

# 正則パラメータの完備化とそのアルゴリズム

## A completion of holomorphic parameters and its algorithm

大島利雄

TOSHIO OSHIMA

城西大学 理学部

FACULTY OF SCIENCE, JOSAI UNIVERSITY

### 1 いくつかの例

ベクトル空間を生成する有限個のベクトルや関数などがパラメータに正則にまたは有理的に依存しているとき、パラメータの特異点（例えば一時独立性が崩れる点、あるいは、パラメータが極を持つ点）で解析したい、という状況は多くある。

たとえば  $t \in \mathbb{C}$  を正則（または有理的）パラメータとしていくつかの例を挙げてみよう。

例 1.  $\mathcal{A}_t : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  （線形変換）

は  $t$  を正則パラメータにもつとする（すなわち、 $\mathbb{C}^n$  の基底を定めて  $\mathcal{A}_t$  を行列表示すると、その成分は  $t$  の正則関数となる）。さらに、 $\mathcal{A}_t$  の固有値  $\lambda_\nu(t)$  ( $\nu = 1, \dots, n$ ) が  $t$  に正則に依存していて、 $\lambda_\nu(t) \neq \lambda_{\nu'}(t)$  ( $t \neq 0, 1 \leq \nu < \nu' \leq n$ ) であって、固有値  $\lambda_\nu(t)$  に対応する固有ベクトル  $u_\nu(t)$  が与えられていたとする（ $u_\nu(t)$  は  $t = 0$  において高々極を許すが、他の点では正則）。

このとき、 $t$  に正則に依存する  $\mathbb{C}^n$  の基底  $\{\bar{u}_\nu(t) \mid \nu = 1, \dots, n\}$  を構成して、 $\mathcal{A}_t$  の  $t = 0$  の近くでの様子を解析せよ！（たとえば、 $\mathcal{A}_0$  の Jordan 標準形は？）

例 1.1.  $n = 2$  で

$$\begin{aligned}(\lambda_1(t), u_1(t)) &= (1 + t^2, \begin{pmatrix} 1 + t \\ 1 \end{pmatrix}), \\(\lambda_2(t), u_2(t)) &= (1 - t^2, \begin{pmatrix} 1 + Ct \\ 1 - t \end{pmatrix})\end{aligned}$$

であったとする（ $C$  はある実数）。

$$u_3(t) := \frac{1}{1-t} u_2(t) - u_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{Ct+t^2}{1-t} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\bar{u}_1(t) &:= u_1(t) = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \bar{u}_2(t) &:= \begin{cases} \frac{1}{t}u_3(t) = \begin{pmatrix} \frac{C+t}{1-t} \\ 0 \end{pmatrix} & (C \neq 0), \\ \frac{1}{t^2}u_3(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-t} \\ 0 \end{pmatrix} & (C = 0) \end{cases}\end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_t u_3(t) &= (1+t)u_2(t) - (1+t^2)u_1(t) \\ &= (1+t)(1-t)(u_3(t) + u_1(t)) - (1+t^2)u_1(t) \\ &= (1-t^2)u_3(t) - 2t^2u_1(t)\end{aligned}$$

となるので

$$\mathcal{A}_t \bar{u}_2(t) = \begin{cases} (1-t^2)\bar{u}_2(t) - 2tu_1(t) & (C \neq 0), \\ (1-t^2)\bar{u}_2(t) - 2u_1(t) & (C = 0). \end{cases}$$

ここで  $(\mathcal{A}_t \bar{u}_1(t), \mathcal{A}_t \bar{u}_2(t)) = (\bar{u}_1(t), \bar{u}_2(t))A_t$  とおくと

$$A_t = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1+t^2 & -2t \\ 0 & 1-t^2 \end{pmatrix} & (C \neq 0), \\ \begin{pmatrix} 1+t^2 & -2 \\ 0 & 1-t^2 \end{pmatrix} & (C = 0) \end{cases}$$

となる。よって  $A_0$  は、 $C \neq 0$  のときのみ対角化可能となる。

このとき  $\{\bar{u}_1(t), \bar{u}_2(t)\}$  は  $GL(2, \mathcal{O}_o)$  の変換を除いて一意に定まる (なお、 $\mathcal{O}_o$  は原点で正則な関数の環)。

**例 2.**  $\mathcal{M}_t : P_j(t, x, \partial_x)u = 0 \quad (j = 1, \dots, m)$  (線形微分方程式系) において  $t \in \mathbb{C}$  は正則パラメータであるとする。一般の  $t$  においては、 $u_\nu(t, x)$  という  $\mathcal{M}_t$  の解が与えられていて ( $\nu = 1, \dots, N$ )、それらは一般の  $t$  で一次独立とする。さらに  $u_\nu(t, x)$  は  $t$  に正則、あるいは有理的に依存しているとする。

このとき、 $\mathcal{M}_t$  の解  $\bar{u}_\nu(t, x)$  で、 $t$  を正則パラメータに持ち、さらに  $\forall t$  に対して  $\dim \sum \mathbb{C} \bar{u}_\nu(t, x) = N$  となるものを構成せよ！

**例 3.**  $W[x] : (x_1, \dots, x_n)$  の Weyl 代数 (または  $W(x) = \mathbb{C}(x) \otimes_{\mathbb{C}[x]} W[x]$  や  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ )

$J_t : W[x]^N$  の左  $W[x]$ -部分加群 ( $t$  について正則に依存)

$\bar{J}_t := \bigcup_{n=0}^{\infty} \overline{(W[x]^{(m)})^N \cap J_t}$  とおいたとき,  $(W[x]^{(m)})^N \cap \bar{J}_t = \overline{(W[x]^{(m)})^N \cap J_t}$  ならば  $\bar{J}_t$  を  $J_t$  の (よい) 正則完備化と呼ぼう. ここで,  $(m)$  は階数による filtration.

実際には, 正則に依った関数のベクトル空間の満たす方程式が generic なパラメータのときに分かっている場合などに重要 (4. における例などはその一つ).

多変数のパラメータ  $t = (t_1, \dots, t_m)$  の場合

例 4.  $\mathcal{M}_\lambda : p_j(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m})u = p_j(\lambda_1, \dots, \lambda_m)u \quad (j = 1, \dots, m)$

$$p_j(x) := \sum_{1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_j \leq m} x_{\nu_1} \cdots x_{\nu_j} \quad (j = 1, \dots, m)$$

この方程式 (複素パラメータ  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  を持つ) の解は

$$u_\sigma(\lambda, x) := \exp\langle \sigma \lambda, x \rangle \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_m : m \text{ 次対称群}) : \text{独立解} \iff (\sigma \lambda = \lambda \Rightarrow \sigma = \text{id})$$

これらの関数の完備化  $\bar{u}_\sigma(\lambda, x)$  として, 以下の条件を満たすものが定数倍を除いて一意に存在する.

1.  $\bar{u}_\sigma(\lambda, x)$  は  $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$  に対して正則

2.  $\bar{u}_\sigma(x) = \sum_{\sigma' \leq \sigma} c_{\sigma'}^\sigma(\lambda) \exp\langle \sigma' \lambda, x \rangle$

ただし,  $c_{\sigma'}^\sigma(\lambda)$  は  $\lambda$  の有理関数で,  $c_{\sigma'}^\sigma(C\lambda) = C^{-|\sigma|} c_{\sigma'}^\sigma(\lambda) \quad (\forall C \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$

$|\sigma|$  は,  $\sigma$  の転倒数, さらに  $\sigma \geq \sigma'$  の関係は,  $\sigma = \sigma'$  または転倒数の大小 (あるいは, Bruhat order の大小としても結果は同じ).

このとき, 以下が成立するので正則完備化である.

$$\dim \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \mathbb{C} \bar{u}_\sigma(\lambda, x) = m! \quad (\forall \lambda \in \mathbb{C}).$$

特に  $w^*$  を転倒数が最大の  $\mathfrak{S}_m$  の元とすると

$$\begin{aligned} \bar{u}_{w^*}(\lambda, x) &= \frac{\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} (-1)^{\text{sgn } \sigma} \exp\langle \sigma \lambda, x \rangle}{\prod_{1 \leq i < j \leq m} (\lambda_i - \lambda_j)} \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq m} (x_i - x_j) \quad (\text{if } \lambda = 0) \end{aligned}$$

$\{u_\sigma(0, x) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_m\}$  は,  $\mathfrak{S}_m$  に対する調和多項式の空間の基底で

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \mathbb{C} \bar{u}_\sigma(0, x) = \mathbb{C} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \right] \prod_{1 \leq i < j \leq m} (x_i - x_j).$$

この例について, より詳しくは [2, §1] を参照して下さい. また, Weyl の指標公式や次元公式にも関係しています.

$m = 2$  の場合は

$$\begin{aligned}
\bar{u}_1(\lambda, x) &= \exp(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2), \\
\bar{u}_1(0, x) &= 1, \\
\bar{u}_2(\lambda, x) &= \frac{\exp(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - \exp(\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \\
&= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2)^n}{n!}}{\lambda_1 - \lambda_2} \\
&= \frac{(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - (\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1 - x_2)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x_1 - x_2) \sum_{\nu=0}^{n-1} (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)^\nu (\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2)^{n-\nu-1}}{n!} \\
&= (x_1 - x_2) \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)^i (\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2)^j}{(i+j+1)!}, \\
u_2(0, x) &= x_1 - x_2.
\end{aligned}$$

## 2 命題

**命題 1** [1, Proposition 2.21].  $u_j(t, x)$  ( $1 \leq j \leq m$ ):  $\mathcal{D}'(M)$  に値をとる  $t \in D_r \setminus \{0\}$  上の一次独立な正則関数で,  $t = 0$  は高々極とする (ただし,  $\mathcal{D}'(M)$  は多様体  $M$  上のシュワルツ超関数の空間で  $D_r := \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < r\}$ ).

$\Rightarrow \exists c_{i,j}(t) \in \mathbb{C}(t)$  such that  $\bar{u}_i(t, x) := \sum_j c_{i,j}(t) u_j(t, x)$  は  $t$  について正則で  $t = 0$  でも一次独立 ( $i = 1, \dots, m$ ).

このとき,  $\{\bar{u}_1(t, x), \dots, \bar{u}_m(t, x)\}$  を  $\{u_1(t, x), \dots, u_m(t, x)\}$  の正則完備化と呼ぼう.

**注意 1.** 1) 上の  $\{\bar{u}_j(t, x)\}$  は本質的に一意 ( $GL(m, \mathcal{O}_0)$  で移り合う. 特に  $\bar{V}_0 := \sum_j \mathbb{C} \bar{u}_j(0, x)$  は決まる)

2)  $u_j(t, x) \in \mathbb{C}(t, x)$  のときも同様

**命題 2** [5, Lemma 6.3]. 命題 1 と同じ仮定, ただし有理的パラメータは多変数  $t = (t_1, \dots, t_k)$ ,  $k > 1$  で  $u_j(t, x)$  ( $1 \leq j \leq m$ ) は  $t$  の generic point で一次独立.  $0$  を通る正則曲線  $\gamma(s) = (t_1(s), \dots, t_k(s))$  を用いて  $u_j(\gamma(s), x)$  に対して前命題によって  $t = 0$  への解析接続で得られる基底を  $\bar{u}_i^\gamma$ ,  $\bar{V}_0 := \sum_{\gamma, i} \mathbb{C} \bar{u}_i^\gamma$  とおく. このとき以下のいずれかが成立.

1)  $\dim \bar{V}_0 > m$

2)  $\dim \bar{V}_0 = m$  かつ前命題と同様のことが成立

特に  $t$  が正則パラメータで,  $\{1$  次独立でない  $t\}$  の余次元  $> 1 \Rightarrow$  上の 1) が成立. より詳しくは,  $\dim \bar{V}_0 \geq \{1$  次独立でない  $t\}$  の余次元  $-1 + m$ .

**命題 1 の証明の概略.**

$c_{i,j}(t)$  の構成 :

- $u_j(t, x) \leftarrow t^N u_j(t, x)$  により,  $t$  は正則パラメータとしてよい
- $m = 1$  のとき.  $u_j(0, x) = 0 \Rightarrow u_j \leftarrow \frac{u_j}{t}$  (有限回繰り返して終了)
- $u_1(t, x), \dots, u_k(t, x) : t = 0$  で一時独立とする  
 $\exists C_\nu \in \mathbb{C}$  s.t.  $u_{k+1}(0, x) = \sum_{1 \leq \nu \leq k} C_\nu u_\nu(0, x)$   
 $\Rightarrow u_{k+1} \leftarrow \frac{1}{t}(u_{k+1} - \sum_{1 \leq \nu \leq k} C_\nu u_\nu)$  (有限回繰り返して終了)

一意性 :  $\{\bar{u}_j(t, x)\}, \{\bar{u}'_j(t, x)\} : 共に完備化$

$$\bar{u}'_j(t, x) = \sum_\nu a_{i,\nu}(t) u_\nu(t, x) \Rightarrow a_{i,\nu}(t) \text{ は } D_r \text{ で正則}$$

$(a_{i,j}(t))$  は  $D_r$  で可逆で, 逆行列の成分も  $D_r$  で正則

**注意 2.** 上の構成法では,  $(c_{i,j}(t))$  は下三角で, そのとき (対角成分を除いて)  $c_{i,j}(t)$  は一意 ( $(u_1(t, x), \dots, u_m(t, x))$  の順序のみに依る).

例 4 では  $\sigma$  の長さ (or Bruhat order) に両立する順序を用いた.

**例 5. 複数パラメータ:**  $(s, t)$

$$f_1 = s^4 x + s^2 t^3 y + s^3 t^2 z + t^6 w : \bar{V}_0 = \langle x, y, w \rangle$$

$$f_2 = s^4 x + s^2 t^3 x + s^3 t^2 z + t^6 x : \bar{V}_0 = \langle x, z \rangle$$

$$f_3 = s^4 x + s^2 t^3 y + s^3 t^2 z + t^7 w : \bar{V}_0 = \langle x, y, z, w \rangle$$

### 3 アルゴリズム

- $u_j(t, x) \in \mathbb{C}[t, x_1, \dots, x_n] \Rightarrow$  前命題の証明通り
- $u_j(t, x) \in \mathbb{C}(t, x_1, \dots, x_n) \Rightarrow 0 \neq p \in \mathbb{C}[t, x_1, \dots, x_n]$  を掛けて上に帰着  
これを Risa/Asir に実装した.
- $u_j(t, x) :$  べき級数のとき  $\Rightarrow$  べきが十分高い有限項で切って多項式にすると上に帰着される.  $c_{i,j}(t)$  は切り方に依らない

**注意 3.**  $u_j(t, x)$  が有理式などの場合は, 数式処理 Risa/Asir 上で関数 `paracmpl()` として実現した ([7]). この実現で, 命題 1 の証明の概略における  $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k$  は, 単項式についての辞書式順序を定め, それに関して Gröbner 基底のように標準的に定める.

`paracmpl(l,t|lim=1,low=1,para=[v1,v2,...])`

:: 有理的に  $t$  に依存したリスト  $l$  の成分 (たとえば有理式) で張られる空間の正則完備化  
 $l$  の成分が有理式  $f_1(t,x), \dots, f_m(t,x)$  のとき ( $x$  は多変数でよい), generic に  $t = t_0$   
と特殊化した  $f_1(t_0,x), \dots, f_m(t_0,x)$  の一次独立な個数を  $\bar{m}$  とする. 1 変数  $t$  の有理式  
 $g_{i,j}(t)$  を適当に取って

$$h_j(t,x) = \sum_{i=1}^m f_i(t,x)g_{i,j}(t)$$

とおくと, 0 でない  $h_j(t,x)$  の個数は  $\bar{m}$  で, しかも  $h_j(t,x)$  は  $t = 0$  で極を持たず,  
 $h_1(0,x), \dots, h_m(0,x)$  の一次独立な個数は  $\bar{m}$  とできる

`paracmpl([f1(t,x), ..., fm(t,x)], t)` は, この `[[h1(t,x), ..., hm(t,x)], (gi,j(t))]`  
を返す.

- $l$  はベクトルでもよいが, リストで返される.
- $[h_1(t,x), \dots, h_m(t,x)]$  は,  $t$  の有理式を成分とする可逆行列  $A = (a_{i,j}(t))_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}}$   
で,  $A$  と  $A^{-1}$  の各成分が  $t = 0$  に極を持たないものによる変換を除いて一意と  
なる.
- 返される  $G = (g_{i,j}(t))_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}}$  は上三角行列となる.
- `low=1` を指定すると,  $x$  の次数が小さい項に注目する (cf. 注意 4).
- `lim=1` を指定すると  $[h_1(0,x), \dots, h_m(0,x)]$  を返す.
- $f_i(t,x)$  は有理式でなく, 有理式を成分とするリストやベクトルでもよい.
- `para=[v1, ..., vk]` を指定すると, 数係数でなくて不定元  $v_1, \dots, v_k$  係数の有理関  
数体係数の有理式とみなす.
- $\bar{m} = m$  のとき,  $f_i(t,x)$  が有理式でなくて  $\exp((1+t)x)$  のような式の場合は, 適  
当な次数まで Taylor 展開した式で  $f_i(t,x)$  (の分母分子) を置き換え, `low=1` を指  
定して求めた  $G$  で変換すればよい.

実行例は

```
[0] os_md.paracmpl([1/(x-1),1/((t+1)*x-1)],t);
[[ (1)/(x-1), (1)/((t+1)*x^2+(-t-2)*x+1) ], [ 1 (1)/(t) ]
[ 0 (-t-1)/(t) ]]
[1] os_md.paracmpl([1/(1-x),1/(1-(t+1)*x)],t|lim=1);
[ (1)/(x-1) (1)/(x^2-2*x+1) ]
[2] os_md.paracmpl([1/(x-1),1/((t+1)*x-1)],t|low=1);
```

```

[[(-1)/(x-1), (x)/((t+1)*x^2+(-t-2)*x+1)], [ -1 (1)/(t) ]
[ 0 (-1)/(t) ]]
[3] os_md.paracmpl([1/(x-1), 1/((t+1)*x-1)], t|low=1, lim=1);
[ (-1)/(x-1) (x)/(x^2-2*x+1) ]
[4] os_md.paracmpl([[1/t, 1, 1], [1+t, 0, -t]], t);
[[[1, t, t], [0, t+1, t+2]], [ t t+1 ]
[ 0 (-1)/(t) ]]
[5] os_md.paracmpl([[1/t, 1, 1], [1+t, 0, -t]], t|lim=1);
[[1, 0, 0], [0, 1, 2]]

```

上の [0] ~ [5] は以下を示している.

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{x-1}, \frac{1}{(t+1)x^2 + (-t-2)x + 1} \right) &= \left( \frac{1}{x-1}, \frac{1}{(t+1)x-1} \right) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{t} \\ 0 & \frac{-t-1}{t} \end{pmatrix} \\ &= \left( \frac{1}{x-1}, \frac{1}{(x-1)^2} \right) \quad \text{if } t = 0, \\ \left( \frac{1}{1-x}, \frac{x}{(t+1)x^2 + (-t-2)x + 1} \right) &= \left( \frac{1}{x-1}, \frac{1}{(t+1)x-1} \right) \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{t} \\ 0 & -\frac{1}{t} \end{pmatrix} \\ &= \left( \frac{1}{1-x}, \frac{x}{(1-x)^2} \right) \quad \text{if } t = 0, \\ \left( \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t+1 \\ t+2 \end{pmatrix} \right) &= \left( \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t+1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} t & t+1 \\ 0 & -\frac{1}{t} \end{pmatrix} \\ &= \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \quad \text{if } t = 0. \end{aligned}$$

ここで以下に注意

$$\left( \frac{1}{1-x}, \frac{x}{(1-x)^2} \right) = \left( \frac{1}{x-1}, \frac{1}{(x-1)^2} \right) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

なお、最初の 2 例は  $\{u_1(t, x) = \frac{1}{x-1}, u_2(t, x) = \frac{1}{(t+1)x-1}\}$  の  $t = 0$  での正則完備化で、最後の例は 2 つの 3 次元ベクトル  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t+1 \\ t+2 \end{pmatrix} \right\}$  の正則完備化を与えている。

微分方程式

$$((t+1)x^2 - (t+2)x + 1) \frac{d^2u}{dx^2} + 2(2(t+1)x - t - 2) \frac{du}{dx} + 2(t+1)u = 0$$

の解空間は  $t \neq 0$  のとき  $\{\frac{C_1}{x-1} + \frac{C_2}{(t+1)x-1} \mid C_1, C_2 \in \mathbb{C}\}$  である. このことから  $t = 0$  のときの解空間は  $\{\frac{C_1}{x-1} + \frac{C_2}{(x-1)^2} \mid C_1, C_2 \in \mathbb{C}\}$  となることが分かる. より一般に, 任意の  $t$  で解空間は  $\{\frac{C_1}{x-1} + \frac{C_2 x}{(t+1)^2 x^2 - (t+2)x + 1} \mid C_1, C_2 \in \mathbb{C}\}$  で与えられる.

$x = 0$  の近くで考えるときは, low=1 を指定する方が便利なが多い.

複数パラメータのとき, 命題 2 における 1), 2) のいずれになるかを判定し, さらに 2) の場合に  $c_{i,j}(t)$  を求めるには以下のようにすればよい.

- $u_{i,j}(t, x)$  は有理式とする.
- 適当な  $p(t, x)$  を掛けて  $u_{i,j}(t, x)$  は多項式としてよい.
- $\dim \sum_{j=1}^m \mathbb{C}u_j(t_0, x) = m$  となる  $t_0$  を選び,  $t = st_0$  とおいて, 1つのパラメータ  $s$  に対する結果に対応する完備化  $\bar{u}'_1, \dots, \bar{u}'_m$  を求める.
- 注意 3 における基底に対応する  $m$  個の単項式  $x^{\alpha_j}$  に対し,  $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m$  は  $\bar{u}_i$  の  $x^{\alpha_j}$  の係数が  $\delta_{i,j}$  となるように  $c_{i,j}(t)$  を定めて決める. このとき  $c_{i,j}(t)$  が  $t = 0$  に特異点を持てば 1) で, そうでなければ 2) で  $c_{i,j}(t)$  が求めるものとなる.

## 4 問題例

問題 1. 命題 2 で 1) となる場合に,  $\bar{V}_0$  を求めるアルゴリズムは ( $u_j(t, x)$  が多項式の場合でも問題) ?

以下の例 6~9 は一連の例 (対称群  $\rightarrow$  正方行列  $\rightarrow$  Lie 環, cf. [6]).

例 6.  $n = n_1 + \dots + n_k, n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$

$$P_t := (\overbrace{t_1, \dots, t_1}^{n_1}, \overbrace{t_2, \dots, t_2}^{n_2}, \dots, \overbrace{t_k, \dots, t_k}^{n_k}) \in \mathbb{C}^n$$

$$V_t := \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \{\sigma P_t\} \subset \mathbb{C}^n, \quad \#V_t = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}$$

$I = \{f \in \mathbb{C}[t, x]; f(t, x)|_{V_t} = 0\}$  のよい生成元を求めよ.

i)  $p_j(x) - p_j(P_t), p_j(x)$ : 基本対称式 ( $j = 1, \dots, n$ )

ii)  $(x_{i_1} - t_j) \cdots (x_{i_{n-n_j+1}} - t_j)$  ( $1 \leq i_1 < \dots < i_{n-n_j+1} \leq n$ )

iii)  $(x_i - t_1) \cdots (x_i - t_k)$  ( $1 \leq i \leq n$ )

生成元: i) + ii) or i) + iii) for generic  $t$ , 両者の関係と完備化?

たとえば, i) + iii) において, 単に  $t = 0$  とおくと, それは  $n_k$  のみに依存しないが, 完備化は  $(n_1, \dots, n_k)$  の違いが区別できる.



例 7.  $V_t := \bigcup_{g \in GL(n, \mathbb{C})} \left\{ g \begin{pmatrix} t_1 I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & t_k I_{n_k} \end{pmatrix} g^{-1} \right\} \subset M(n, \mathbb{C})$

ただし,  $t = (t_1, \dots, t_n)$  は例 5 の形.

同様の問題: 行列の共役類の閉包の定義イデアル  $I$  (のよい生成系) は?

なお,  $I$  は  $\mathbb{C}[t, x]$ ,  $x = (x_{i,j})_{1 \leq i \leq j, 1 \leq j \leq n}$  のイデアルで  $x_{i,j}$  は  $n$  次正方形行列の  $(i, j)$  成分に対応する不定元.

$I$  の生成元として, 具体的には, 例 6 の i) + ii) を一般化した行列式因子に対応したものの, i) + iii) を一般化した最小多項式に対応するもの, などがある.

またそれらの完備化は?

べき零行列の共役類  $\leftrightarrow n$  の分割 (ヤング図式の転置で上と対応)

例 8. リー環への量子化 (例 7 も含め, 詳しくは [3, 5])

$$\mathfrak{gl}_n^\epsilon = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \mathbb{C} X_{i,j} : [X_{i,j}, X_{k,l}] = \epsilon(\delta_{j,k} X_{i,l} - \delta_{l,i} X_{k,j})$$

$U(\mathfrak{gl}_n^\epsilon) : \mathfrak{gl}_n^\epsilon$  の普遍包絡環

$\epsilon = 1$ : リー環の普遍包絡環

$\epsilon = 0$ : 多項式環 (例 6 に対応)

$I_t \Rightarrow I_t^\epsilon : U(\mathfrak{gl}_n^\epsilon)$  の両側イデアル ( $I_t$  の量子化)

$I_t^1$ : 一般スカラー型 Verma 加群の零化イデアル

この場合, [3] で正則完備化の基底を得ている.

例 9. 一般化 (cf. [4, 5])

$\mathfrak{S}_n \rightarrow$  Weyl 群

$\mathfrak{gl}_n \rightarrow$  半単純リー環

最小多項式を拡張したものが具体的に構成できるが, その完備化は未だ不明確.

問題 2. イデアルに対称群 (より一般に Weyl 群) や  $GL(n, \mathbb{C})$  (より一般に半単純リー群) が作用しているとする. その作用が見えるよい基底は?

群の作用で不変なイデアルについてのよい (Gröbner 的?) 基底は?

## 5 終わりに

本研究は, JSPS 科学研究費 JP24224002, JP25187017, JP15K00944 の助成を受けたものです.

## 参考文献

- [1] T. Oshima and J. Sekiguchi, Eigenspaces of invariant differential operators on an affine symmetric space, *Invent. Math.* **57** (1980), 1–81.
- [2] T. Oshima, Asymptotic behavior of spherical functions on semisimple symmetric spaces, *Advanced Studies in Pure Math.* **14** (1988), 561–601.
- [3] T. Oshima, A quantization of conjugacy classes of matrices, *Advances in Math.* **196** (2005), 124–146.
- [4] T. Oshima and H. Oda, Minimal polynomials and annihilators of generalized Verma modules of the scalar type, *Journal of Lie Theory* **16** (2006), 155–219.
- [5] T. Oshima, Annihilators of generalized Verma modules of the scalar type for classical Lie algebras, “Harmonic Analysis, Group Representations, Automorphic forms and Invariant Theory”, in honor of Roger Howe, *Lecture Notes Series* **12** (2007), 277–319, National University of Singapore.
- [6] T. Oshima and H. Oda, A quantization of linear algebra and its application to integral geometry, “Geometric Analysis and Integral Geometry”, *Contemporary Mathematics* **598** (2013), 189–208.
- [7] 大島利雄, `os_muldif.rr` および `os_muldif.pdf`, a library for computer algebra Risa/Asir, 2007–2017, <ftp://akagi.ms.u-tokyo.ac.jp/pub/math/muldif/>