Rigid 分割 3.1.1 予想

大島利雄（東京大学大学院数理科学研究科） 2008 年 1 月 13 日

正整数 n の分割 3 つの組 $\mathbf{m}$ を考えます.

$$n = m_{j,1} + m_{j,2} + \cdots + m_{j,n_j} \qquad (j = 0,\ 1,\ 2)$$
$$\mathbf{m} = (m_{0,1}, m_{0,2}, \ldots, m_{0,n_0}\,;\, m_{1,1}, \ldots, m_{1,n_1}\,;\, m_{2,1}, \ldots, m_{2,n_2}).$$

その全体を $\mathcal{P}_3^{(n)}$，さらに $n = \operatorname{ord}\mathbf{m}$ および $\mathcal{P}_3 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_3^{(n)}$ とおきます.

例： $n = 4$ のとき，$(3,1\,;\,2,2\,;\,1,1,1,1)$ や $(2,1,1\,;\,2,1,1\,;\,2,1,1)$ などが $\mathcal{P}_3^{(4)}$ の元です．それぞれ簡単のため $31, 22, 1111$ や $211, 211, 211$ などとも書きます.

操作 $\mathcal{K}$. 必要なら並べ替えて $\mathbf{m} = (m_{0,1}, \ldots, m_{2,n_2}) \in \mathcal{P}_3^{(n)}$ の各分割の中では大きい順に数が並んでいるとします.

$$m_{j,1} \ge m_{j,2} \ge \cdots \ge m_{j,n_j} \quad (j = 0,\ 1,\ 2)$$

数 $d := m_{0,1} + m_{1,1} + m_{2,1} - n$ が

$$0 < d \le \min\{m_{0,1}, m_{1,1}, m_{2,1}\} \tag{1}$$

を満たしているとき，$m_{j,1}$ を $m_{j,1} - d$ $(j = 0,\ 1,\ 2)$ に置き換えてできる $n - d$ の分割の組を $\mathcal{K}\mathbf{m}$ とおきます．ただし，$m_{j,1} - d = 0$ のとき，現れる 0 は分割から除きます.

Rigid 分割三つ組み. 上記の操作 $\mathcal{K}$ を何度か行って，最終的に $(1\,;1\,;1) \in \mathcal{P}_3^{(1)}$ に到達出来る $\mathcal{P}_3^{(n)}$ の全体を $\mathcal{R}_3^{(n)}$ と表し，$\mathcal{R}_3 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}_3^{(n)}$ とおきます．$\mathcal{R}_3$ の元を “Rigid 分割三つ組み” と呼びます.

例. 以下の最初の例は，$\mathcal{R}_3$ の元ですが，後者は違います.

$$31, 1111, 1111 \xrightarrow{5-4=1} 21, 111, 111 \xrightarrow{4-3=1} 11, 11, 11 \xrightarrow{2-1=1} 1, 1, 1$$
$$22, 22, 1111 \xrightarrow{5-4=1} 21, 21, 111 \xrightarrow{5-3=2} \times$$

Rigid 分解. 3 つの Rigid 分割三つ組み $\mathbf{m}$, $\mathbf{m}'$, $\mathbf{m}'' \in \mathcal{R}_3$ があって

$$m_{j,\nu} = m'_{j,\nu} + m''_{j,\nu} \quad (0 \le m'_{j,\nu} \le m_{j,\nu},\ 0 \le j \le 2,\ 1 \le \nu \le n_j) \tag{2}$$

かつ $\operatorname{ord}\mathbf{m} = \operatorname{ord}\mathbf{m}' + \operatorname{ord}\mathbf{m}''$ となっているとき，$\mathbf{m} = \mathbf{m}' \oplus \mathbf{m}''$ と表して，$\mathbf{m}$ の rigid 分解と呼びます．ここでは 0 に等しい $m'_{j,\nu}$ や $m''_{j,\nu}$ を除いて $\mathcal{R}_3$ の元とみています.

Rigid 分割 3.1.1 予想 [大島 2007].[*1] $m_{0,n_0} = m_{1,n_1} = 1$ で $j = 0, 1, 2$ において $m_{j,\nu} > 0$ $(1 \le \nu \le n_j)$, $m_{j,\nu} = 0$ $(\nu > n_j)$ となる任意の $\mathbf{m} \in \mathcal{R}_3$ に対し

$$\sum_{\substack{\mathbf{m}' \oplus \mathbf{m}'' = \mathbf{m} \\ m'_{0,n_0} = m''_{1,n_1} = 1}} m'_{j,\nu} = (n_1 - 1)m_{j,\nu} - \delta_{j,0}(1 - n_0\delta_{\nu,n_0}) + \delta_{j,1}(1 - n_1\delta_{\nu,n_1}) \qquad (0 \le j \le 2,\ 1 \le \nu \le n_j) \tag{3}$$

[*1] この予想は解決されました (2008 年 4 月 18 日)

注意. i)　予想の式で $\delta_{j,k} = \begin{cases} 0 & (j \neq k) \\ 1 & (j = k) \end{cases}$ という Kronecker の δ の記号を用いている．

ii)　予想の式 (3) で，$j = 0$, $\nu = n_0$ とおくと

Rigid 分割 3.1.1 基本予想. (3) の左辺の条件を満たす rigid 分解が $n_0 + n_1 - 2$ 個ある

となる．また，$j = 2$ とおいて ν で和をとると，(3) の左辺の条件を満たす rigid 分解全てに対する $\operatorname{ord}\mathbf{m}'$ の和は $(n_1 - 1)\operatorname{ord}\mathbf{m}$ であることを (3) は示している．

iii) たとえば Rigid 分割三つ組み $(321, 3111, 3111) \in \mathcal{R}_3^{(6)}$ に対して，予想は以下のように確かめられる（$n_0 = 3$, $n_1 = 4$）．sum において (3) の左辺の和を考えた後，三つ組みの最初の部分に 1 を加え，中央の部分から 1 を引いている（$\to$ の対応）．a は 10 を表す．

$$
\begin{aligned}
32\bar{1}, 311\underline{1}, 3111 &= 221, 3110, 2111 + 100, 0001, 1000 = 001, 1000, 1000 + 320, 2111, 2111 \\
&= 211, 2110, 2110 + 110, 1001, 1001 = 211, 2110, 2011 + 110, 1001, 1100 \\
&= 211, 2110, 2011 + 110, 1001, 1100 \\
\mathrm{sum} &= 85\bar{5}, \mathrm{a}44\underline{0}, 9333 \to 96\bar{*}, 933\underline{0}, 9333 = 3(32\bar{*}, 311\underline{0}, 3111)
\end{aligned}
$$

予想は $\operatorname{ord}\mathbf{m} \le 40$ の場合に正しいことはコンピュータにより確かめてあります（これは 4111704 個．v) を参照．vi) の例などでは容易に分かる）．

iv)　関連する数学：$\mathbf{m} \in \mathcal{R}_3^{(n)}$ となる必要十分条件は

$$
\sum_{j=0}^{2} \sum_{\nu=1}^{n_j} m_{j,\nu} \lambda_{j,\nu} = 0 \tag{4}
$$

を満たす generic な $\lambda_{j,\nu} \in \mathbb{C}$ に対し

$$
A_j \sim \bigoplus_{\nu=1}^{n_j} \lambda_{j,\nu} I_{m_{j,\nu}} \quad (j = 1,\ 2), \quad -(A_1 + A_2) \sim \bigoplus_{\nu=1}^{n_0} \lambda_{0,\nu} I_{m_{0,\nu}} \tag{5}
$$

となる正方行列の組 (A_1, A_2) が存在して既約であり，そのような組は全て相似変換で同時に移り合うこと（Deligne-Simpson 問題に対する Katz の結果）．

ただし行列 A と B が相似とは $A = gBg^{-1}$ となる可逆行列 g が存在することで（この変換を相似変換という），そのとき $A \sim B$ と表す．(A_1, A_2) が既約とはそれらの行列を $\mathbb{C}^n$ 上の線形変換とみたとき，$\{0\}$ と $\mathbb{C}^n$ 以外の共通の不変部分空間が存在しないこと．

$\mathbf{m} \in \mathcal{R}_3$ は以下の Rigidity 条件を満たします．

$$
\sum_{j=0}^{2} \sum_{\nu=1}^{n_j} m_{j,\nu}^2 - \operatorname{ord}\mathbf{m} = 2. \tag{6}
$$

Rigid でないときに Katz の操作 $\mathcal{K}$ を続けていくと，以下のいずれかが起こる．

(1) の d が 0 または負になる $\Longrightarrow$ (4) を満たす generic な $\lambda_{j,\nu}$ に対して共役でない (A_1, A_2) が無数にある（連続パラメータ）．

(1) の右側の不等式が成立しない $\Longrightarrow$ (4) を満たす generic な $\lambda_{j,\nu}$ に対して，(A_1, A_2) が存在しない.

v) 以下は rigid 分割三つ組みがどれくらいあるか示した表です.

ord	#	ord	#	ord	#	ord	#	ord	#	ord	#
1	1	6	13	11	212	16	2388	21	14040	26	66409
2	1	7	20	12	421	17	3276	22	20210	27	84644
3	1	8	45	13	588	18	5186	23	26432	28	114600
4	3	9	74	14	1004	19	6954	24	37815	29	143075
5	5	10	142	15	1481	20	10517	25	48103	30	190766

以下は $\operatorname{ord}\mathbf{m} \le 7$ を満たすもののリスト

```
1:1,1,1                    2:11,11,11
3:111,111,21               4:211,211,211
4:1111,211,22              4:1111,1111,31
5:2111,221,311             5:2111,2111,32
5:221,221,221              5:11111,221,32
5:11111,11111,41           6:3111,3111,321
6:2211,2211,411            6:2211,321,321
6:222,3111,321             6:21111,222,411
6:21111,2211,42            6:21111,3111,33
6:2211,2211,33             6:222,222,321
6:21111,222,33             6:111111,321,33
6:111111,222,42            6:111111,111111,51
7:3211,3211,421            7:3211,322,4111
7:31111,322,421            7:31111,331,4111
7:31111,31111,43           7:2221,331,4111
7:3211,322,331             7:22111,331,421
7:22111,2221,511           7:22111,3211,43
7:22111,22111,52           7:2221,322,421
7:322,322,322              7:2221,31111,43
7:211111,322,43            7:211111,2221,52
7:2221,331,331             7:2221,2221,43
7:1111111,331,43           7:1111111,1111111,61
```

vi) $111\cdots1$ という 1 のみからなる分割を含む $\mathcal{R}_3$ の元は次の Simpson の List に限ります.

1) hypergeomegtric family: $(n-1, 1\,;\, 1, \dots, 1\,;\, 1, \dots, 1)$
2) even family: $(m, m\,;\, m, m-1, 1\,;\, 1, \dots, 1)$
3) odd family: $(m+1, m\,;\, m, m, 1\,;\, 1, \dots, 1)$
4) extra case: $(42\,;\, 222\,;\, 111111)$

vii) (2) を満たす $\mathbf{m}$, $\mathbf{m}'$, $\mathbf{m}'' \in \mathcal{R}_3$ を考えます.

$$\sum_{j=0}^{2}\sum_{\nu=1}^{n_j} m'_{j,\nu}\cdot m''_{j,\nu} = \operatorname{ord}\mathbf{m}'\cdot\operatorname{ord}\mathbf{m}'' - 1 \tag{7}$$

が成り立つとき直和（分解）と呼びます．このとき $\mathbf{m}'$, $\mathbf{m}''$ が既約 rigid ならば $\mathbf{m}$ も同様であることが言えます.

viii) 「(3) の左辺を満たす rigid 分解が n_0+n_1-2 個以上ある」ことを示せば，Rigid 分割 3.1.1 予想が従うことが証明できるが，今のところ微分方程式論を使っているので自然ではない.

参考文献

M. Dettweiter and S. Reiter, *An algorithm of Katz and its applications to the inverse Galois problems*, J. Simbolic Comput. **30**(2000), 761–798.

O. A. Gleiser, *Some explicit solutions of the additive Deligne-Simpson problem and their applications*, Adv. Math. **178**(2003), 311–374.

N. M. Katz, *Rigid local systems*, Annals of Mathematics Studies 139, Princeton University Press, 1995.

V. P. Kostov, *The Deligne–Simpson problem — a survay*, J. Algebra **281**(2004), 83–108.

C. T. Simpson, *Products of Matrices*, Canadian Math. Soc. Conference Proceedings 12, AMS, Providence RI (1991), 157–185.

C. T. Simpson, *Katz's middle convolution algorithm*, 53 pp, arXiv:math/0610526.

T. Yokoyama, *Construction of systems of differential equations of Okubo normal form with rigid monodromy*, Math. Nachr. **279**(2006), 327–348.

原岡喜重, 「超幾何関数」 5. 微分方程式, すうがくの風景 7, 朝倉書店, 2002.