemble A_n défini par

$$A_n = \{\varphi^i\}_{i=0}^{n}.$$

Clairement A_n est un ensemble de points symétriques deux à deux disjoints de Σ_ε, au sens de [3, Definition 8]. De plus pour $x \in X$ le bord de A_n^x dans Σ_ε^x vérifie

$$|\partial_{\Sigma_\varepsilon^x} A_n^x| \leqslant \sum_{i=0}^{n} f(\varphi^i(x)) + 2,$$

où $|\cdot|$ est le cardinal. Notons qu'on a égalité si $x \not\sim \psi(x) \bmod (R_\varphi)$ pour tout $\psi \in \Phi'_\varepsilon$ et tout $x \in \mathrm{dom}\,\psi$ — ce qu'on peut supposer a priori quitte à réduire les domaines des éléments de Φ'_ε, mais ce n'est pas nécessaire.

Par suite on a :

$$\frac{1}{n+1} \nu^{(1)}(\partial_{\Sigma_\varepsilon} A_n) \leqslant 2C(\Phi'_\varepsilon) + \frac{2}{n+1} < 2(C(R) - 1) + \varepsilon,$$

où $\nu^{(1)}$ est la measure naturelle sur le 1-squelette de Σ_ε (associée à la mesure de Haar sur R). Comme

$$h(R) \leqslant \inf_A \frac{\nu^{(1)}(\partial_{\Sigma_\varepsilon} A)}{|A|} \leqslant \frac{1}{n+1} \nu^{(1)}(\partial_{\Sigma_\varepsilon} A_n),$$

on obtient

$$h(R) < 2(C(R) - 1) + \varepsilon,$$

et lorsque $\varepsilon \to 0$,

$$C(R) \geqslant 1 + \frac{1}{2}h(R),$$

ce qu'il fallait démontrer.

4. Commentaires

4.1. **Formule de compression.** Dans [3] on montre que le groupe fondamental d'une relation uniformément non moyennable ergodique R est trivial, en établissant l'inégalité

$$h(R) \leqslant \mu(D)h(R_{|D})$$

où D est une partie borélienne non négligeable de X et $R_{|D}$ est la restriction de R à D. En fait cette inégalité est une égalité :

Corollaire 2. *Soit R comme dans le théorème 1 et D une partie borélienne non négligeable de X. On a :*

$$h(R) = \mu(D)h(R_{|D}).$$

Ceci résulte immédiatement du théorème 1 et la proposition II.6 de [1] concernant le coût.

4.2. **Une autre définition du bord.** Conservant les notations introduites ci-dessus, on peut aussi définir le bord $\partial_\Sigma A$ comme l'ensemble des *points de* R dans le bord de A relativement à Σ (plutôt que les *arêtes de* Σ dans le bord de A relativement à Σ). On obtient alors une constante $h'(R)$, a priori plus petite que $h(R)$, et les résultats de [3] établissent l'inégalité (voir la note p. 598)

$$C(R) \leqslant 1 + \frac{h'(R)}{2}.$$

On a donc en fait, d'après le théorème 1 :

$$C(R) = 1 + \frac{h(R)}{2} = 1 + \frac{h'(R)}{2}.$$

Comme noté dans [3, p. 598], la version h' de la constante isopérimétrique est évidemment majorée par le taux de croissance uniforme $\omega(\Gamma)$ de Γ moins 1, et on a donc

$$\omega(\Gamma) \geqslant 2\beta_1(\Gamma) + 1$$

(voir [3, Cor. 3.2]), où $\beta_1(\Gamma)$ est le premier nombre de Betti ℓ^2 de Γ.

4.3. **Taux de cycles.** Rappelons qu'à une relation d'équivalence R ergodique de type II_1 est associée une suite de nombres positifs $\beta_0(R), \beta_1(R), \beta_2(R), \ldots$, appelés nombres de Betti ℓ^2 de R (voir [2]). On a toujours

$$C(R) \geqslant \beta_1(R) + 1$$

et on se sait pas si l'inégalité peut être stricte (voir la section 3.6 de [2]). Le *taux de cycle* de R (voir [5]) est défini comme suit :

$$\tau(R) = \inf_{\Phi} \dim_{LR} \overline{Z_1(\Sigma_\Phi)},$$

où l'infimum est pris sur les systèmes générateurs Φ de R, Σ_Φ est le graphe de Cayley de Φ, $Z_1(\Sigma_\Phi)$ est l'espace des cycles de Σ_Φ. La dimension $\dim_{LR}$ est la dimension de l'adhérence Hilbertienne $\overline{Z_1(\Sigma_\Phi)}$ prise au sens de Murray et von Neumann (comme pour les nombres de Betti ℓ^2), où LR désigne l'algèbre de von Neumann de R. On a alors

$$C(R) = \tau(R) + \beta_1(R) + 1$$

pour toute relation ergodique II_1 de coût fini (voir [5, 4]), et il n'y a pas d'exemples connus pour lesquels $\tau(R) > 0$. Le taux de cycles a été introduit dans [5] conjointement avec une technique *d'effaçage de cycles*, qui permet de faire diminuer la dimension $\dim_{LR} \overline{Z_1(\Sigma_\Phi)}$.

En fait (cf. [5]) il est possible *d'effaçer récursivement tous les cycles* d'un graphage donné— mais ceci ne suffit pas a priori à entraîner $\tau(R) = 0$. Le théorème 1 pourrait fournir une nouvelle approche à ces questions.

Références

[1] Gaboriau D., "Coût des relations d'équivalence et des groupes", Invent. Math. 139, no. 1, 41–98, *2000.*

[2] Gaboriau D., "Invariants l^2 de relations d'équivalence et de groupes", Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. 95, 93–150, *2002.*

[3] Lyons R., Pichot M., Vassout S., Uniform non amenability and the first L^2-Betti number, Groups Geom. Dyn., to appear.

[4] Pichot M., "Semi-continuity of the first ℓ^2-Betti number on the space of finitely generated groups", Comm. Math. Helv., 81, No. 3, 643–652, *2006.*

[5] Pichot M., "Quasi-périodicité et théorie de la mesure", Ph.D. Thesis. École Normale Supérieure de Lyon, *2005.* Available at http ://www.ihes.fr/∼pichot

Mikaël Pichot, IPMU, University of Tokyo, 3-8-1 Komaba, Tokyo, 153-8914 JAPAN
E-mail address: `pichot@ms.u-tokyo.ac.jp`

Stéphane Vassout, Institut de Mathématiques de Jussieu and Université Paris 7
E-mail address: `vassout@math.jussieu.fr`