

Riemann 球面上の複素常微分方程式 と 多変数超幾何関数^{*1}

大島利雄

(TOSHIO OSHIMA)

城西大学 理学部

(FACULTY OF SCIENCE, JOSAI UNIVERSITY)

目次

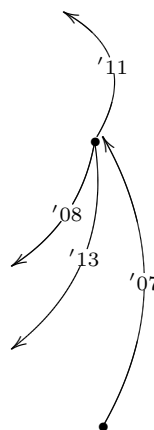
1	Introduction	2
2	偏微分から常微分へ	2
3	Gauss の超幾何関数	5
4	Weyl 代数における Addition と Middle Convolution	6
5	Fuchs 型 (確定特異点型) 常微分方程式	8
6	行列の共役類	11
7	例 (スペクトル型)	11
8	Gauss の超幾何微分方程式の Riemann scheme と既約性	12
9	Deligne-Katz-Simpson 問題と middle convolution	13
10	Kac-Moody ルート系との対応	16
11	Fractional calculus of Weyl algebra	20
12	不確定特異点 (不分岐)	23
13	スペクトル型, 合流 (Confluent) と開折 (Unfolding)	25
14	古典極限と平面代数曲線	30
15	Gauss の超幾何関数 → 多変数化 (常微分 → 偏微分)	31
16	Pfaff 系の Addition と Middle Convolution	33
17	方程式の既約性	34
18	例 (2 変数, 階数 5 以下)	36
19	KZ 型方程式の変換	40
20	べき級数解	42
21	コンピュータ・プログラム	43

^{*1} 岡シンポジウム, 於奈良女子大, 2015 年 12 月 6 日

1 Introduction

私が研究対象として常微分方程式に興味を持ったのは 2007 年の 11 月頃からで、表現論などに現れる多変数の特殊函数の大域的性質を調べるのが動機であった (cf. §2 および [O4, あとがき]). 特殊函数の原点となるのは Gauss の超幾何函数で、岩波全書の [公 III] 数学公式 III —特殊函数— の 3 分の 2 以上は Gauss の超幾何函数とその極限や特殊化の公式で占められている. Gauss 超幾何函数を基礎として種々の特殊函数 (超幾何函数というクラスといってもよい) に繋がっていく.

1. Gauss 超幾何函数
2. Bessel, Whittaker, Hermite-Weber, Airy (合流)
不確定特異点 (不分岐, 分岐)
3. 一般超幾何 (${}_3F_2, {}_4F_3, \dots$), Jordan-Pochhammer
rigid: Even family,...
4. Heun (アクセサリ・パラメータ)
(\rightarrow Painlevé eq.)
non-rigid: Garnier,...
5. Appell の多変数超幾何
Aomoto-Gelfand の超幾何
Heckman-Opdam の超幾何
KZ 方程式



上において、特殊函数は線型微分方程式の解として与えられ、2. は不確定特異点を持つ方程式で、確定特異点からの合流操作で得られる. 3. は特殊函数としての性質がよく分かる高階の線型常微分方程式の解で、今ではリジッドと呼ばれるクラスである. 4. はリジッドでないクラスで、アクセサリ・パラメータの存在と共にモノドロミー保存変形を通じて Painlevé 方程式の理論と繋がっている. 5. は多変数の超幾何函数である. これらの拡張は、それぞれの項の最初に挙げた古典的に知られているものから、最近研究が急速に進展しているものもある (cf. [H3]).

上の右に記したのは、私が研究対象として興味を持ち始めた年であり、新たな見地からこれらが一般的、かつ統一的に理解できるようになった. それについての解説がこの講義の目的である.

2 偏微分から常微分へ

表現論で重要な特殊函数で以下のようなものがあり、下のものは上のもの一般化とみなせる. それらの大域的性質、特に原点と無限遠での漸近展開の係数との接続公式は重要な定数を与え、それぞれ以下のように呼ばれる公式にあたっている.

特殊函数	公式
指標	Weyl の次元公式
帯球函数	Gindikin-Karpelevic の公式 (c -函数)
Heckman-Opdam の超幾何 [HO]	Gauss の和公式 (by Opdam)

コンパクトリー群の既約表現の指標は、複素解析的に捕らえると、無限遠で漸近的に指数関数となるが、その係数は1になっていて (highest weight の重複度 1), 原点での指標の値が表現の次元となる. その比を表現のパラメータの highest weight によって与える公式が Weyl の次元公式にあたる, ということである. 非コンパクト Riemann 対称空間の帯球関数は, 原点で1と正規化されるが, 無限遠では漸近的に指数関数 (平面波) となり, その係数が c 函数と呼ばれる. それは Riemann 対称空間上の調和解析での Plancherel の公式での測度を与える量となっている*2.

これらをより一般化した函数が Heckman-Opdam の超幾何函数であり, この函数の原点の値と無限遠での漸近展開との接続関係は, 彼らの超幾何函数の理論展開において, 当初から予想されていたにもかかわらず, かなり後になって, Opdam [Op] が苦勞の末 (Opdam の弁) 証明した. 帯球函数として現れるパラメータの場合は Gindikin-Karpelevic の公式によって知られているので, それを整数 Lattice 上にまで拡張し, 函数等式を使って零点やあるいは漸近挙動を調べ, 正則関数の増大度と零点の密度との関係 (値分布) から示すというものであった.

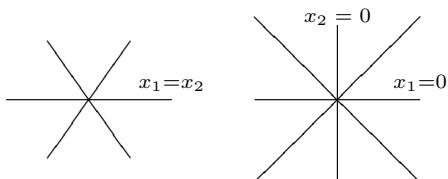
筆者は, 2007 年前後にこの超幾何函数の特殊函数としての性質を調べ, 示野氏との共同研究 [OS] で, その合流や他の実型について研究し, この接続公式の自然な証明にも興味を持った.

Heckman-Opdam の超幾何函数は, ルート系に対して定まる以下の微分作用素から決まる可換微分作用素系の同時固有函数として定義される.

$$L(k)_{A_n} := \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} 2k \coth(x_i - x_j) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

$$L(k)_{BC_n} := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{k=1}^n (2k_2 \coth x_k + 4k_3 \coth 2x_k) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j \leq n} k_1 \left(\coth(x_i - x_j) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + \coth(x_i + x_j) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right)$$



$$(A_2)_{x_1=x_2} : {}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2; x)$$

$$(BC_2)_{x_1=0} : \text{Even family (by Simpson)}$$

$$(BC_2)_{x_1=x_2} : \rightsquigarrow \text{Dotsenko-Fateev eq.}$$

ルート系が A_n 型の場合の 2 階の偏微分作用素が $L(k)_{A_n}$ で, これを含む互いに可換で最高階が定数係数の偏微分作用素で A_n 型 Weyl 群で不変, すなわち座標の入れ換えで不変な系がただ一つ定まる. その同時固有関数が Heckman-Opdam の超幾何函数である (原点で 1 と正規化する). BC_n 型の時も同様で $L(k)_{BC_n}$ と可換で, 座標の入れ替えと符号反転で不変な可換系として作用

*2 Gindikin-Karpelevic の公式の特殊化で, Weyl の次元公式が得られる (cf. [O1]).

素が一意的に定義される (cf. [OOS])^{*3}.

また, ゲージ変換 $\varphi_k(x) \circ L(k)_{A_n} \circ \varphi_k(x)^{-1}$ によって 1 階の項を消して Schrödinger 型的作用素 (ラプラシアン+ポテンシャル) に直すと, 完全積分可能量子系^{*4}となる. A_n 型の場合は Sutherland 模型と呼ばれる. $\varphi(x)$ はその基底状態を与える波動関数である.

$$\varphi_k(x) \circ L(k)_{A_n} \circ \varphi_k(x)^{-1} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} - \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} \frac{2k(k-1)}{\sinh^2(x_j - x_i)} - \frac{k^2 n(n+1)(n+2)}{3},$$

$$\varphi_k(x) = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} \sinh^k(x_i - x_j).$$

[OS] において, A_2 型の Heckman-Opdam 超幾何関数の原点と無限遠との接続を調べるため, 方程式の確定特異点の特異集合 $x_1 = x_2$ へのその関数の制限を考えた. 制限の満たす常微分方程式は, ${}_3F_2$ の記号で書かれる 3 階の一般超幾何関数の方程式と同型になり, その接続公式から $x_1 = x_2 \rightarrow \infty$ の漸近展開との関係が分かった. 一方 $x_1 = x_2 \rightarrow \infty$ の無限遠方向と真に知りたい無限遠方向 ($x_1, \frac{x_2}{x_1} \rightarrow \infty$) との関係は, A_1 型の同様の接続問題に帰着されて, 求めたいものが得られた. より一般の A_n 型の場合は $x_1 = \dots = x_n$ に制限することにより, ${}_{n+1}F_n$ の満たす方程式が得られ, その無限遠方向と求めるべきものとの関係は A_{n-1} 型の問題に帰着される, という具合に, 表現論の結果に負うことなく [Op] の結果を見直すことができた.

一方, B_2 型の時に同様な考察をして, $x_1 = 0$ に制限すると 4 階方程式が現れた. これを調べていくうちに原岡 [H1] に出会い, それは Simpson [Si] の分類した even family というものに当たることを知った^{*5}. しかしながらこの方程式の接続問題の解は知られておらず, 接続問題を専門に扱っている人たちの話では, 計算はとても困難ということで解は得られなかった (現在では様々な方法で得られている). 具体的に求められるはず, と考えて自分で研究を始め, 2007 年の 11 月に接続公式を求めることができた. その考え方はより一般の方程式にも適応でき, Katz による middle convolution [Kaz] などの新しい考え方を取り入れることにより, 線型常微分方程式についての新たな理解ができるようになって, 私の興味を引く主な研究対象の一つとなった.

B_n 型の場合は, $x_1 = \dots = x_{n-1} = 0$ に制限すると $2n$ 階の even family が現れる. 一方, B_2 型の場合 $x_1 = x_2$ に制限すると, Dotsenko-Fateev の方程式に §4 で述べる変換によって変換可能なものが現れる. 後者の方程式については未知の部分が多く, これからの研究課題として残されている.

^{*3} 帯球関数のときは, k が対称空間のルート系のルートの重複度にあたる整数になっている. また, $L(k)_{A_1}$ は Legendre の微分方程式, $L(k)_{BC_1}$ は Gauss の超幾何微分方程式と同型である.

^{*4} 様々な完全積分可能量子系の高階の分類や高階作用素の具体形については [O3] を参照.

^{*5} Simpson の even family は, ある種の行列の問題に関する分類から出てきたもので, 他の分野の問題に自然に現れてきたことは初めてである, ということで注目を受けた.

3 Gauss の超幾何関数

それでは、原点となる Gauss の超幾何関数を考察してみよう*6. この講義では、まず Gauss の超幾何微分方程式を例にとって、新しい考え方を紹介していく.

Gauss の超幾何級数は

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n n!} x^n \quad ((a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1))$$

と定義されるが、積分表示

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 s^{\beta-1} (1-xs)^{-\alpha} (1-s)^{\gamma-\beta-1} ds$$

をもつ (それは以下のように示せる). この積分の変数の変換をすると

$$\begin{aligned} &= \frac{\Gamma(\gamma)x^{1-\gamma}}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^x t^{\beta-1} (1-t)^{-\alpha} (x-t)^{\gamma-\beta-1} dt \quad (t=xs) \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)} x^{1-\gamma} I_0^{\gamma-\beta} x^{\beta-1} (1-x)^{-\alpha}, \quad (1-x)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{n} (-x)^n \end{aligned}$$

となる. ただし積分変換 I_0^μ は以下のように定義され, x^λ に作用させると

$$\begin{aligned} I_0^\mu v(x) &:= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x v(t)(x-t)^{\mu-1} dt \quad (= \partial^{-\mu} v(x)), \\ I_0^\mu x^\lambda &= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x t^\lambda (x-t)^{\mu-1} dt \\ &= \frac{x^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\mu)} \int_0^1 s^\lambda (1-s)^{\mu-1} ds = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+1)} x^{\lambda+\mu} \end{aligned}$$

となる ($x \in (0, 1)$). なお, 上は $\beta, \gamma - \beta, \mu - 1, \lambda - 1, \mu$ の実部が正のとき積分が収束して意味を持つが, それ以外の場合もパラメータの解析接続によって意味を持たせることができる*7. 作用素 I_0^μ は, μ が正整数の時は μ 階の積分, 負のときは $-\mu$ 階の微分に対応し, Riemann Liouville 積分と呼ばれる. この変換は, 分数階微分作用素*8と考えることもでき, また, 原点での函数の特異部分に作用する可逆な超局所作用素と考えることもできる*9. 函数の (原点での) 特異性に注目すると, 自然な意味を持たせることができることに注意しておこう.

*6 新しい考え方は, 最も基本的な場合でも非自明なことを示していることが多い. 今回の見方は, Gauss の超幾何関数の接続公式に限っても今までに無かった定積分の値の計算による新証明を与える (cf. [O5, Lemma 12.2]).

一方, [O7] は積分などを用いなくて Gauss の超幾何関数を初等的に解析している.

*7 $\beta, \gamma - \beta, \lambda + 1, \lambda + \mu + 1$ の値が 0 または負の整数の時を除く.

*8 複素数階微分作用素と呼ぶのが適当かも知れない.

*9 そこで, $I_0^\mu = \partial^{-\mu}$ と書くことにする. なお, 積分の出発点は, 函数の特異点を選ぶ.

さて、上の計算を合わせると、最初の積分表示は

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)} x^{1-\gamma} I_0^{\gamma-\beta} x^{\beta-1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{n} (-1)^n x^n &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)} x^{1-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n+\gamma)} \frac{(\alpha)_n}{n!} x^{(n+\beta-1)+(\gamma-\beta)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n n!} x^n \end{aligned}$$

となつて、Gauss の超幾何級数であることが分かる。

すなわち、1 という自明な微分方程式 $u' = 0$ の解に $x^{\beta-1}(1-x)^{-\alpha}$ を掛け、 $\gamma - \beta$ 階の積分をし、さらに $x^{1-\gamma}$ を掛けた結果が Gauss の超幾何関数である。

また、原点でのべきの指数を考えると、 $x^{\beta-1}(1-x)^{-\alpha}$ は $\beta - 1$ 次から始まり、 $I_0^{\gamma-\beta}$ は $\gamma - \beta$ 階の積分なので $\gamma - \beta$ 次（上げる）作用素で、最後に $x^{1-\gamma}$ による掛け算は $1 - \gamma$ 次作用素で最終結果は $(\beta - 1) + (\gamma - \beta) + (1 - \gamma) = 0$ 次となり、原点で正則で原点での値は消えない、と考えることができる。

4 Weyl 代数における Addition と Middle Convolution

多項式係数の微分方程式の解に対して、多項式のべきをかけた、あるいは分数階微分 $\partial^{-\mu}$ を施した結果は、どのような微分方程式を満たすかを考察しよう。

$$W[x] := \mathbb{C}[x, \partial] \quad (\partial = \frac{d}{dx}, [\partial, x] = 1 : \text{Weyl 代数})$$

$$W(x) := \mathbb{C}(x) \otimes_{\mathbb{C}[x]} W[x]$$

$W[x]$ は多項式係数の線型常微分作用素の環で、 $W(x)$ は係数を有理関数まで拡大した環である。以下のように変換されるとする ($P, P_j \in W[x]$)。

$$v(x) \mapsto v_1(x) = \varphi(x)v(x), \quad v(x) \mapsto v_2(x) = I_0^\mu v(x) = \partial^{-\mu} v(x)$$

$$Pv(x) = 0 \Leftrightarrow P_j v_j(x) = 0$$

- 関数を掛けることによる変換は、以下のようになる。

$$\tilde{P}_1 = \text{Ad}(\varphi(x))P := \varphi \circ P \circ \varphi^{-1} \in W(x) : x \mapsto x, \partial \mapsto \partial - \frac{\varphi'}{\varphi}$$

$$P_1 := \text{RAd}(\varphi)P = c(x)\tilde{P}_1 \in W[x], \quad c(x) \in \mathbb{C}(x) \setminus \{0\}, \deg_x P_1: \text{最小 (addition)}$$

ここで、 $\frac{\varphi'}{\varphi}$ は有理関数になるとする^{*10}。Ad($\varphi(x)$) は環同型を与えることに注意。c(x) \tilde{P}_1 の係数が多項式で、次数が最も小さくなるように（係数に共通因子がないように）c(x) を選ぶ。

- 分数階微分 $\partial^{-\mu}$ による変換

$$\tilde{P}_2 = \text{Ad}(\partial^{-\mu})P := \partial^{-\mu} \circ P \circ \partial^\mu : \partial \mapsto \partial,$$

$$x \mapsto \partial^{-\mu} \circ x \circ \partial^\mu = x - \mu \partial^{-1}, \quad \vartheta \mapsto \vartheta - \mu, \quad \vartheta := x\partial$$

^{*10} $\varphi(x)$ は、 $(x-c)^\lambda$ や $e^{h(x)}$ ($h(x)$ は有理関数) のような関数の積ならばよい。確定特異点の場合は、前者のみを考えれば十分。

ここで ∂^{-1} が気になる場合は、掛け算作用素 x と微分作用素 $\vartheta = x\partial$ の変換を考えればよい^{*11}.

$$P_2 := \text{RAd}(\partial^{-\mu})P = \text{mc}_\mu(P) := \partial^{-m} \text{Ad}(\partial^{-\mu})(\partial^k P) \in W[x]$$

正整数 k を十分大きくとる (たとえば, P の係数の多項式の最大次数) と

$$\partial^k P = \sum_{i \geq 0, j \geq 0} c_{i,j} \partial^i \vartheta^j \xrightarrow{\text{Ad}(\partial^{-\mu})} \sum_{i \geq 0, j \geq 0} c_{i,j} \partial^i (\vartheta - \mu)^j \in W[x]$$

のように表せる. そのあと, 整数 m を $\text{mc}_\mu(P) \in W[x]$ となる中で最大に選ぶ (∂ の負べきも考えた計算では, $k=0$ としてもよい^{*12}). 結果が k の選び方に依らないのは明らかである. m を最大に取るのは, 特異部分 (の解析接続) が満たす最小の方程式を得るためである.

定義から, 以下のことが成り立つことが分かる.

$$\text{mc}_\mu \circ \text{mc}_{\mu'} = \text{mc}_{\mu+\mu'}, \quad \text{mc}_0 = \text{id}$$

$\text{RAd}((x-c)^\lambda)$ や mc_μ は Katz [Kaz] の定義した *addition* および *middle convolution* にあたるものになるので, 同じように名づけることにする.

さて, 前節での Gauss の超幾何関数の構成に関連して, 以下をチェックしてみよう. 右辺は Gauss の超幾何級数 $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ を零化する微分作用素である.

$$\text{RAd}(x^{1-\gamma}) \circ \text{RAd}(\partial^{\beta-\gamma}) \circ \text{RAd}(x^{\beta-1}(1-x)^{-\alpha})\partial = x(1-x)\partial^2 + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)\partial + \alpha\beta$$

なお, 以下の R は $W(x)$ の元に左から有理関数を掛けて x について最小次数の $W[x]$ の元に変換する作用素である (環同型ではない).

$$\begin{aligned} \text{RAd}(x^{\beta-1}(1-x)^{-\alpha})\partial &= R\left(\partial - \frac{\beta-1}{x} - \frac{\alpha}{1-x}\right) = x(1-x)\partial - (\beta-1)(1-x) - \alpha x \\ &= \underbrace{(\vartheta - \beta + 1)}_{0 \text{ 次}} - \underbrace{x(\vartheta + \alpha - \beta + 1)}_{1 \text{ 次}} \quad (\partial x = \vartheta + 1, x: 1 \text{ 次}, \partial: -1 \text{ 次}, \vartheta: 0 \text{ 次}) \\ &\xrightarrow{\text{Ad}(\partial^{\beta-\gamma})} \partial(\vartheta - \gamma + 1) - (\vartheta + \beta - \gamma + 1)(\vartheta + \alpha - \gamma + 1) \quad (\vartheta \mapsto \vartheta + \beta - \gamma) \\ &\xrightarrow{\text{Ad}(x^{1-\gamma})} \left(\partial - \frac{1-\gamma}{x}\right)x\partial - (\vartheta + \beta)(\vartheta + \alpha) = (\vartheta + \gamma)\partial - (\vartheta + \alpha)(\vartheta + \beta) \\ &= x(1-x)\partial^2 + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)\partial + \alpha\beta. \end{aligned}$$

ここで

$$\text{Ad}(x^\lambda)\vartheta = \vartheta - \lambda, \quad \vartheta^2 = x^2\partial^2 + x\partial, \quad x(\vartheta + \gamma)\partial = (\vartheta + \gamma - 1)\vartheta$$

に注意しておく.

Gauss の超幾何微分方程式

$$(x(1-x)\partial^2 + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)\partial + \alpha\beta)u = 0$$

^{*11} 演習問題. 正しいことをチェックして下さい (部分積分を使うとよい). なお, ϑ は原点での次数を計る作用素で, $\partial^{-\mu}$ は次数を μ 上げる.

^{*12} x や ∂ を有理式にまで広げた作用素を考えてもよいが, ここでは両者を同時には有理式にした作用素は考えない. また $(x, \partial) \mapsto (-\partial, x)$ という変換は, 環同型を与えることに注意.

の解のべき級数解を求めてみよう.

$$\underbrace{(\vartheta + \gamma - 1)\vartheta u(x)}_{0 \text{ 次}} = \underbrace{x(\vartheta + \alpha)(\vartheta + \beta) u(x)}_{1 \text{ 次 (以上)}},$$

$$u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_n x^n.$$

方程式の x^n の係数を比較すると

$$x^n \text{ の係数 : } (n + \gamma - 1)n \cdot c_n = (n - 1 + \alpha)(n - 1 + \beta) \cdot c_{n-1} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

となるので

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{(\alpha + n - 1)(\beta + n - 1)}{(\gamma + n - 1)(n)} c_{n-1} = \dots \\ &= \frac{(\alpha + n - 1)(\alpha + n - 2) \cdots (\alpha) \cdot (\beta + n - 1)(\beta + n - 2) \cdots (\beta)}{s(\gamma + n - 1)(\gamma + n - 2) \cdots (\gamma) \cdot (n)(n - 1) \cdots 1} c_0 \\ &= \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n n!} c_0 \end{aligned}$$

が得られる.

5 Fuchs 型 (確定特異点型) 常微分方程式

一般の方程式を扱うため, いくつかの概念や基本問題について説明しよう.

定義 5.1. n 階の方程式 $Pu = 0$ が $x = 0$ を特異点とするとき, それが確定特異点とは

$$\left[Pu = 0 \Leftrightarrow \underbrace{p(\vartheta)}_{0 \text{ 次}} u = \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{x^j q_j(\vartheta)}_{j \text{ 次}} u \quad (p \text{ は } n \text{ 次多項式で, } p, q_j \in \mathbb{C}[\vartheta]) \right]$$

すなわち, P の n 階の係数を $a_n(x)$ とするならば, $a_n(x)^{-1}P$ の係数に原点で極をもつものがあるとき, $Pu = 0$ は $x = 0$ を特異点に持つといい, 特異点が確定特異点であるとは「 $x^n a_n(x)^{-1}P$ は x に関して負の次数の項を持たない」ということができる.

このとき, $p(s) = 0$ の根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ を $x = 0$ における特性指数という.

Riemann 球面 ($\mathbb{P}_\mathbb{C}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) の原点以外の $x = c_j$ という点に対しては, 一次分数変換によって c_j を原点に移して考えれば, 同じように定義することができる.

定義にある作用素 P は

$$\text{Ad}(x^{-\lambda})(p(\vartheta) - \sum_{j>0} x^j q_j(\vartheta)) = p(\vartheta + \lambda) - \sum_{j>0} x^j q_j(\vartheta + \lambda)$$

を満たすので, $\lambda = \lambda_j$ とおくと $p(s + \lambda_j) = 0$ は $s = 0$ を根に持ち, $x^{\lambda_j} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ という形の解をもつことが分かる*13.

*13 より正確には, $\lambda_\nu - \lambda_j \notin \{1, 2, 3, \dots\}$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) ならば正しい.

たとえば Gauss の超幾何微分方程式の $x = 0$ での特性指数は、 0 と $1 - \gamma$ であって

$$\text{Ad}(x^{\gamma-1})((\vartheta + \gamma - 1)\vartheta) - x(\vartheta + \alpha)(\vartheta + \beta) = \vartheta(\vartheta - \gamma + 1) - x(\vartheta + \alpha - \gamma + 1)(\vartheta + \beta - \gamma + 1)$$

という変換で (α, β, γ) は $(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma)$ に変わる. よって, Gauss の超幾何微分方程式の原点での独立解は $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ と $x^{1-\gamma}F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma; x)$ で与えられる.

また, $x \mapsto 1 - x, x \mapsto \frac{1}{x}$ という一次分数変換を施してみると, Gauss の超幾何微分方程式は $x = 0, 1, \infty$ の 3 点を確定特異点にもち, $x = 1$ と $x = \infty$ での特性指数は, それぞれ $0, \gamma - \alpha - \beta$ および α, β であることが分かり, 特異点での独立解が $x = 0$ のときと同様, $x = 1$ や $x = \infty$ においても Gauss の超幾何級数を用いて表せることも分かる.

定義 5.2. 多項式係数の線型常微分方程式 $Pu = 0$ は $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ 上に有限個の特異点を持つが, それらが全て確定特異点となるとき **Fuchs 型方程式** という.

これは次のように述べても同値である.

- $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ 上の線型常微分方程式 $Pu = 0$ で \forall 解 $u(x)$ が特異点 c_j で (一次分数変換で $c_j = 0$ としたとき), 以下の評価を満たす ($j = 0, 1, \dots, p$)*14.

$$|u(x)| < \exists C|x|^{-\exists m} \quad (|\arg x| \text{ が有界で } x \rightarrow 0) \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow P = \left(\prod_{j=0}^{p-1} (x - c_j)^n \right) \partial^n + a_{n-1}(x) \partial^{n-1} + \dots + a_1(x) \partial + a_0(x) \in W[x], \quad \partial := \frac{d}{dx}$$

$$(c_j \text{ での } a_\nu(x) \text{ の零の位数} \geq \nu \text{ で } \deg a_\nu(x) \leq n(p-1) + \nu$$

- $u_j(x) = (u_{j,1}, \dots, u_{j,n})$: $c_j = 0$ での局所解は以下の漸近挙動をもつ ($\lambda_{j,i} \in \mathbb{C}, k_{j,i} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$).
 $u_{j,i} \sim x^{\lambda_{j,i}} \log^{k_{j,i}} x \quad (i = 1, \dots, n), \quad \{(\lambda_{j,i}, k_{j,i}); i = 1, \dots, n\}$
 $\{\lambda_{j,i} \mid i = 1, \dots, n\}$: c_j での 特性指数

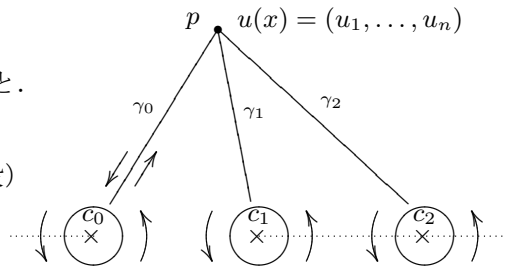
- (局所) モノドロミーとは

γ_j に沿った解析接続による解空間の線型変換のこと.

$$\gamma_j u(z) = u(z) M_j \quad (M_j \in GL(n, \mathbb{C}))$$

$$M_j = G_j e^{2\pi\sqrt{-1}A_j} G_j^{-1} \sim e^{2\pi\sqrt{-1}A_j} \quad (\text{互いに共役})$$

$$M_j \text{ : 半単純} \Rightarrow A_j = \text{diag}(\lambda_{j,1}, \dots, \lambda_{j,n})$$



- Fuchs 型微分方程式全体の空間において

addition と middle convolution を調べよ!

これは以下の基本問題を解く上で決定的役割を果たした.

Deligne-Katz-Simpson 問題, すなわち

局所モノドロミー $\Rightarrow \exists?$ フックス型常微分方程式

*14 $\deg a_\nu(x)$ に対する条件は, ∞ が高々確定特異点ということから要請される.

特異点での局所モノドロミーを与えたとき、それを実現するフックス型微分方程式が存在するかどうかが判定せよ*15, という問題である.

「局所モノドロミー行列 M_j の固有値の重複度」は (方程式の階数) n の分割を与えるが, 「各特異点 $x = c_j$ での固有値の重複度」*16 という組み合わせ的データが重要である.

$$n = \text{ord } \mathbf{m} = m_{j,1} + \cdots + m_{j,n_j} \quad (j = 0, \dots, p) : \text{スペクトル型}$$

$$x = c_j \text{ での特性指数} : \{ \lambda_{j,\nu} + i \mid \nu = 1, \dots, n_j, 0 \leq i < m_{j,\nu} \}$$

特異点でない一般の正則点での局所モノドロミー行列は単位行列で, その点での特性指数は $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ となる. このように重複度に応じて特性指数は 1 つずつずれるとする. なお, 特性指数に重複度があれば, 対数項をもつ局所解が現れて局所モノドロミーは半単純でない.

定義 5.3 ([O5, Definition 4.6]). Fuchs 型の微分作用素 P の各特異点 $x = c_j$ での固有値の重複度と特性指数との組の以下のようなデータを一般化 **Riemann scheme** (GRS) という.

$$\{ \lambda_{\mathbf{m}} \} := \left\{ \begin{array}{cccc} x = c_0 = \infty & c_1 & \cdots & c_p \\ [\lambda_{0,1}]_{(m_{0,1})} & [\lambda_{1,1}]_{(m_{1,1})} & \cdots & [\lambda_{p,1}]_{(m_{p,1})} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [\lambda_{0,n_0}]_{(m_{0,n_0})} & [\lambda_{1,n_1}]_{(m_{1,n_1})} & \cdots & [\lambda_{p,n_p}]_{(m_{p,n_p})} \end{array} \right\}, \quad [\lambda]_{(m)} := \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda+1 \\ \vdots \\ \lambda+m-1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{m} = (\mathbf{m}_0, \dots, \mathbf{m}_p) = ((m_{0,1}, \dots, m_{0,n_0}), \dots, (m_{p,1}, \dots, m_{p,n_p}))$$

: $(p+1)$ 組の $n = \text{ord } \mathbf{m}$ の分割 (スペクトル型)

ここで, 「 $\lambda_{j,\nu} - \lambda_{j,\nu'} \notin \mathbb{Z} \ (\forall \nu \neq \nu') \Rightarrow$ 局所モノドロミーが半単純」 という条件を課す*17.

一般化 Riemann scheme の $[\lambda_{j,\nu}]_{(m_{j,\nu})}$ は, 上のような列ベクトルであるが, その括弧を取って並べたものが通常の Riemann scheme である. GRS は単に局所モノドロミー行列の固有値だけでなくその共役類に関する情報 (対角化可能かどうか) を含んだデータとなっている.

定義 5.4 (Fuchs 条件). 上の一般化 Riemann scheme をもつ Fuchs 型方程式は, **Fuchs 条件***18

$$|\{ \lambda_{\mathbf{m}} \}| := \sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{n_j} m_{j,\nu} \lambda_{j,\nu} - \text{ord } \mathbf{m} + \frac{1}{2} \text{idx } \mathbf{m} = 0 \quad (\text{FC})$$

を満たす. ここで

$$\text{idx } \mathbf{m} := 2n^2 - \sum_{j=0}^p \left(n^2 - \sum_{\nu=1}^{n_j} m_{j,\nu}^2 \right) \quad (3)$$

は Katz [Kaz] により導入された **rigidity 指数** (index of rigidity) である. これは常に偶数の値をとる (\Rightarrow 演習問題).

*15 通常は, 「既約なフックス型微分方程式が存在するか」を考える.

*16 M_j が対角化可能でないときは次節参照

*17 条件 $\lambda_{j,\nu} - \lambda_{j,\nu'} \notin \mathbb{Z}$ が成り立たないときの定義は次節で述べる (より正確には cf. [O5]). 実際には方程式の係数は Gauss の超幾何微分方程式のように $\lambda_{j,\nu}$ などについて多項式となるので (これは自明ではない), 条件が成り立っている場合から自然に定まるものと考えてもよい.

*18 Fuchs の関係式ともいう.

6 行列の共役類

n 次正方行列 A のスペクトル型が $n = m_1 + \cdots + m_r$ で、重複度 m_j に対する固有値が μ_j である ($j = 1, \dots, r$) ということを以下のような代表元 $L(\mathbf{m}, \mu)$ と共役になることと定義する*¹⁹.

$$L(\mathbf{m}, \mu) := \begin{pmatrix} \mu_1 I_{m_1} & I_{m_1, m_2} & & & & \\ & \mu_2 I_{m_2} & I_{m_2, m_3} & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \mu_{r-1} I_{m_{r-1}} & I_{m_{r-1}, m_r} & \\ & & & & \mu_r I_{m_r} & \end{pmatrix}, \quad I_{m, m'} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 0 \\ & & & & \vdots \end{pmatrix}$$

ただし I_m は m 次の単位行列で

$$m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_r$$

であるとする. この条件は

$$\text{rank} \prod_{\nu=1}^k (A - \mu_\nu) = n - m_1 - m_2 - \cdots - m_k \quad (k = 1, 2, \dots, r) \quad (4)$$

と同値である.

前節の GRS の定義で、特性指数に対して、条件 $\lambda_{j, \nu} - \lambda_{j, \nu'} \notin \mathbb{Z}$ ($\forall \nu \neq \nu'$) が成り立たない場合は、 $x_j = c_j$ における局所モノドロミーが

$$L((m_{j,1}, \dots, m_{j,n_j}), (e^{2\pi i \lambda_{j,1}}, \dots, e^{2\pi i \lambda_{j,n_j}}))$$

の共役類 (の閉包に) 入ることと定義する*²⁰.

n 次正方行列の空間における共役類の閉包の定義方程式や、その $GL(n, \mathbb{C})$ の普遍包絡環の両側イデアルへの量子化については [O2] で論じられている.

7 例 (スペクトル型)

古典的な Fuchs 型常微分方程式の多くは、そのスペクトル型で特徴付けられる. たとえば

Gauss HG: $11, 11, 11$ ($2 = 1 + 1 = 1 + 1 = 1 + 1$)

Generalized HG: $1^n, n - 11, 1^n$ ($n = 1 + \cdots + 1 = (n - 1) + 1 = 1 + \cdots + 1$)

Jordan-Pochhammer: $\overbrace{p - 11, p - 11, \dots, p - 11}^{p+1}$

*¹⁹ この代表元は筆者が学生時代に考えたものであるが、安定性があるのでよく用いている (cf. [O6]). Jordan 標準形との関連は演習問題としたい.

*²⁰ $\forall \lambda_{j, \nu} - \lambda_{j, \nu'} \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ であるなら、局所モノドロミー行列のスペクトル型は Riemann scheme で与えたもの、すなわち $n = m_{j,1} + \cdots + m_{j,n_j}$ になる. たとえば、 $\lambda_{j,1} = \lambda_{j,2}$ であれば、対応する局所解に対数項が現れる.

Heun: 11, 11, 11, 11

Even family: $mm, mm - 11, 1^{2m}$ ($2m = m + m = m + (m - 1) + 1 = 1 + \dots + 1$)

Odd family: $m + 1m, mm1, 1^{2m+1}$ ($2m + 1 = (m + 1) + m = m + m + 1 = 1 + \dots + 1$)

たとえば, n 階の一般超幾何 (generalized hypergeometric) の Riemann scheme は

$$\text{GHG} : \left\{ \begin{array}{ccc} x = 0 & 1 & \infty \\ 1 - \beta_1 & [0]_{(n-1)} & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 - \beta_{n-1} & & \alpha_{n-1} \\ 0 & -\beta_n & \alpha_n \end{array} ; x \right\}, \quad \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu = \sum_{\nu=1}^n \beta_\nu$$

で与えられ, $x = 1$ で $(n - 1)$ 次元の正則解を持つことで特徴づけられる.

この場合の $x = 0$ における正則解は

$${}_nF_{n-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k \dots (\alpha_n)_k}{(\beta_1)_k \dots (\beta_{n-1})_k k!} x^k$$

with $(\gamma)_k := \gamma(\gamma + 1) \dots (\gamma + k - 1)$

で与えられ, $n = 2$ にあたる Gauss の超幾何級数の高階への拡張の一つである*21.

8 Gauss の超幾何微分方程式の Riemann scheme と既約性

多項式係数の線型常微分方程式 $Pu = 0$ が既約とは, より少ない階数の多項式係数の線型微分方程式 $Qv = 0$ の零でない解は前者の解とはなり得ないことである. 以下のようにも述べられる.

定義 8.1. Fuchs 型方程式 $Pu = 0$ が既約 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} P$ が $W(x)$ で既約*22

\Leftrightarrow 解空間のモノドロミ一群が既約*23

Gauss の超幾何

$$x(1-x)u'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)u' + \alpha\beta u = 0 \quad (\text{HG})$$

について, addition と middle convolution による構成を用いて調べてみよう.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x = 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{RAd}(x^{\beta-1}(1-x)^{-\alpha})} \left\{ \begin{array}{ccc} x = 0 & 1 & \infty \\ \beta - 1 & -\alpha & \alpha - \beta + 1 \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow[\text{mc}_{\gamma-\beta}]{\text{Ad}(\partial^{\beta-\gamma})} \left\{ \begin{array}{ccc} x = 0 & 1 & \infty \\ \gamma - 1 & \gamma - \beta - \alpha & \alpha - \gamma + 1 \\ 0 & 0 & \beta - \gamma + 1 \end{array} \right\}$$

既約性伝播 $\Leftrightarrow \beta - 1, -\alpha, (\alpha - \beta + 1) - (\beta - \gamma), \beta - \gamma \notin \mathbb{Z}$

*21 §2 で述べた A_n 型 Heckman-Opdam 超幾何関数の制限は, $x = 1$ で特性指数 $-\beta_n$ となる解に対応する.

*22 P が $W[x]$ で既約という条件とは同値でない. たとえば, 次のような可約な例がある.

$$x(1-x)\partial^2 - (1+x)\partial + 1 = \left(\frac{x(1-x)}{1+x}\partial - 1\right)((1+x)\partial - 1)$$

*23 不確定特異点をもつときは同値とは限らない. たとえば Airy 方程式 $u'' - xu = 0$ は既約.

$$\xrightarrow{\text{Ad}(x^{1-\gamma})} \left\{ \begin{array}{ccc} x=0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha \\ 1-\gamma & \gamma-\beta-\alpha & \beta \end{array} \right\} \quad (\text{HG})$$

一般に addition が既約性を保つことは明かである。

一方, middle convolution mc_μ に対してモノドロミー群の既約性が伝播するための必要十分条件は解析できる. 即ち, 既約性が伝播しないのは, 有限の特異点での一般化特性指数で恒等的に 0 でないもの, “無限遠での一般化特性指数 $-\mu - 1$ ” で恒等的に 0 でないもの, (恒等的に 0 でない) パラメータ μ , のいずれかが整数値をとる場合である*²⁴.

従って, Gauss の超幾何微分方程式の既約条件は以下のようになる.

$$(\text{HG}) \text{ が既約} \Leftrightarrow \alpha, \beta, \gamma - \alpha, \gamma - \beta \notin \mathbb{Z}$$

この既約条件の例のように, addition や middle convolution によって方程式や解の基本的性質がどう変わるかを調べることは, より基本的なこととして, Fuchs 型方程式全体の空間の中で addition や middle convolution で方程式 (特にそのスペクトル型) がどのように変化するか, また, それらの変換で不変なものは何か, を考察することが重要でかつ有益となる.

9 Deligne-Katz-Simpson 問題と middle convolution

addition で generalized Riemann scheme (GRS) がどのように変わるかは容易に分かる. すなわち, $\text{RAd}((x - c_j)^{\lambda_j})$ によってスペクトル型は変わらないが, $x = c_j$ における特性指数は λ_j 増加し, $x = \infty$ における特性指数は λ_j 減る.

定理 9.1 ([O5, Theorem 5.2]). middle convolution mc_μ による (GRS) の変換は, 以下のように入れられる*²⁵.

$$Pu = 0 \text{ with } \{\lambda_{\mathbf{m}}\} \xrightleftharpoons[\text{mc}_{-\mu}]{\text{mc}_\mu} P'u = 0 \text{ with } \{\lambda'_{\mathbf{m}'}\} \quad (P \neq \partial)$$

上のように (GRS) が対応するとしよう. ここで $m_{j,1} = 0$ となることも許すと

$$\begin{cases} \lambda_{0,1} = 1 - \mu, \\ \lambda_{j,1} = 0 \quad (j = 1, \dots, p), \\ \lambda_{j,1} = \lambda_{j,\nu} \Rightarrow m_{j,1} \geq m_{j,\nu} \end{cases}$$

と仮定してよい. このとき

$$\begin{cases} \lambda'_{j,1} = 0, & \lambda'_{j,\nu} = \lambda_{j,\nu} + \mu \quad (j > 0, \nu > 1) \\ \lambda'_{0,1} = 1 - \mu, & \lambda'_{0,\nu} = \lambda_{0,\nu} - \mu \quad (j = 0, \nu > 1) \end{cases}'$$

*²⁴ ただし, 恒等的に 0 にあたる特性指数の重複度以下の特性指数については無視する. より正確には, Katz [Kaz], Dettweiler-Reiter [DR, DR2], Oshima [O5] を参照

*²⁵ [O5] において, 定義に基づいて直接計算で示した. このとき若干の条件がパラメータに対して必要. なお, パラメータが generic ならばよい.

さらに

$$\begin{aligned} m'_{j,\nu} &= m_{j,\nu} - \delta_{\nu,1} \cdot d(\mathbf{m}), \\ d(\mathbf{m}) &= m_{0,1} + \cdots + m_{p,1} - (p-1) \text{ord } \mathbf{m}, \\ \text{idx } \mathbf{m} &= \text{idx } \mathbf{m}' \end{aligned} \quad (5)$$

となる. 特に, $\text{ord } P' = \text{ord } P - d(\mathbf{m})$ である.

$d(\mathbf{m}) > 0$ ならば mc_μ によって方程式 $Pu = 0$ の階数を下げることができるので, $d(\mathbf{m})$ をできるだけ大きくとりたい. スペクトル型の番号を並び替えて,

$$m_{j,1} \geq m_{j,\nu} \quad (\nu = 1, \dots, n_j, j = 0, \dots, p)$$

となっているとしてよい. このとき, 定理 9.1 の仮定が満たされるように addition と middle convolution を適当に取れば^{*26}, $d(\mathbf{m})$ を最大にして定理 9.1 が適応できる.

スペクトル型 (正整数 n の分割の $(p+1)$ 個の組) に対して, いくつかの定義をしておく.

定義 9.2. スペクトル型 \mathbf{m} が単調 (monotone) とは, 以下が成り立つこととする.

$$m_{j,1} \geq m_{j,2} \geq \cdots \geq m_{j,n_j} \quad (j = 0, \dots, p). \quad (6)$$

スペクトル型 \mathbf{m} が **indivisible** とは, 整数 $m_{j,\nu}$ ($\nu = 1, \dots, n_j, j = 0, \dots, p$) のすべてを割り切る正整数は 1 のみのときをいう.

スペクトル型 \mathbf{m} が **既約実現可能** とは, 一般化 Riemann scheme (2) をもつ既約 Fuchs 型方程式が Fuchs 条件 (FC) を満たす generic な特性指数 $\lambda_{j,\nu}$ に対して存在するときをいう.

スペクトル型 \mathbf{m} に対して, (5) で定まる \mathbf{m}' を $\partial \mathbf{m}$ で表す.

スペクトル型 \mathbf{m} に対して, 各 j に対して $\{m_{j,1}, \dots, m_{j,n_j}\}$ を並び替えて単調なスペクトル型に変換したものを $s\mathbf{m}$ と表す.

さて, (3) と (5) から等式

$$d(\mathbf{m}) \cdot \text{ord } \mathbf{m} = \text{idx } \mathbf{m} + \sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{n_j} (m_{j,1} - m_{j,\nu}) m_{j,\nu} \quad (7)$$

が容易に得られる. 特に $\text{idx } \mathbf{m} > 0$ で \mathbf{m} が単調ならば $d(\mathbf{m}) > 0$ である.

よって, $\text{idx } \mathbf{m} > 0$ となる GRS をもつ既約な Fuchs 型方程式は, 同じ rigidity 指数をもつ, より少ない階数の既約な Fuchs 型方程式に変換される. 既約な Fuchs 型方程式で, この変換が定義されないのは $\frac{du}{dx} = 0$ のみであるから, 何回かこの操作を続けると, この自明な方程式 (rigidity 指数は 2) に変換されることが分かる. この操作は可逆な操作であることに注意すると以下の定理が得られる.

^{*26} 具体的には $\text{mc}_{1-\sum_{j=0}^p \lambda_{j,1}} \circ \text{RAd}(\prod_{j=1}^p (x - c_j)^{-\lambda_{j,1}})$ を作用させる.

定理 9.3 ([Kaz], [O5]). $\text{idx } \mathbf{m} > 0$ となるスペクトル型 \mathbf{m} を持つ既約な単独 Fuchs 型方程式は, addition と middle convolution を何度か施すと自明な方程式 $\frac{du}{dx} = 0$ に変換される. 特に $\text{idx } \mathbf{m} = 2$ である. 逆に, スペクトル型 \mathbf{m} を持つ既約な単独 Fuchs 型方程式は, addition と middle convolution を自明な方程式 $\frac{du}{dx} = 0$ に何度か施すと得られる.

Katz [Kaz] は Schlesinger 型の 1 階の Fuchs 系に対して middle convolution を定義することによってこの定理を示した. 横山 [Yo] は Okubo 型の 1 階の Fuchs 系方程式に対して同様な結果を得た. 両者が同等なことは [O8] によって示された. [O5] は高階の微分作用素に対して middle convolution にあたるものを定義し, 単独高階方程式に対して同じ定理を得た (単独の場合は, [Kaz] において未解決問題として残っていた*27).

スペクトル型 \mathbf{m} をもつ既約 Fuchs 方程式は, $d(\mathbf{m}) > 0$ であるならば, より階数の少ない既約 Fuchs 方程式に変換できる. そこで $d(\mathbf{m}) \leq 0$ の場合が問題となるが, 以下の定理が成り立つ.

定理 9.4 (Crawley-Boevy [CB], [O5]). \mathbf{m} を単調なスペクトル型で, $d(\mathbf{m}) \leq 0$ を満たすとする.

$$\mathbf{m} \text{ は } \boxed{\text{既約実現可能}} \Leftrightarrow \boxed{\text{idx } \mathbf{m} < 0 \text{ または } \mathbf{m} \text{ は indivisible}}$$

定義 9.5. 単調なスペクトル型 \mathbf{m} が **basic** とは, 既約実現可能で $d(\mathbf{m}) \leq 0$ となることとする.

以上の結果から, 単調なスペクトル型 \mathbf{m} を与えたとき, それが既約実現可能かどうかの判定方法が分かる. すなわち, 何度か $s\partial$ を \mathbf{m} に施していたとき, それ以上施せない (正整数の分割にならない) ことが起こるか, あるいは途中で階数 $\text{ord } \mathbf{m}$ が減らないステップがあるか, のいずれかになる.

前者の場合, 途中で階数が 1 になったため, それ以上 ∂ が施せなくなったなら既約実現可能で, それ以外は既約実現可能でない.

後者の場合は, $\text{idx } \mathbf{m} \neq 0$ あるいは \mathbf{m} が indivisible なら既約実現可能で, それ以外では既約実現可能でない.

上のアルゴリズムを用いた判定例を挙げる (各ステップで $d(\mathbf{m})$ を計算している).

$$\underline{411}, \underline{411}, \underline{42}, \underline{33} \xrightarrow{15-2\cdot 6=3} \underline{111}, \underline{111}, \underline{21} \xrightarrow{4-3=1} \underline{11}, \underline{11}, \underline{11} \xrightarrow{3-2} 1, 1, 1 \quad (\text{既約実現可能})$$

$$\underline{211}, \underline{211}, \underline{111} \xrightarrow{9-8=1} \underline{111}, \underline{111}, \underline{111} \xrightarrow{3-3=0} 111, 111, 111 \quad (\text{既約実現可能})$$

$$\underline{211}, \underline{211}, \underline{211}, \underline{31} \xrightarrow{9-8=1} \underline{111}, \underline{111}, \underline{111}, \underline{21} \xrightarrow{5-6=-1} \underline{211}, \underline{211}, \underline{211}, \underline{31} \quad (\text{既約実現可能})$$

$$\underline{431}, \underline{3311}, \underline{41111} \xrightarrow{11-8=3} \underline{311}, \underline{311}, \underline{11111} \xrightarrow{7-5=2} \times \quad (\text{既約実現不可能})$$

上の $11, 11, 11, 11$ と $111, 111, 111, 21$ は basic である. また

$$\text{idx}(411, 411, 42, 33) = \text{idx}(1, 1, 1) = 2$$

$$\text{idx}(211, 211, 211) = \text{idx}(111, 111, 111) = 2 \cdot 3^2 - 3(3^2 - 3) = 0$$

$$\text{idx}(211, 211, 211, 31) = \text{idx}(111, 111, 111, 21) = 2 \cdot 3^2 - 3(3^2 - 3) - (3^2 - 2^2 - 1) = -4$$

basic なスペクトル型について, 次の有限性定理が成り立つ.

*27 1 階の Fuchs 系は単独の高階方程式に同型となるが, 一般には見かけの特異点が生じる. 見かけの特異点なしの単独方程式で同じ定理が成り立つかどうかは, 明らかではなかった.

定理 9.6 ([O5, Proposition 7.13], [O6, Proposition 3.1]). 有限性定理

同じ rigidity 指数の basic スペクトル型 \mathbf{m} は有限個

注意 9.7 ([HO]). 不分岐不確定特異点を許してもこの有限性定理は成り立つ.

Katz や Crawley-Boevy が扱った 1 階 Fuchs 系とは

$$\frac{du}{dx} = \sum_{j=1}^p \frac{A_j}{x - c_j} u \quad (\text{Schlesinger 型}) \quad (8)$$

というサイズ n の列ベクトル u についての 1 階の微分方程式であって, その場合に定理 9.3 や定理 9.4 を示した^{*28}. ここで A_j は n 次の正方行列 (定数行列) で特異点 $x = c_j$ における留数行列とよぶ^{*29}. $x = \infty$ における留数行列は $-(A_1 + \dots + A_p)$ で定義される.

加法的 Deligne-Simpson 問題とは

n 次正方行列の組 (A_0, A_1, \dots, A_p) で各 A_j の Jordan 標準形が与えられた C_j になり, さらに $A_0 + \dots + A_p = 0$ となるようになるものを求めよ (このとき Fuchs 条件は $\sum \text{Tr } C_j = 0$ となる).

乗法的 Deligne-Simpson 問題とは

n 次正方行列の組 (A_0, A_1, \dots, A_p) で各 A_j の Jordan 標準形が与えられた C_j になり, さらに $A_0 A_1 \dots A_p = I_n$ となるようになるものを求めよ (このとき $\prod \det C_j = 1$ を仮定する).

問題. 存在? (一斉共役で割ったときの) moduli? 幾何 (closure)? などの問題がある.

乗法的な場合は, 存在の必要十分条件は完全には未解決.

条件を満たす行列の組 (またはその共役類) の集合の (代数) 幾何は分かっていないことが多い.

10 Kac-Moody ルート系との対応

Fuchs 型方程式全体の空間へ addition や middle convolution の作用が Kac-Moody ルート系 (cf. [Kc]) の Weyl 群の作用と見なせることを示したのが Crawley-Boevy [CB] で, 1 階 Fuchs 系の (加法的) Deligne-Simpson 問題をそのことを用いて解いた^{*30}.

既約実現可能 \mathbf{m} と mc_μ と additions
 \Updownarrow by Crawley-Boevy
 星形 Kac-Moody ルート系の positive roots $\alpha_{\mathbf{m}}$ とその Weyl 群

星形 Kac-Moody ルート系の単純ルートの集合 Π は

$$\Pi := \{\alpha_0, \alpha_{j,\nu} \mid \nu = 1, 2, 3, \dots, j = 0, 1, 2, \dots\}.$$

$$\alpha_{\mathbf{m}} := (\text{ord } \mathbf{m})\alpha_0 + \sum_{j \geq 0, k \geq 1} \sum_{\nu > k} m_{j,\nu} \alpha_{j,k}$$

^{*28} 単独高階の場合の定理 9.4 の証明 [O5] は 1 階 Fuchs 系の場合の証明と全く異なる.

^{*29} 解は確定特異点の条件 (1) を満たすが, 単独高階のときと異なって逆 (すなわち, 特異点での留数行列の極の位数が 1 以下) は必ずしも成り立たない.

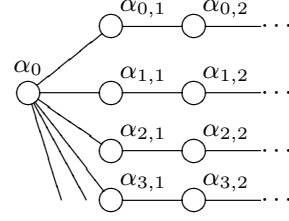
^{*30} 各 A_j に対して (4) の条件で共役類を指定することにより quiver の問題に翻訳して解いた.

$$\Lambda(\lambda) := -\frac{\alpha_0}{2} - \sum_{j \geq 0} \sum_{\nu \geq 1} \left(\sum_{1 \leq i \leq \nu} \lambda_{j,i} + \frac{1-\nu}{2} \right) \alpha_{j,\nu}$$

$$I := \{0, (j, \nu) \mid j = 0, 1, 2, \dots, \nu = 1, 2, \dots\} \text{ とおくと}$$

$\Pi = \{\alpha_i \mid i \in I\}$ である. 基本ルートの内積は

$$\begin{aligned} (\alpha|\alpha) &= 2 \quad (\alpha \in \Pi), \quad (\alpha_0|\alpha_{j,\nu}) = -\delta_{\nu,1}, \\ (\alpha_{i,\mu}|\alpha_{j,\nu}) &= \begin{cases} 0 & (i \neq j \text{ or } |\mu - \nu| > 1) \\ -1 & (i = j \text{ and } |\mu - \nu| = 1) \end{cases} \end{aligned}$$



で与えられる. 右上は Π の単純ルートとその内積を示す Dynkin 図式である*31.

ルート空間 $\sum_{i \in I} \mathbb{R}\alpha_i$ における鏡映変換 s_α ($\alpha \in \Pi$) で生成される群を Weyl 群という.

$$W := \langle s_\alpha : x \mapsto x - (\alpha|x)\alpha \mid \alpha \in \Pi \rangle \quad (\text{Weyl 群})$$

この (Π, W) の組は (対称) Kac-Moody ルート系となる (詳しくは [Kc, O5] を参照).

スペクトル型 \mathbf{m} とこのルート空間の元 $\alpha_{\mathbf{m}}$ の対応, また特性指数とルート空間の双対にほぼ対応する空間 \mathfrak{h}^\vee の元 $\Lambda(\lambda)$ との対応を先に記したように与える. より正確には,

$$\Lambda_0 := \frac{1}{2}\alpha_0 + \frac{1}{2} \sum_{j \geq 0} \sum_{\nu \geq 1} (1 - \nu)\alpha_{j,\nu},$$

$$\Lambda_{j,\nu} := \sum_{i \geq \nu+1} (\nu - i)\alpha_{j,i},$$

$$\Lambda_{j,k}^0 := \Lambda_{j,0} - \Lambda_{k,0},$$

$$\mathfrak{h}^\vee := \left(\prod_{i \in \Pi} \mathbb{C}\alpha_i \right) / \mathbb{C}(\Lambda_0 - \Lambda_{0,0}).$$

このとき, 次の等式

$$\text{idx } \mathbf{m} = (\alpha_{\mathbf{m}}|\alpha_{\mathbf{m}}), \quad d(\mathbf{m}) = (\alpha_0|\alpha_{\mathbf{m}}), \quad |\{\lambda_{\mathbf{m}}\}| = (\Lambda(\lambda) + \frac{1}{2}\alpha_{\mathbf{m}}|\alpha_{\mathbf{m}}) \quad (9)$$

および次の可換図式が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc} \{Pu = 0 \text{ with } \{\lambda_{\mathbf{m}}\}, (\text{FC})\} & \xrightarrow{\pi} & \{(\Lambda(\lambda), \alpha_{\mathbf{m}}) \in \mathfrak{h}^\vee \times \overline{\Delta}_+, (\text{FC})\} \\ \downarrow u \mapsto \begin{cases} \partial^{-\mu} u \\ (x - c_j)^{\lambda_j} u \end{cases} & \circlearrowleft & \downarrow \begin{cases} s_\alpha (\alpha \in \Pi) : \text{鏡映変換} \\ +\lambda_j \Lambda_{0,j}^0 \end{cases} \\ \{Pu = 0 \text{ with } \{\lambda_{\mathbf{m}}\}, (\text{FC})\} & \xrightarrow{\pi} & \{(\Lambda(\lambda), \alpha_{\mathbf{m}}) \in \mathfrak{h}^\vee \times \overline{\Delta}_+, (\text{FC})\} \end{array}$$

(Π, W) においてルートの集合 Σ が定義され, それは正ルートの集合 Σ_+ と負ルートの集合 Σ_- に分かれる. また, Σ は実ルートの集合 Σ^{re} と虚ルートの集合 Σ^{im} とに分かれる.

$$Q_+ := \left\{ \sum_{i \in I} k_i \alpha_i \mid k_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}, \quad Q_- = \{-\alpha \mid \alpha \in Q_+\},$$

*31 単純ルートを \circ で表し, k 本の線で結ばれた 2 つの単純ルートは, 長さが同じ単純ルートで内積が $-k$ となる (いつでも非負整数) ことを表す.

$$\begin{aligned}
\Sigma^{re} &:= W\Pi = W\alpha_0 = \Sigma_+^{re} \cup \Sigma_-^{re}, \quad \Sigma = \Sigma^{re} \cup \Sigma^{im}, \\
\Sigma_{\pm} &= \Sigma \cap Q_{\pm}, \quad \Sigma_{\pm}^{re} = \Sigma^{re} \cap Q_{\pm}, \\
\Sigma_{\pm}^{im} &:= \{\alpha \in Q_{\pm} \mid W\alpha \in Q_{\pm}\}, \quad \Sigma^{im} := \Sigma_+^{im} \cup \Sigma_-^{im}, \\
\bar{\Delta}_+ &:= \{\alpha = \sum_{i \in I} k_i \alpha_i \in \Sigma_+ \mid (\alpha|\alpha) = 2 \Rightarrow k_0 > 0, \\
&\quad (\alpha|\alpha) = 0 \Rightarrow k_i \text{の最大公約数は } 1\}.
\end{aligned}$$

定義 10.1. $\alpha := \sum_{i \in I} k_i \alpha_i$ に対して, 以下のように定義する.

$$\begin{aligned}
\text{ord } \alpha &:= k_0, \\
\text{supp } \alpha &:= \{\alpha_i \mid k_i \neq 0\} \subset \Pi, \\
\alpha \text{ は indivisible} &\Leftrightarrow k_i \text{ の最大公約数は } 1.
\end{aligned}$$

注意 10.2. 以上のことから, スペクトル型 \mathbf{m} に対し

$$\mathbf{m} \text{ が既約実現可能} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_{\mathbf{m}} \text{ は実ルートで } \text{supp } \alpha_{\mathbf{m}} \ni \alpha_0 \\ \text{または} \\ \text{虚ルートで } (\alpha_{\mathbf{m}}|\alpha_{\mathbf{m}}) < 0 \text{ または } \alpha_{\mathbf{m}} \text{ は indivisible.} \end{cases}$$

さて \mathbf{m} が既約実現可能なとき, そのスペクトル型をもつ Fuchs 型微分作用素 P が構成できる.

定理 10.3 ([O5, Theorem 6.14]). 既約実現可能なスペクトル型 \mathbf{m} に対し, 以下の性質を持つ universal model $P(\lambda, g) \in \mathbb{C}[\lambda] \otimes \mathbb{C}[g] \otimes W[x]$ を構成できる.

- $P(\lambda, g)u = 0$ は Fuchs 型微分方程式で Fuchs 条件を満たす GRS $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ をもつ.
- 既約な Fuch 型微分方程式 $Qv = 0$ で GRS $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ をもつものは $P(\lambda, g)u = 0$ の g に適当な値を代入したのものになる.
- $N = 1 - \frac{1}{2} \text{idx } \mathbf{m}$ で, $P(\lambda, g)$ は $g = (g_1, \dots, g_N)$ の一次式となる.

$g = (g_1, \dots, g_N)$ を **アクセサリ・パラメータ** とよぶ.

注意 10.4. 1 階 Fuchs 系の時は, GRS に対応する方程式には, 一般に $2 - \text{idx } \mathbf{m}$ 個のアクセサリ・パラメータが入る (単独高階ときの 2 倍の個数).

定義 10.5. \mathbf{m} は **リジッド (rigid)** $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 既約実現可能で $\text{idx } \mathbf{m} = 2$ ($\Rightarrow N = 0$)
($\Leftrightarrow \alpha_{\mathbf{m}} \in \Delta_+^{re}$ with $\text{supp } \alpha_{\mathbf{m}} \ni \alpha_0$)

rigid なスペクトル型をもつ方程式は, 各特異点での解の局所的性質 (Generalized Riemann scheme) から一意に決まる. 以下のように rigid スペクトル型は沢山ある.

Rigid スペクトル型 : 9 個 (ord ≤ 4), 306 個 (ord = 10), 19286 個 (ord = 20)

ord = 2 11, 11, 11 (${}_2F_1$; Gauss)

ord = 3 111, 111, 21 (${}_3F_2$) 21, 21, 21, 21 (Jordan-Pochhammer)

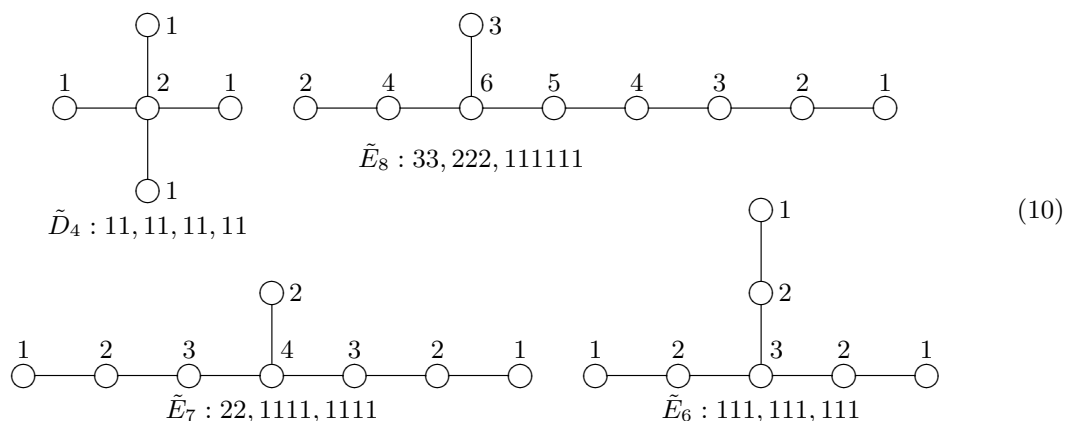
ord = 4 $1^4, 1^4, 31$ (${}_4F_3$) $1^4, 211, 22$ (Even family) 211, 211, 211

 31, 31, 31, 31, 31 (Jordan-Pochhammer) 211, 22, 31, 31 22, 22, 22, 31

Simpson's list 1991 (1^n を含むもののリストで以下の 4 種に分けた) :

- $1^n, 1^n, n - 11$ (hypergeometric family) ex. 111,111,21 1111,1111,31
- $1^{2m}, mm, m - 1m1$ (even family) ex. 1111,22,211 111111,33,321
- $1^{2m+1}, m + 1m, mm1$ (odd family) ex. 11111,32,221 1111111,43,331
- $1^6, 42, 2^3$ 111111,42,222

Basic スペクトル型 ([O5, §13.1]): 4 個 (idx $\mathbf{m} = 0$, Kostov), 13 個 (-2), 36 個 (-4), 67 個 (-6), 103 個 (-8),... rigidity 指数が 0 の basic なスペクトル型 \mathbf{m} は以下の 4 個



Dynkin 図式は $\text{supp } \alpha_{\mathbf{m}}$ の単純ルートの図で, $\alpha_{\mathbf{m}}$ を単純ルートの一次結合で表したときの係数を書き入れている. 中心の α_0 から伸びた「足」が各特異点に対応している.

rigidity 指数 -2 のときは 13 個あり, それは注意 13.11 iv) の星形 Dynkin 図式に対応する.

1 階 Fuchs 系で特異点の個数が 4 個以上ある場合, その特異点を $\infty, 0, 1, y_1, y_2, \dots$ としよう. 「 y_1, y_2, \dots を変化させても, 方程式の解の (大域) モノドロミー群が変わらない」という条件は, y_1, y_2, \dots やアクセサリー・パラメータに対する非線形の微分方程式として表せる. このようなモノドロミー群を変えない方程式の変換をモノドロミー保存変形という.

上の \tilde{D}_4 の場合のモノドロミー保存変形の (非線形) 方程式は, パンルベ (Painlevé) VI 方程式になる. 元の 1 階の Fuchs 系を合流させると不確定特異点を持つ 1 階の方程式系になるが, それらのモノドロミー保存変形方程式として, Painlevé I から V が現れる.

定理 10.6 (Haraoka-Filipuk [HF]). 1 階 Fuchs 系のモノドロミー保存変形方程式は, addition や middle convolution で不変である.

注意 10.7. i) この定理より, 1 階 Fuchs 系のモノドロミー保存変形方程式は, 対応する basic なスペクトル型のモノドロミー保存変形方程式と一致する.

特に rigidity 指数が負のものからは高次元 Painlevé 方程式が得られる.

ii) middle convolution が方程式のスペクトル型を変えないことがある. そのような変換も自明な変換ではなく, たとえば i) では Painlevé 方程式の Backlund 変換に対応している.

iii) rigidity 指数が -2 の basic スペクトル型は, 4 点特異点のものが 3 個, 5 点特異点のものが 1 個 (Garnier 系といわれる) ある. 4 点特異点のものモノドロミー保存変形方程式は [Sa] に

よって計算され、そのうちの2つは別の構成から知られていたものに一致した他、もうひとつは新たな高次元 Painlevé 方程式（行列 Painlevé と呼ばれる）の発見となった。現時点で、もとの1階 Fuchs 系の合流から得られる高次元 Painlevé の分類がなされている。

iv) rigidity 指数が -4 の basic スペクトル型で4点特異点のものは9個あり、それから得られる高次 Painlevé 方程式は [Sz] により計算された。

11 Fractional calculus of Weyl algebra

Fuchs 型方程式は、そのスペクトル型で分類されるが、Fuchs 型方程式全体の空間には星型 Kac-Moody ルート系の Weyl 群が作用していることが分かった。Weyl 群の作用は、addition および middle convolution による方程式の変換として実現され、これらの変換で方程式や解、および解の性質がどのように変換されるかを解析することは、Gauss の超幾何の例で示したように、難しくはない。よって Fuchs 型微分方程式の多くの問題は、basic なスペクトル型の場合に帰着される。特にリジッドなスペクトル型の場合は、多くの結果がより具体的に、たとえばコンピュータ・プログラムとして実現可能な統一アルゴリズムで得られる。

それらは以下のようなものである（すべてコンピュータ上で実現されている (cf. [O12])).

- 方程式の存在と構成
- 解の積分表示
- 解の級数表示
- モノドロミー群の可約条件
- 隣接関係式
- 多項式解
- 接続公式
- 特異点の合流/開折と不確定特異点
- 多変数超幾何 (Appell HG. etc)

たとえば接続公式を考えてみる。 $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ という Riemann scheme を持つ Fuchs 型方程式が、middle convolution によって $\{\lambda'_{\mathbf{m}}\}$ という Riemann scheme をもつ方程式に変換されたとする。 $x = c_1$ での特性指数 λ_{1,n_1} に対応する局所解を $x = c_2$ まで接続して $x = c_2$ での局所解の一次結合で表したときの特性指数 λ_{2,n_2} に対応する局所解の係数を $c'(c_1 : \lambda'_{1,n_1} \rightsquigarrow c_2 : \lambda'_{2,n_2})$ とおく。 $m_{1,n_1} = 1$ ならばこの係数は（パラメータが generic のとき）局所解の取り方によらず well-defined である*32。このとき以下が成り立つ。

*32 addition と一次分数変換によって $c_1 = 0, c_2 = 1, \lambda_{1,n_1} = \lambda_{2,n_2} = 0$ と変換して考えればよい。

補題 11.1 (接続係数の変換 [O5, (12.8)]). $m_{1,n_1} = 1, n_1 > 1, n_2 > 1$ とする.

$$\frac{c'(c_1 : \lambda'_{1,n_1} \rightsquigarrow c_2 : \lambda'_{2,n_2})}{\Gamma(\lambda'_{1,n_1} - \lambda'_{1,1} + 1)\Gamma(\lambda'_{2,2} - \lambda'_{2,n_2})} = \frac{c(c_1 : \lambda_{1,n_1} \rightsquigarrow c_2 : \lambda_{2,n_2})}{\Gamma(\lambda_{1,n_1} - \lambda_{1,1} + 1)\Gamma(\lambda_{2,1} - \lambda_{2,n_2})}.$$

以下この節では、スペクトル型 \mathbf{m} がリジッドな **Fuchs 型方程式** を考える*³³.

定義 11.2. \mathbf{m} を rigid なスペクトル型とする*³⁴. このとき $w_{\mathbf{m}}\alpha_{\mathbf{m}} = \alpha_0$ となる $w_{\mathbf{m}} \in W$ で長さ $L(w_{\mathbf{m}})$ が最小*³⁵なものが一意に存在するので、それを用いて以下を定義する.

$$\Delta(\mathbf{m}) := \Delta_+^{re} \cap w_{\mathbf{m}}^{-1}\Delta_-^{re}.$$

$\Delta(\mathbf{m})$ は、スペクトル型 \mathbf{m} の方程式と自明な方程式 $u' = 0$ と結ぶ addition と middle convolution についての情報と考えてよい (特に $\#\Delta(\mathbf{m}) = L(w_{\mathbf{m}})$).

定理 11.3 (既約条件 [O5, Theorem 10.13]).

$$\boxed{P_{\mathbf{m}}(\lambda)u = 0 \text{ が既約} \Leftrightarrow (\Lambda(\lambda)|\beta) \notin \mathbb{Z} \quad (\forall \beta \in \Delta(\mathbf{m}))}$$

これは §8 で Gauss の超幾何のときに述べたの同様に示される. 複雑な addition と middle convolution の組み合わせを、ルート系とその Weyl 群の作用に翻訳することによって、上のように簡潔に既約条件が表せる.

接続公式についても同様で、補題 11.1 から、同様の記号の下に以下の結果を得る.

定理 11.4 ([O5, Theorem 12.5]). $m_{1,n_1} = m_{2,n_2} = 1, c_1 = 0, c_2 = 1$ とするとき

$$c(1 : \lambda_{1,n_1} \rightsquigarrow 2 : \lambda_{2,n_2}) = \frac{\prod_{\nu=1}^{n_1-1} \Gamma(\lambda_{1,n_1} - \lambda_{1,\nu} + 1) \cdot \prod_{\nu=1}^{n_2-1} \Gamma(\lambda_{2,\nu} - \lambda_{2,n_2})}{\prod_{\substack{\alpha_{\mathbf{m}'} \in \Delta(\mathbf{m}) \\ m'_{1,n_1}=1 \\ m'_{2,n_2}=0}} \Gamma(|\{\lambda_{\mathbf{m}'}\}|) \cdot \prod_{\substack{\alpha_{\mathbf{m}'} \in \Delta(\mathbf{m}) \\ m'_{1,n_1}=0 \\ m'_{2,n_2}=1}} \Gamma(1 - |\{\lambda_{\mathbf{m}'}\}|) \cdot \prod_{j=3}^p (1 - \frac{1}{c_j})^{L_j}}. \quad (11)$$

なお, L_j ($j = 3, \dots, p$) は方程式から定まるある定数で、特異点が 3 点のときはこの項はない.

注意 11.5 ([O5, Chapter 12]). i) 接続公式 (11) の分母のガンマ関数の個数は分母と同じ $n_1 + n_2 - 2$ 個である.

ii) 分子のガンマ関数の中身の和と分母のガンマ関数の中身の和は等しい.

iii) 分母, 分子のガンマ関数の極は, それぞれ方程式の可約性, 局所解における対数項の出現 (すなわち局所モノドロミーが対角化可能でなくなること) に対応した自然な意味をもつ.

注意 11.6 (Gauss の超幾何の接続公式). Gauss の超幾何関数では, (11) は

*³³ リジッドでない場合は, 帰着される basic な方程式と, rigid な場合の結果とを合わせたような形で結果が得られる.

*³⁴ rigid でないときは, α_0 を basic なスペクトル型に対応するルートに置き換える

*³⁵ $w \in W$ を $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k}$ ($i_\nu \in I$) と表したときの k の最小値を w の長さという.

$$\text{Gauss: } \left\{ \begin{array}{ccc} x = c_1 = 0 & c_2 = 1 & \infty \\ \lambda_{1,1} & \lambda_{2,1} & \lambda_{0,1} \\ \overline{\lambda_{1,2}} & \underline{\lambda_{2,2}} & \lambda_{2,0} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} x = 0 & 1 & \infty \\ 1 - \gamma & \gamma - \alpha - \beta & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} 1\bar{1}, 1\bar{1}, 11 \\ = 0\bar{1}, 10, 10 \\ \oplus 10, 0\bar{1}, 01 \end{array}$$

に対して

$$\begin{aligned} c(1 : \lambda_{1,2} \rightsquigarrow 2 : \lambda_{2,2}) &= \frac{\Gamma(\lambda_{1,2} - \lambda_{1,1} + 1) \Gamma(\lambda_{2,1} - \lambda_{2,2})}{\Gamma(\lambda_{1,2} + \lambda_{2,1} + \lambda_{0,1}) \Gamma(\lambda_{1,2} + \lambda_{2,1} + \lambda_{0,2})} \quad \begin{array}{l} \Downarrow \\ \Leftrightarrow \end{array} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \beta) \Gamma(\gamma - \alpha)} \end{aligned}$$

となる.

分子のガンマ関数の中身は, 特性指数の差で (\Downarrow で表した), 分母のガンマ関数の中身は, 各特異点で特性指数を選んでその和の値 ($\lambda_{1,2}$ を含んで $\lambda_{2,2}$ を含まないものの和. これを \Leftrightarrow で表した. 一般には部分リジッド・スペクトル型に対応する Fuchs 条件に現れる式) となる.

Gauss の場合の接続公式は補題 11.1 を $c'(c_1 : \lambda'_{1,n_1} \rightsquigarrow c_2 : \lambda'_{2,n_2}) = 1$ とおいて, 1 回適用した結果に他ならない. 異なる特異点とその特性指数の組をどのように選んでも同じ公式であって, α, β, γ を代入して具体的に表した沢山の接続公式 (cf. [公 III]) より遙かに簡潔である. 具体的な接続公式は一般の特性指数での接続公式の特殊化 (特性指数への値の代入) で容易に得られる.

注意 11.7. i) リジッドな Fuchs 型方程式は, addition と middle convolution で自明な方程式を何度か変換して得られる. よって, その解の積分表示やべき級数表示が, 最初に Gauss の超幾何で述べたのと同様のやり方で求められることが理解できるであろう.

ii) 方程式 $Pu = 0$ が (左 $W(x)$ 加群として) 既約とする. この場合, 任意の $Qu \neq 0$ を満たす $Q \in W(x)$ に対してその逆, すなわち $RQu = u$ となる $R \in W(x)$ を構成できる. 具体的には, $W(x)$ は (非可換) ユークリッド環なので, ユークリッドの互除法^{*36}による効率的なアルゴリズムによって R が構成できる.

iii) スペクトル型が同じで特性指数の差が整数となる 2 つのリジッド Fuchs 型方程式の解は, 一方が他方に $W(x)$ の元を作用させると得られる. この具体的な関係式のことを隣接関係式という.

方程式を構成するときの addition のパラメータや middle convolution mc_μ の μ が整数差異なことに起因して 2 つの方程式になっている. このことや ii) で述べたことによつて, 隣接関係式が具体的に構成できる (cf. [O5, §11.1]).

iv) 多項式解があるということは, 1 階の微分方程式がもとの Fuchs 型方程式の商に現れることに対応している. たとえば $\beta \in \Delta(\mathbf{m})$ で $\text{ord } \beta$ が 1 または $\text{ord } \mathbf{m} - 1$ で $(\beta | \alpha_{\mathbf{m}}) = 1$ となっていれば, そのようなことが起こる. 前者では \mathbf{m}' を β に対応するスペクトル型, 後者では $\alpha_{\mathbf{m}} - \beta$ に対応するスペクトル型とする. $|\lambda_{\mathbf{m}'}| = -k$ となるときに, Fuch 型方程式を適当な addition をしておくと, k 次多項式が解となる. iii) における隣接関係式を与える作用素を用いると, k を一つづらせるので, それを用いて多項式解の次数を一つ増やしたり減らしたりすることができる.

多項式の零点は Fuchs 型方程式の見かけの特異点^{*37}に対応している. 見かけの特異点のない多

^{*36} 計算機に載せやすい. [O5, §1.4] を参照.

^{*37} 全ての局所解が正則となる確定特異点をいう. たとえば $P = (x+1)\partial - 1$ の特異点 $x = -1$ はその例で, $x+1$ の

項式は定数なので、 $u' = 0$ という方程式の解である。

上に述べた多項式解の話は、Fuchs 型方程式の商となる見かけの特異点のない Fuchs 型方程式の解と、それから隣接関係式における微分作用素によって同じモノドロミー群をもつ見かけの特異点を含む Fuchs 型方程式の解を順に作っていく（見かけの特異点の数を増やしていく）という話に一般化できる (cf. [O5, Chapter 11]).

12 不確定特異点 (不分岐)

有理関数係数の常微分方程式の特異点で、確定特異点でないものを不確定特異点という。確定特異点のとき、特異点における局所解は特性指数が重要な役割を果たしたが、一般の不確定特異点では、それを多項式に拡張したものが^{*38}が必要になる。

特異点 $x = c_j$ ($j = 0, \dots, p$) において多項式

$$\lambda_{j,\nu} \rightsquigarrow \lambda_{j,\nu}(t) = \lambda_{j,\nu,0} + \lambda_{j,\nu,1}t + \lambda_{j,\nu,2}t^2 + \dots \in \mathbb{C}[t] \quad (\lambda_{j,\nu,s} \in \mathbb{C}) \quad (12)$$

が確定特異点の特性指数にあたるものとなる。

簡単のため、以下を仮定する：

$$\deg(\lambda_{j,\nu} - \lambda_{j,\nu'}) > 0 \quad \text{or} \quad \lambda_{j,\nu} - \lambda_{j,\nu'} \notin \mathbb{Z} \quad (1 \leq \nu < \nu' \leq n_j).$$

$c_j = 0$ となる局所座標で (by a translation $x \mapsto x = c_j$ or $x \mapsto \frac{1}{x}$)

$$\begin{aligned} u_{j,\nu,k}(x) &\sim (1 + a_1x + a_2x^2 + \dots)e^{f(\lambda_{j,\nu}(\frac{1}{x})+k)\frac{dx}{x}} \quad (\text{形式解}) \\ &\sim e^{f(\lambda_{j,\nu}(\frac{1}{x})+k)\frac{dx}{x}} + O(e^{f(\lambda_{j,\nu}(\frac{1}{x})+m_{j,\nu})\frac{dx}{x}}) \\ &\quad (k = 0, \dots, m_{j,\nu} - 1, \nu = 1, \dots, n_j) \\ e^{f(\lambda_{j,\nu}(\frac{1}{x})+k)\frac{dx}{x}} &:= x^{\lambda_{j,\nu,0}+k} e^{-\frac{\lambda_{j,\nu,1}}{x} - \frac{\lambda_{j,\nu,2}}{2x^2} - \frac{\lambda_{j,\nu,3}}{3x^3} - \dots} \end{aligned}$$

という形式解をもつ、ということで特性指数 $\lambda_{j,\nu}$ とその重複度 $m_{j,\nu}$ を定義し、

$$n = m_{j,1} + m_{j,2} + \dots + m_{j,n_j} \quad (j = 0, \dots, p)$$

は n の分割を与えるとする。一般にはある正整数 q があって $x = y^{1/q}$ と置き換えて y 変数の微分方程式に直せば上のことが正しい。この q の最小値が 1 に取れるとき、**不分岐不確定特異点** という。

形式 Puiseux 級数環を $\overline{\mathbb{C}}((x))$ とおく。すなわち

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{C}}((t)) &:= \bigcup_{q \geq 1} \mathbb{C}((t^{1/q})), \\ \mathbb{C}((t)) &:= \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j t^j \mid \exists N \in \mathbb{Z} \text{ such that } c_j = 0 \ (j \leq N), \ c_j \in \mathbb{C} \right\}. \end{aligned}$$

定数倍が $Pu = 0$ の解である。

*38 分岐がある場合は、 $x^{\frac{1}{q}}$ の多項式

このとき, $a_0(x), \dots, a_n(x) \in \mathbb{C}[x]$ で $a_n(x) \neq 0$ として

$$\bar{P} = a_n(x)y^n + \dots + a_1(x)y + a_0(x)$$

という (x, y) の多項式は, $\bar{\mathbb{C}}((x))$ は代数閉体であるから

$$P = a_n(x)(y - \lambda_1(x)) \cdots (y - \lambda_n(x))$$

と, 適当な $\lambda_\nu(x) \in \bar{\mathbb{C}}((x))$ によって表せる. この結果は $a_j(x) \in \bar{\mathbb{C}}((x))$ で成り立つが, 特に $a_\nu(x) \in \mathbb{C}[x]$ であれば, $\lambda_j(x)$ は, 収束 Puiseux 級数となる.

ほぼ同様な証明で

$$P = a_n(x)^n \partial + \dots + a_1(x) \partial + a_0(x) \in W[x]$$

ならば

$$P = a_n(x)(\partial - \lambda_1(x)) \cdots (\partial - \lambda_n(x))$$

と表せる. この場合は $\mathbb{C}[x, y]$ のときと異なって非可換なので, 積の順序を入れ替えたときの差 (交換子という) の寄与から, $a_j(x) \in \mathbb{C}[x]$ であっても, 一般には $\lambda_j(x)$ は収束 Puiseux 環の元とは限らず, 形式 Puiseux 級数環の元となる.

一階の微分方程式

$$u'(x) + \lambda(x)u(x) = v(x)$$

の解は, $F(x) = \int \lambda(x) dx$ とおくと

$$u(x) = Ce^{-F(x)} + \int_c^x e^{F(t)-F(x)}v(t)dt \quad (C \in \mathbb{C})$$

と表せるので, 順に解いて上に述べたような形式解が得られる (福原, Tuirritin などによる結果).

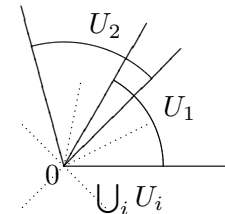
このようにして, Fuchs 型の時と同様に, (一般化) Riemann scheme $\{[\lambda_{j,\nu}]_{(m_{j,\nu})}\}$ が定義される.

形式解は文字どおりの形式的な意味でなく, 特異点の近くでの正則解の基本形を表していることが, Poincaré や福原などによって示された. すなわち, 特異点を原点とする座標で, 下図のような有限個の角領域 U_i で, $\bigcup_i U_i$ が原点の近傍から原点を除いたものとなっているもの, および

$u_{j,\nu,k,i}(x)$: 角領域 U_i で先の形式解を漸近展開^{*39}とする正則解^{*40}が存在する (Poincaré, Birkhoff, 福原 [Hu] などによる).

原点のまわりでの解は

Stokes 係数 : $U_i \cap U_{i'}$ における接続関係を与えることにより分かる.



方程式が不確定特異点を含むときは, 異なる特異点での局所解の関係を記述する接続係数と同様, Stokes 係数が解の大域的性質を決める基本的役割を果たす.

^{*39} たとえば, $(a_0 + a_1x + \dots)x^\lambda e^{\frac{c}{x}}$ が $u(x)$ の U_i における $x \rightarrow 0$ での漸近展開とは, U_i 上で $x \rightarrow 0$ のとき $|e^{-\frac{c}{x}}x^{-\lambda}u(x) - a_0 - a_1x - \dots - a_kx^k| = o(x^k)$ が全ての k について成り立つこと.

^{*40} 正則解 $u_{j,\nu,k,i}(x)$ は原点をまわる道に沿っていくだけでも解析接続可能であるが, 与えられた漸近展開が正しいのは U_i においてであって, たとえば原点をまわって戻ってきたものの漸近展開は, 一般には異なったものとなる.

13 スペクトル型, 合流 (Confluent) と開折 (Unfolding)

この節では, 不確定特異点は全て不分岐とし, 前節で定義した Riemann scheme $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ を考える. すなわち特性指数にあたる $\lambda_{j,\nu}$ は t の多項式である (それが定数となることが確定特異点に対応する).

定義 13.1 (スペクトル型). $\mathbf{m} = (m_{j,\nu})$ は n の分割の組で, $\lambda_{j,\nu}$ は t の多項式となる Riemann scheme $\{\lambda_{j,\nu}\}$ を考える. ($j = 0, \dots, p, \nu = 1, \dots, n_j$).

$0 \leq j \leq p$ を満たす j と $1 \leq i, i' \leq n$. に対して, ν と ν' を以下によって選ぶ.

$$\begin{aligned} m_{j,1} + \dots + m_{j,\nu-1} < i \leq m_{j,1} + \dots + m_{j,\nu}, \\ m_{j,1} + \dots + m_{j,\nu'-1} < i' \leq m_{j,1} + \dots + m_{j,\nu'}. \end{aligned}$$

さらに同値関係 \sim を

$$i \underset{j,r}{\sim} i' \stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{cases} \nu = \nu' & (r = 0), \\ \deg(\lambda_{j,\nu} - \lambda_{j,\nu'}) < r & (r \geq 1) \end{cases} \quad (\text{ここで } \deg 0 = 0) \quad (13)$$

によって定義すると, 同値関係 $\underset{r,j}{\sim}$ によって n の分割

$$\mathbf{m}_j^{(r)} : n = m_{j,1}^{(r)} + \dots + m_{j,n_j,r}^{(r)} \quad (14)$$

が定義される. 必要なら $m_{j,\nu}$ の番号を並び替えて

$$i \underset{j,r}{\sim} i', i < i'' < i' \Rightarrow i \underset{j,r}{\sim} i'' \quad (15)$$

としてよい.

同値関係 $\underset{j,r+1}{\sim}$ の同値類は, $\underset{j,r}{\sim}$ の同値類のいくつかを集めたものであるから $\mathbf{m}_j^{(r)}$ は $\mathbf{m}_j^{(r+1)}$ の細分と自然にみなせる. このとき

$$n_{j,0} = n_j \geq n_{j,1} \geq \dots \geq n_{j,r_j} > n_{j,r_j+1} = 1$$

を満たす非負整数 r_j が定まるが, $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ のスペクトル型を

$$\tilde{\mathbf{m}} := (\mathbf{m}_j^{(r)})_{j=0,\dots,p, r=0,\dots,r_j} : \text{スペクトル型}$$

と定義する (n の分割を $\sum_{j=0}^p (r_j + 1)$ 個集めたもの).

定義 13.2 (Riemann scheme の unfolding(開折)). 前定義の Riemann scheme $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ および $j = 0, \dots, p, 0 \leq r \leq r_j, 1 \leq \bar{\nu} \leq n_{j,r}$ に対して

$$m_{j,1} + \dots + m_{j,\mu} = m_{j,1}^{(r)} + \dots + m_{j,\bar{\nu}}^{(r)}$$

を満たす μ によって

$$\lambda_{j,\bar{\nu}}^{(r)} := \sum_{k=r}^{r_j} \frac{\lambda_{j,\mu,k}}{\prod_{0 \leq s \leq k, s \neq r} (t_r - t_s)}$$

とおく. このとき Fuchs 型方程式の Riemann scheme

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdots \quad x = c_j + t_r \quad (j = 0, \dots, p, \quad r = 0, \dots, r_j) \quad \cdots \\ \quad \quad \quad [\lambda_{j,\bar{\nu}}^{(r)}]_{(m_{j,\bar{\nu}}^{(r)})} \quad (\bar{\nu} = 1, \dots, n_{j,r}) \end{array} \right\} \quad (c_j + t_r \mapsto \frac{1}{t_r} \text{ if } c_j = \infty)$$

を $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ の開折 (**unfolding**) と呼ぶ. ここで, t_0, t_1, t_2, \dots は十分小さな互いに異なる複素数と考える ($t_0 = 0$ としてもよい).

定義 13.3 (versal addition [O5, §2.3]). 確定特異点の合流と開折に対応する addition は

$$\text{Ad} \left(\prod_{r=0}^{r_j} (x - c_j - t_r)^{\sum_{\substack{k=r \\ s \neq r}}^{r_j} \frac{\lambda_{j,\nu,k}}{\prod_{0 \leq s \leq k} (t_r - t_s)}} \right) = \text{Ad} \left(e^{\int \sum_{r=0}^{r_j} \frac{\lambda_{j,\nu,r}}{\prod_{k=0}^r (x - c_j - t_k)} dx} \right) \quad (16)$$

と定義され (**versal addition**), それによる変換は

$$\partial \mapsto \partial - \sum_{r=0}^{r_j} \frac{\lambda_{j,\nu,r}}{\prod_{k=0}^r (x - c_j - t_k)}, \quad x \mapsto x \quad (17)$$

を満たす. なお t_0, t_1, \dots, t_k は十分小さな複素数で, 互いに等しいことや 0 となることを許す ((16) の右辺を使えばよい).

注意 13.4. i) $\forall t_j \rightarrow 0$ とすることは, Fuchs 型からの合流操作を意味し, 逆の操作は $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ から開折で確定特異点に持っていくことに対応している.

ii) $\lambda_{j,\nu,k}$ を定数でなくて t_1, t_2, \dots に依存するが $t_1 = t_2 = \dots = 0$ では同じ値となるものに置き換えたものを考えることができる. それも同じ開折と考えるのが自然である.

iii) middle convolution mc_μ は, Fuchs 型のとく同じように定義される. それによる Riemann scheme の変換は, $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ の開折の Fuchs 型への変換と考えれば容易に分かる.

定義 13.5 (index of rigidity, Fuchs 条件). 不分岐不確定特異点を含む Riemann scheme $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ に対する index of rigidity や Fuchs 条件は以下のように定義される^{*41}.

$$\begin{aligned} \text{idx} \{\lambda_{\mathbf{m}}\} &:= \text{idx} \tilde{\mathbf{m}} = \sum (m_{j,\nu}^2 - n^2) - \sum \deg(\lambda_{j,\nu} - \lambda_{j,\nu'}) \cdot m_{j,\nu} m_{j,\nu'} + 2n^2, \\ d\{\lambda_{\mathbf{m}}\} &:= d(\tilde{\mathbf{m}}) = \sum (m_{j,1} - n) - \sum \deg(\lambda_{j,\nu} - \lambda_{j,1}) \cdot m_{j,\nu} + 2n, \\ (\text{FC}) \quad \sum m_{j,\nu} \lambda_{j,\nu,0} - \text{ord} \mathbf{m} + \frac{1}{2} \text{idx} \tilde{\mathbf{m}} &:= |\{[\lambda_{j,\nu}^{(r)}]_{(m_{j,\nu}^{(r)})}\}| = 0. \end{aligned}$$

番号を並び替えて

$$\sum_{r=0}^{r_j} m_{j,1}^{(r)} \geq \sum_{r=0}^{r_j} m_{j,\nu}^{(r)} \quad (1 \leq \nu \leq n_j, \quad j = 0, \dots, p)$$

としてよい. このとき

$$m_{j,1} - \sum_{\nu'=1}^{n_j} \deg(\lambda_{j,\nu'} - \lambda_{j,1}) m_{j,\nu'} \geq m_{j,\nu} - \sum_{\nu=1}^{n_j} \deg(\lambda_{j,\nu'} - \lambda_{j,\nu}) m_{j,\nu'}$$

^{*41} 演習問題. Fuchs 型の unfolding を用いて定義しているが, それが定義にある式になることを示せ.

となるので

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{j=0}^p \left(m_{j,1} - \sum_{\nu'=1}^{n_j} \deg(\lambda_{j,\nu'} - \lambda_{j,1}) m_{j,\nu'} \right) n \\
&\quad - \left(\sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{n_j} m_{j,\nu}^2 - \sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{n_j} \sum_{\nu'=1}^{n_j} \deg(\lambda_{j,\nu} - \lambda_{j,\nu'}) m_{j,\nu} m_{j,\nu'} \right) \\
&= n \cdot d\{\lambda_{\mathbf{m}}\} - \text{idx}\{\lambda_{\mathbf{m}}\}.
\end{aligned}$$

$\text{idx}\{\lambda_{\mathbf{m}}\} > 0$ のとき $d\{\lambda_{\mathbf{m}}\} > 0$ となり, Fuchs 型のとときと同様以下が成り立つ.

定理 13.6. 不分岐不確定特異点を含む Riemann scheme $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ のスペクトル型を $\tilde{\mathbf{m}}$ とする. $\lambda_{j,\nu}(t)$ が (FC) を満たして generic ならば, それを Riemann scheme にもつ既約な微分方程式が存在するときに \tilde{m} を既約実現可能という.

$\text{idx } \tilde{\mathbf{m}} > 0$ で既約実現可能となる (このときリジッドという) ための必要十分条件は $\text{idx } \tilde{\mathbf{m}} = 2$ で $\tilde{\mathbf{m}}$ が Fuchs 型のスペクトル型として実現可能となることである. このとき, versal addition と middle convolution を自明な方程式に何回か施すことにより, $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ をもつ $W[x]$ の元が, 特異点の開折を行った versal operator の中に実現される.

注意 13.7. $\text{idx } \tilde{\mathbf{m}} \leq 0$ でも前定理と同様な結果 (このときは自明な方程式を basic な versal operator に置き換える) が期待される. $\text{idx } \tilde{\mathbf{m}} \geq -2$ のときにはそれが示されているが (分類によった証明), 一般の場合はまだ証明に不十分な点がある.

上の定理の意味をみるため, 具体的な例を挙げてみよう.

例 13.8 (Versal Gauss : 11, 11, 11). Versal operator は

$$\begin{aligned}
&(1 - c_1 x)(1 - c_2 x) \partial^2 + ((\lambda_2 + 2c_1 c_2)x + \lambda_1 - c_1 - c_2) \partial + \mu(\lambda_2 + c_1 c_2(1 - \mu)) \\
&= (1 - c_1 x)(1 - c_2 x) \partial^2 + (\tilde{\lambda}_2 x + \tilde{\lambda}_1) \partial + \mu(\tilde{\lambda}_2 - c_1 c_2(\mu + 1))
\end{aligned}$$

ここで c_1, c_2 は特異点の位置 $\{\frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}, \infty\}$ を表している.

Fuchs 型のとときの Riemann scheme は

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x = \frac{1}{c_1} & \frac{1}{c_2} & \infty \\ 0 & 0 & \mu \\ \frac{\lambda_1}{c_1 - c_2} + \frac{\lambda_2}{c_1(c_1 - c_2)} & \frac{\lambda_1}{c_2 - c_1} + \frac{\lambda_2}{c_2(c_2 - c_1)} & \frac{\lambda_2}{c_1 c_2} - \mu + 1 \end{array} ; x \right\} \quad (0 \neq c_1 \neq c_2 \neq 0).$$

2 点が合流したときは

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x = \frac{1}{c_2} & \infty & (1) \\ 0 & \mu & 0 \\ \frac{\lambda_2}{c_2} + \frac{\lambda_1}{c_2} & -\frac{\lambda_2}{c_2} - \frac{\lambda_1}{c_2} - \mu + 1 & \frac{\lambda_2}{c_2} \end{array} ; x \right\} \quad (0 = c_1 \neq c_2 \neq 0),$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x = \frac{1}{c_1} & (1) & \infty \\ 0 & 0 & \mu \\ -\frac{\lambda_2}{c_1^2} & \frac{\lambda_2}{c_1^2} + \frac{\lambda_1}{c_1} & \frac{\lambda_2}{c_1^2} - \mu + 1 \end{array} ; x \right\} \quad (c_1 = c_2 \neq 0).$$

3 点が合流したときは

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x = \infty & (1) & (2) \\ \mu & 0 & 0 \\ 1 - \mu & \lambda_1 & \lambda_2 \end{array} ; x \right\} \quad (c_1 = c_2 = 0) \quad u(x) \sim x^{-\mu}, \quad x^{\mu-1} e^{-\lambda_1 x - \frac{\lambda_2}{2} x^2}.$$

不確定特異点の場合の versal addition を使った解の積分表示として

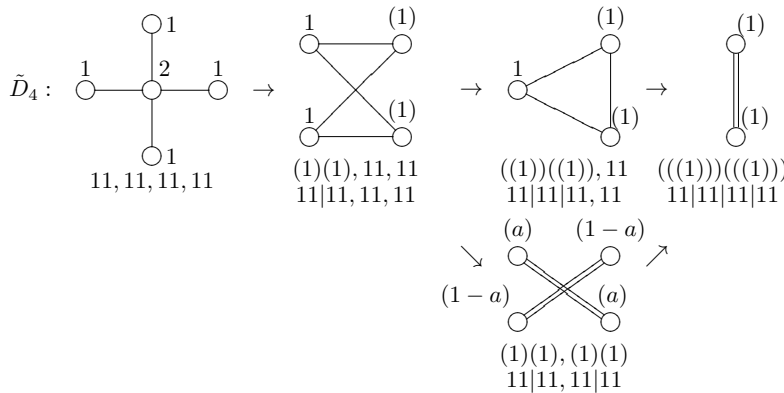
$$u(x) = \int_{\frac{1}{c_1}}^x e^{-\int \left(\frac{\lambda_1'}{1-c_1 t} + \frac{\lambda_2' t}{(1-c_1 t)(1-c_2 t)} \right) dt} (x-t)^{\mu-1} dt = \int_{\infty}^x e^{-\lambda_1' t - \frac{\lambda_2' t^2}{2}} (x-t)^{\mu-1} dt$$

が得られる。右側の式は $c_1 = c_2 = 0$ と置いたもので、3 点が合流した場合である。

例 13.9 (Versal Heun : 11, 11, 11, 11).

$$(1 - c_1 x)(1 - c_2 x)(1 - c_3 x) \partial^2 + (\lambda_3 x^2 + \lambda_2 x + \lambda_1) \partial + \mu(\lambda_3 + c_1 c_2 c_3 (\mu + 1)) + r$$

が versal operator で、特異点は $\{\infty, \frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}, \frac{1}{c_3}\}$ となり、 r はアクセサリー・パラメータ。



上で \rightarrow は合流によって得られる不分岐不確定特異点を表している。不分岐不確定特異点を含む場合も Kac-Moody ルート系と関連させることができ (cf. [Hi]), それに対応する Dynkin 図式を上を描いた。また、 $\tilde{\mathfrak{m}}$ の表記を 2 通りに示している。スペクトル型 $\tilde{\mathfrak{m}}$ に対し、各特異点は、で区切って表し、下の表し方では最も細分されたものから順に | で区切って表している：

$$\mathbf{m}_0^{(0)} | \mathbf{m}_0^{(1)} | \cdots | \mathbf{m}_0^{(r_0)}, \mathbf{m}_1^{(0)} | \mathbf{m}_1^{(1)} | \cdots | \mathbf{m}_1^{(r_1)}, \dots, \dots | \mathbf{m}_p^{(r_p)}.$$

この場合の middle convolution での変換は、Fuchs 型の場合と同じであるが、番号の並べ替えは、 $\mathbf{m}_j^{(r)}$ ($0 \leq r \leq r_j$) の細分化構造を保つもののみ許される。

不分岐不確定特異点を含む場合については、一般的に以下のことが分かっている。

定理 13.10 ([Hi, HO]). i) { スペクトル型 } \rightarrow A universal symmetric Kac-Moody root system
ii) ルート系における Weyl 群の軌道の ‘有限性’

iii) Fuchs 型の場合と同様な reduction と構成

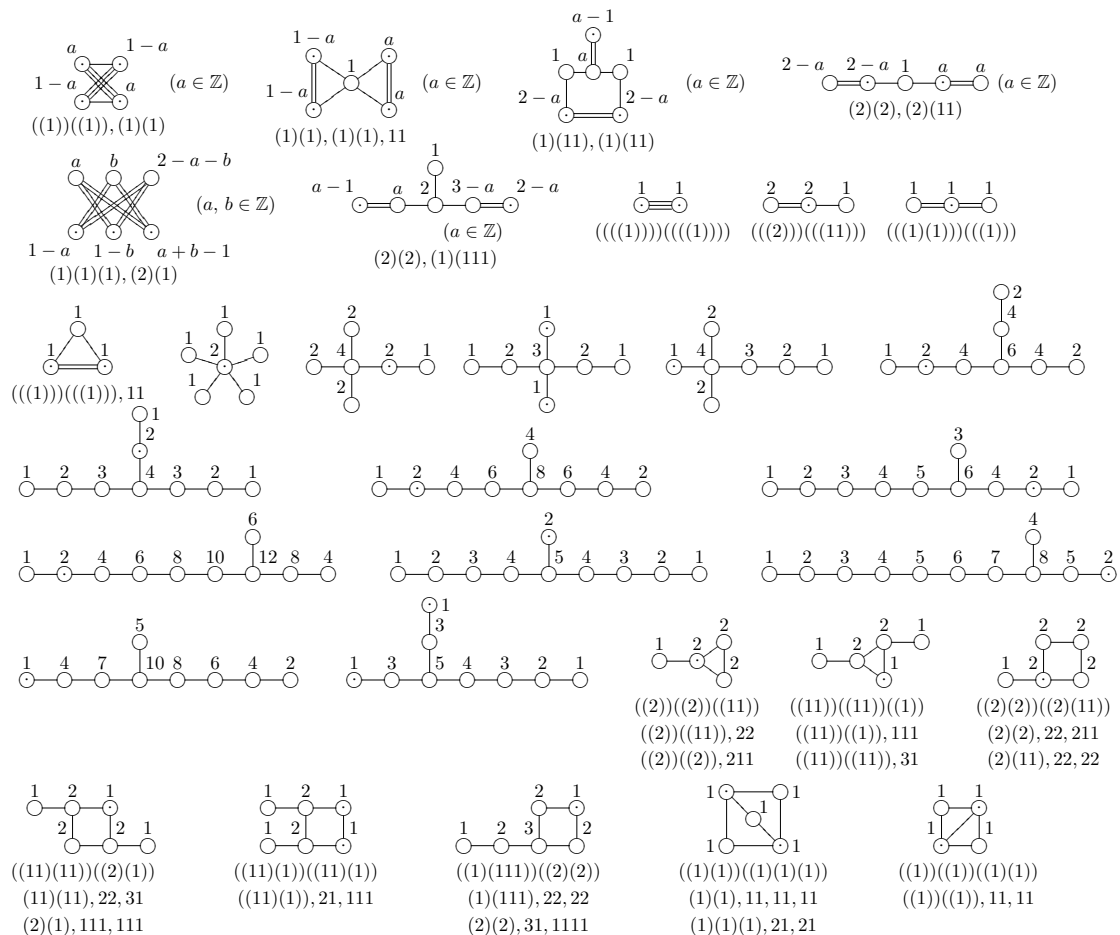
iv) rigidity 指数が -2 以上の場合の分類

注意 13.11. i) Fuchs 型の場合はスペクトル型を星形 Kac-Moody ルート系に埋め込むことによって, middle convolution と addition による変換が Weyl 群による作用と理解された. 不分岐不確定特異点も許す場合は, 有限個の単純ルートからなる symmetric Kac-Moody ルート系を全て含む universal Kac-Moody ルート系への埋め込みを定義することにより, Fuchs 型の考察が一般化される. 分岐した不確定特異点を含む場合は, さらに Laplace 変換を導入することが必要で, この場合にはルート系のような綺麗な記述については知られておらず, 未解決な問題が多い.

ii) 不分岐不確定特異点まで許しても, Fuchs 型の時と同様 addition と middle convolution による作用による軌道が index of rigidity 毎に, 有限個の軌道に分かれる.

iii) Fuchs 型の時と同様, basic なスペクトル型が定義され (index of rigidity を決めると有限個), 一般のものは basic なものから addition と middle convolution で得られる.

iv) rigidity 指数が -2 のときは, basic なものが以下のように Dynkin 図式によって分類される (cf. [HO])*42.



*42 Laplace 変換で移りあうものは同じ Dynkin 図式になる.

14 古典極限と平面代数曲線

一般の多項式係数微分作用素 $P \in W[x]$ によって $Pu = 0$ で与えられる方程式には, 分岐のある不確定特異点を持つ場合がある. このときは, 方程式の (大域的) 解析がより難しくなるが, 非可換な $W[x]$ でなくて, 可換な多項式環 $\mathbb{C}[x, y]$ に言い換えても (古典極限) 同様な困難さがある. この古典極限について考えてみよう.

定義 14.1. 交換関係を $[\partial, x] = \epsilon$ として定義した x と ∂ で生成される環を $W^\epsilon[x]$ と書いて斉次化 Weyl 代数とよぶ. ただし ϵ は x や ∂ とは可換な元で, 数と考えてもよい. $W^\epsilon(x)$ についても $W(x)$ のときと同様に定義する (x については有理関数体まで拡大).

例 14.2. Gauss の超幾何を $W^\epsilon[x]$ の中で構成すると

$$\begin{aligned} P &= \text{Ad}(x^{\epsilon-\gamma}) \circ \text{Ad}(\partial^{\beta-\gamma}) \circ \text{RAd}(x^{\beta-\epsilon}(1-x)^{-\alpha})\partial \\ &= x(1-x)\partial^2 + (\gamma - (\alpha + \beta + \epsilon)x)\partial + \alpha\beta. \end{aligned}$$

既約条件 (in $W^\epsilon(x)$): $\alpha, \beta, \gamma - \alpha, \gamma - \beta \notin \mathbb{Z}\epsilon$

$\epsilon = 0$: 古典極限 $\partial \rightarrow y \Rightarrow P(x, y) = 0$: 平面代数曲線.

$$x(1-x)y^2 + (\gamma - (\alpha + \beta)x)y + \alpha\beta = 0 \text{ in } T^*\mathbb{P}^1.$$

Reduction \rightarrow Resolution (HG: $P(x, y) = 0 \rightarrow \mathbb{P}^1 : y = 0$).

古典極限における変換は以下のようなものがあり, それらは symplectic structure ($dx \wedge dy$) を保つ有理変換となっている.

定義 14.3. $(x, y) \in T^*\mathbb{P}^1$ with $dx \wedge dy \xleftarrow{\text{古典極限}}$ $\left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{P}^1 \text{ の 一次分数変換} \\ \text{Gauge 変換} \\ \text{Laplace 変換} \end{array} \right.$

1. $(x, y) \mapsto (x + c, y) \quad c \in \mathbb{C}$

2. $(x, y) \mapsto (ax, a^{-1}y) \quad a \in \mathbb{C}^\times$

3. $(x, y) \mapsto (\frac{1}{x}, -x^2y) \quad (1. + 2. + 3. \simeq PSL(2, \mathbb{C}))$

4. $(x, y) \mapsto (x, y - h(x)) \quad h(x) \in \mathbb{C}(x)$

5. $(x, y) \mapsto (y, -x) \quad (2. + 4(h(x) = cx, c \in \mathbb{C}) + 5. \simeq SL(2, \mathbb{C}))$

addition と middle convolution に対応する変換は

$$\text{Ad}((x-c)^\lambda) : (x, y) \mapsto (x, y - \frac{\lambda}{x-c})$$

$$\text{mc}_\mu : (x, y) \mapsto (x - \frac{\mu}{y}, y)$$

古典極限における ‘方程式’ とは ($T^*\mathbb{P}^1$ における) 以下の平面代数曲線にあたる.

$$C : a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_0(x) = 0$$

$x = c$ における特性指数: 根 $\lambda_j(x) \pmod{\mathcal{O}_{x=c}} \quad (j = 1, \dots, n)$

($\lambda_j(x)$: Puiseux 級数 at $x = c$)

$x = c$ が 特異点 $\Leftrightarrow \exists$ 非有界な根 $\Leftrightarrow a_n(c) = 0$ (or $x = \infty$)

— 確定・不確定特異点, Riemann scheme, スペクトル型などが定義される

— rigidity 指数 \rightarrow Euler 指標 (例ではほぼ OK)

問題. rigidity 指数を固定したとき, 有限種類のスペクトル型に reduction できるか?

— リジッドなら単一軌道 (分岐していても) (Arinkin [Ar])

— rigidity 指数 0 のときは, 6+3 種類? (Painlevé I~VI と離散 Painlevé に対応)

— 分岐していないなら有限軌道である

問題. rigidity 指数は古典極限では (特異点解消した代数曲線の) Euler 指標にほぼ対応していると予想されるが, そうならない例もある. 特性指数やアクセサリパラメータ空間上の family と考えたとき, その詳細はどうなっているか? 古典極限における basic なもの, 双有理 symplectic 変換, symplectic structure を無視した結果との対応は?

15 Gauss の超幾何関数 \rightarrow 多変数化 (常微分 \rightarrow 偏微分)

再度 Gauss の超幾何に戻って考えてみよう.

$$F(a, b, c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} x^n : \quad \{ \text{特異点} \} = \{0, 1, \infty\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x=0 & x=1 & x=\infty \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-a-b & b \end{array} ; x \right\}$$

$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の異なる 4 点 $\{t_0, t_1, t_{\infty}, t_x\}$ は 1 次分数変換により 4 点 $\{0, 1, \infty, x\}$ に変換され, x は最初の 4 点から一意に決まる. この写像の引き戻しにより, Gauss の超幾何関数は $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ 上の 4 点 $\{t_0, t_1, t_{\infty}, t_x\}$ の配置空間上の関数 (4 変数の関数) とみなせる:

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \supset \{t_0, t_1, t_{\infty}, t_x\} \xrightarrow{1 \text{ 次分数変換}} \{0, 1, \infty, x\},$$

$$x = \frac{(t_x - t_0)(t_{\infty} - t_1)}{(t_1 - t_0)(t_{\infty} - t_x)},$$

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \supset \{t_0, t_1, t_{\infty}, t_x\} \mapsto$$

$$\left(\frac{(t_x - t_0)(t_{\infty} - t_1)}{(t_1 - t_0)(t_{\infty} - t_x)} \right)^d \cdot \left(\frac{(t_1 - t_x)(t_{\infty} - t_0)}{(t_1 - t_0)(t_{\infty} - t_x)} \right)^e F(a, b, c; \frac{t_x - t_0}{t_1 - t_0} \frac{t_{\infty} - t_1}{t_{\infty} - t_x}),$$

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} t_x = t_0 & t_x = t_1 & t_x = t_{\infty} & t_0 = t_1 & t_0 = t_{\infty} & t_1 = t_{\infty} \\ 0+d & 0+e & a-d-e & a-d-e & e & d \\ 1-c+d & c-a-b+e & b-d-e & b-d-e & c+e-a-b & 1-c+d \end{array} \right\}.$$

d と e は, 特性指数が一般になるように導入したパラメータである. 4 変数のこの関数は 4 つの変数のうち 2 つが等しくなる超曲面に確定特異点をもつので, そこでの特性指数を並べた Riemann scheme を最後に記した.

より一般に, 以下のような対応が出来る:

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \text{ に } k+3 \text{ 個の特異点をもつ Fuchs 型方程式}$$

$$\Rightarrow \{ \text{特異点} \} \xrightarrow{1 \text{ 次分数変換}} \{0, 1, \infty, y_1, \dots, y_k\}$$

rigid な Fuchs 型常微分方程式の解は **積分表示** を持つ

→ (x, y_1, \dots, y_k) 変数の関数

$\{x = 0, 1, \infty, y_1, \dots, y_k\}$ に特異点をもつ Rigid Fuchs 型 ODE

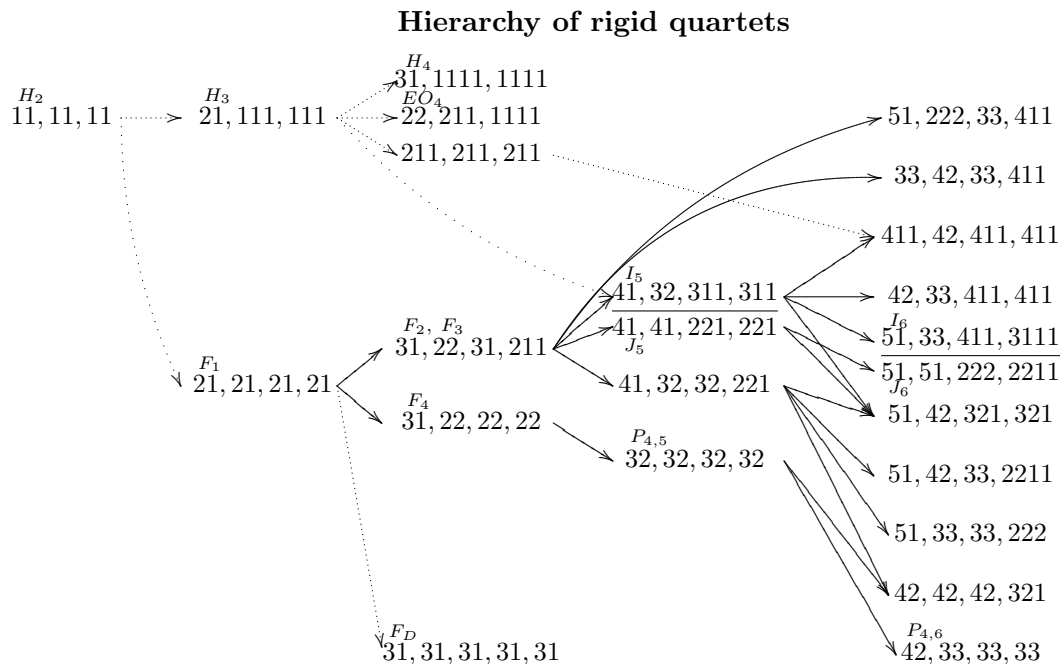
→ $\{(k+1)$ -変数 (x, y_1, \dots, y_k) の超幾何関数}

→ $\{\mathbb{P}_\mathbb{C}^1$ 内の $k+4$ 点の moduli 空間上の超幾何関数}

16 階以下で変数の数が 5 以下 (特異点の数が 7 個以下) の rigid な方程式の個数を表にしてみると :

		# Rigid ODE														
階数		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1 変数		1	1	3	5	13	20	45	74	142	212	421	588	1004	1481	2388
2 変数			1	2	4	11	16	35	58	109	156	299	402	685	924	1517
3 変数				1	1	3	5	12	17	43	52	104	135	263	327	560
4 変数					1	0	2	3	5	8	14	24	39	60	79	137
5 変数						1	0	0	2	3	4	6	6	14	20	30

特に, 変数の数が 2 の超幾何系の階数が小さいものの関係を図示すると :



注意 15.1. i) 上の F_1, F_2, F_3, F_4 は Appell の 2 変数超幾何関数を意味する. Lauricella の F_D も現れる.

ii) F_2 と F_3 は, 一つの 2 変数超幾何微分方程式の異なる点でのべき級数解であり, I_5 と J_5 も一つの 2 変数超幾何微分方程式の異なる 1 次元の切り口となっている.

iii) これら超幾何系の階数は $\text{ord } \mathbf{m}$ で, (実質的な) パラメータの個数は

$$\text{パラメータの数} = \sum (\text{各特異点でのブロック数} - 1)$$

となる.

addition によって有限な特異点での一つ (通常は最大重複度) の特性指数を 0 にとることが多い. そのほか Fuchs の条件があるので, パラメータの数は上の個数になる.

たとえば Gauss の超幾何のパラメータの数は, $1 + 1 + 1 = 3$ 個, 41, 32, 311, 311 では 6 個.

16 Pfaff 系の Addition と Middle Convolution

rigid な Fuchs 型常微分方程式から導かれる多変数の超幾何系を扱うには, 常微分方程式は 1 階 Fuchs 系 (Schlesinger 型) で, 多変数の超幾何系は Pfaff 系で方程式を表す方が都合がよい*43.

2 変数の Pfaff 系の場合 (対応する rigid Fuchs 系の常微分方程式の特異点は $\{0, 1, \infty, y\}$) を例として説明しよう. それは N 次の整数の正方行列 A_j を用いて

$$du = \left(A_1 \frac{dx}{x} + A_2 \frac{d(x-y)}{x-y} + A_3 \frac{d(x-1)}{x-1} + A_4 \frac{dy}{y} + A_5 \frac{d(y-1)}{y-1} \right) u \quad (18)$$

と表せ, これは偏微分方程式系

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-y} + \frac{A_3}{x-1} \right) u, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{A_4}{y} + \frac{A_2}{x-y} + \frac{A_5}{y-1} \right) u \end{cases} \quad (19)$$

と同値である. $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}$ から得られる**両立条件** ($ddu = 0$ から得られる完全積分可能条件)

$$[A_1, A_5] = [A_3, A_4] = [A_1, A_2 + A_4] = [A_4, A_1 + A_2] = [A_3, A_2 + A_5] = [A_5, A_2 + A_3] = 0$$

を仮定する*44. y を固定して考えると, (19) の最初の式は x に関する Schlesinger 型の常微分方程式となり, x についての addition と middle convolution が定義できる. y も変数であったとき (19) は, addition によって

$$\text{Ad}_\lambda : (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5) \mapsto (A_1 + \lambda_1, A_2 + \lambda_2, A_3 + \lambda_3, A_4, A_5)$$

と変換され, convolution では

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} A_1 + \mu & A_2 & A_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ A_1 & A_2 + \mu & A_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ A_1 & A_2 & A_3 + \mu \end{pmatrix},$$

と変換されるが (cf. [DR]), y についての偏微分方程式は

$$\tilde{A}_4 = \begin{pmatrix} A_4 + A_2 & -A_2 & 0 \\ -A_1 & A_4 + A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_4 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_5 = \begin{pmatrix} A_5 & 0 & 0 \\ 0 & A_5 + A_3 & -A_3 \\ 0 & -A_2 & A_5 + A_2 \end{pmatrix} \quad (\text{by Haraoka})$$

*43 1 次元の切り口が rigid でない常微分方程式の場合は, モノドロミー保存変形の有理解や代数関数解を求めることと関係する. [KMS] には関連する興味ある結果が得られている.

*44 演習問題. これを示せ.

となることが [H2] によって示された. これらの行列の同時不変真部分空間による商空間への線形変換として middle convolution が定義される (Schlesinger 型常微分方程式の場合は [DR], Pfaff 系まで拡張した場合は [H2] (cf. [H3]) による) :

$$\text{mc}_\mu(A_j) := \tilde{A}_j \bmod \begin{pmatrix} \ker A_1 \\ \ker A_2 \\ \ker A_3 \end{pmatrix} \oplus \ker(\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 + \tilde{A}_3 + \mu) \quad (\text{Dettweiler-Reiter, 原岡}).$$

17 方程式の既約性

Fuchs 型方程式で得られた結果は, それに対応する Pfaff 系 (多変数超幾何) に適用でき, その解析に有効である. この節では方程式の既約性を例に考察してみよう (cf. [O9]).

まずリジッド Fuchs 型常微分方程式の既約性条件を与える定理 11.3 を見直してみる.

既約条件は星形 Kac-Moody ルート系の実ルートの有限部分集合 $\Delta(\mathbf{m})$ によって記述される. スペクトル型 (分割の組) \mathbf{m} とルート $\alpha_{\mathbf{m}}$ との対応は §10 に与えたが, 逆の対応, すなわちルート $\beta = \sum_{i \in I} k_i \alpha_i$ に対応する分割の組 $\mathbf{m}(\beta)$ は

$$m(\beta)_{j,\nu} = k_{j,\nu-1} - k_{j,\nu} \quad (j = 0, 1, \dots, \nu = 1, 2, \dots, k_{j,0} = k_0) \quad (20)$$

で与えられる.

定義 17.1. i) $\Delta(\mathbf{m})$ に対応するスペクトル型を $\Sigma(\mathbf{m}) (:= \{\mathbf{m}(\beta) \mid \beta \in \Delta(\mathbf{m})\})$ とおく.

ii) $\beta \in \Delta(\mathbf{m})$ に対して $k_\beta := (\alpha_{\mathbf{m}} \mid \beta)$, $\gamma := \alpha_{\mathbf{m}} - k_\beta \beta$ とおくと

$$\alpha_{\mathbf{m}} = k_\beta \beta + \gamma$$

となるが, $\beta \in \Delta(\mathbf{m})$ を

$$\begin{cases} \text{Type 1 : } \text{ord } \gamma > 0, \\ \text{Type 2 : } \text{ord } \gamma = 0, \\ \text{Type 3 : } \text{ord } \gamma < 0 \end{cases}$$

の 3 つの Type に分ける. 対応してスペクトル型 $\mathbf{m}(\beta)$ も 3 つの Type に分ける.

注意 17.2. i) $\text{ord } \gamma$ は γ を $\alpha_i (i \in I)$ の一次結合で表したときの α_0 の係数であった. また

$$\begin{aligned} \gamma &= s_\beta(\alpha_{\mathbf{m}}) \in \Sigma^{re}, \\ k_\beta &= \text{idx}(\mathbf{m}, \mathbf{m}(\beta)) := \sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{n_j} m_{j,\nu} m(\beta)_{j,\nu} - (p-1) \text{ord } \mathbf{m} \cdot \text{ord } \mathbf{m}(\beta). \end{aligned}$$

ii) リジッドな Riemann scheme $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ をもつ Fuchs 型常微分方程式 $P(\lambda)u = 0$ が既約となるための必要十分条件は

$$\sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{n_j} m'_{j,\nu} \lambda_{j,\nu} \notin \mathbb{Z} \quad (\forall \mathbf{m}' \in \Sigma(\mathbf{m})). \quad (21)$$

iii) ほとんどは Type 1 であるが, Type 2, Type 3 が現れる例が, それぞれ §18.3, §18.6 にある.

定理 17.3 ([O9, Proposition 2.5]). $\beta \in \Delta(\mathbf{m})$ とする.

- i) $k_\beta = 1$ ならば β は Type 1.
- ii) Type 3 の β は定理 11.3 の条件から除いてもよい (他の条件から従う).

$\Delta(\mathbf{m})$ は, その定義よりスペクトル型の reduction から得られることが分かるが, それを reduction から $\Sigma(\mathbf{m})$ を求めるアルゴリズムに翻訳してみよう (cf. [O9]).

既約実現可能なリジッドで単調で自明でない (ord が 1 でない) スペクトル型 \mathbf{m} を考える.

- 単調なスペクトル型に middle convolution を施したスペクトル型に変換する (1 ステップ)*⁴⁵. このとき ord が下がらなければリジッドでない.
- 単調でないスペクトル型は, 各点での隣り合った重複度の大小関係で後の方が大きくなっていく一組を入れ替える (1 ステップ). これを単調なスペクトル型になるまで続ける.
- スペクトル型が $100 \dots, 100 \dots, \dots$ という自明なものになれば終了. そうでなければ最初に戻る.

$\Sigma(\mathbf{m})$ の元の個数は上の全ステップ数になる. すなわち各ステップに応じて $\Sigma(\mathbf{m})$ の元が一つ対応する. 各ステップは可逆なので, 一つのステップに注目して逆方向に辿ること (\mathbf{m} を構成する方向) を考える.

一つのステップにおいて, \mathbf{m} を構成する方向でのスペクトル型の変化を重複度の組で表したものをまず考え, それから \mathbf{m} の構成までのステップを辿って最後に得られた重複度の組から $\Sigma(\mathbf{m})$ の元が一つ得られる. ただし, 重複度の最大公約数が k_β に対応し, 重複度の組を k_β で割ったものが実際の $\Sigma(\mathbf{m})$ の元である.

実際に Gauss の例を述べよう.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 11, 11, 11 & \xrightarrow{-1} & 01, 01, 01 & \xrightarrow{s_{0,1}} & 10, 01, 01 & \xrightarrow{s_{1,1}} & 10, 10, 01 & \xrightarrow{s_{2,1}} & 10, 10, 10 \\
 10, 10, 10 & \xleftarrow{+1} & & * & & & & & \\
 01, 10, 10 & \xleftarrow{+1} & -11, 00, 00 & \leftarrow & & * & & & \\
 10, 01, 10 & \xleftarrow{+1} & 00, -11, 00 & \leftarrow & 00, -11, 00 & \leftarrow & & * & \\
 10, 10, 01 & \xleftarrow{+1} & 00, 00, -11 & \leftarrow & 00, 00, -11 & \leftarrow & 00, 00, -11 & \leftarrow & *
 \end{array}$$

上において $\xrightarrow{-1}$ は middle convolution に対応し, $-d(\mathbf{m}) = -(1 + 1 + 1 - (3 - 2) \cdot 2) = -1$ により, 各点の最初の重複度から 1 を引くことを意味する. その 2 つ下の $\xleftarrow{+1}$ は, $-d(\mathbf{m}) = -(-1 + 0 + 0 - (3 - 2) \cdot 0) = 1$ より, 各点の最初の重複度に 1 を加えることを意味する. また, $s_{0,1}$ は最初の特異点の最初と次の重複度を入れ替える変換である. これによって

$$\Sigma(11, 11, 11) = \{10, 10, 10 \ 01, 10, 10 \ 10, 01, 10 \ 10, 10, 01\}$$

が分かる. 従って Gauss の Riemann scheme $\left\{ \begin{smallmatrix} \infty & 0 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{smallmatrix} \right\}$ に対応する既約条件

$$\alpha \notin \mathbb{Z}, \quad \beta \notin \mathbb{Z}, \quad \gamma - \beta \notin \mathbb{Z}, \quad 1 + \alpha - \gamma \notin \mathbb{Z}$$

*⁴⁵ ord が下がらなければ rigid でない. 負の数が見れば既約実現可能でない.

を得る.

定理 17.4 ([O9, Theorem 3.3]). リジッドな Riemann scheme $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ に対応する Fuchs 型方程式 (特異点は $\{\infty, 0, 1, y_1, \dots, y_k\}$ とする) に対応する Pfaff 系 \mathcal{M}_λ の既約条件を考える.

i) (21) が成り立つなら, \mathcal{M}_λ は既約.

ii) $\mathbf{m}' \in \Sigma(\mathbf{m})$ に対し

$$\sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{n_j} m'_{j,\nu} \lambda_{j,\nu} \in \mathbb{Z}$$

とする. \mathbf{m}' が Type 1 または Type 3 ならば, \mathcal{M}_λ は可約. \mathbf{m}' が Type 2 で \mathcal{M}_λ が既約ならば, 2 以上の整数 K と階数が $\frac{\text{ord } \mathbf{m}}{K}$ の x の常微分方程式 $Qv = 0$ があって \mathcal{M}_λ の解は $Qv = 0$ を満たす.

18 例 (2 変数, 階数 5 以下)

18.1 Appell's F_1

$\mathbf{m} = 21, 21, 21, 21$: rank = 3 with 4 parameters and $[\Delta(\mathbf{m})] = 1^4 \cdot 2^1$

$21, 21, 21, 21 \rightarrow 01, 01, 01, 01 \quad H_2 : 11, 11, 11, 20$ (by a middle convolution)

$= 10, 10, 10, 01 \oplus 11, 11, 11, 20$ (可約条件: 対称性から 4 つ)

$= 2(10, 10, 10, 10) \oplus 01, 01, 01, 01$ (1 つ)

(x, y) 変数の Pfaff 系としての Riemann scheme は

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x=0 & x=1 & x=y & x=\infty & y=0 & y=1 & y=\infty \\ [0]_2 & [0]_2 & [0]_2 & [e]_2 & [0]_2 & [0]_2 & [-c-e]_2 \\ a & b & c & d & a+c+2e & b+c+2e & d \end{array} \right\}$$

となって次の Fuchs 条件を満たす.

$a + b + c + d + 2e = 2, 0$ (Fuchs 条件)

$10, 10, 10, 01 : d \notin \mathbb{Z}$ (既約条件)

$10, 10, 01, 10 : c + e \notin \mathbb{Z}$

$10, 01, 10, 10 : b + e \notin \mathbb{Z}$

$01, 10, 10, 10 : a + e \notin \mathbb{Z}$

$10, 10, 10, 10 : e \notin \mathbb{Z}$

	t_∞	t_0	t_y	t_1	t_x	idx
t_∞		21	21	21	21	2
t_0	21		21	21	21	2
t_y	21	21		21	21	2
t_1	21	21	21		21	2
t_x	21	21	21	21		2

Fuchs 条件の “= 2” は単独の Fuchs 型のと看で, Pfaff 系の時は “= 0” となる.

$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ の 5 点 $\{t_0, t_1, t_\infty, t_x, t_y\}$ は, 一次分数変換で $0, 1, \infty, x, y$ に変換されるので, 得られるこの 5 変数の Pfaff 系 (KZ 型方程式) と見なせる. そのときのスペクトル型が上の表である (2 変数が一致する超平面に確定特異点をもつ).

上の 5 つの条件が成り立つことが既約性の必要十分条件であることは, 以下に述べる計算と共に前節で解説した (cf. 定理 17.4).

$$\begin{aligned}
& \underline{21}, \underline{21}, \underline{21}, \underline{21} \xrightarrow[2]{\leftarrow} \underline{01}, \underline{01}, \underline{01}, \underline{01} \xrightarrow[1]{\leftarrow} \underline{10}, \underline{01}, \underline{01}, \underline{01} \xrightarrow[1]{\leftarrow} 10, \underline{10}, \underline{01}, \underline{01} \xrightarrow[1]{\leftarrow} 10, 10, \underline{10}, \underline{01} \searrow \\
& 2(10, 10, 10, 10) \stackrel{\neq 2}{\neq} * \quad 10, 10, 10, 10 \\
& 01, 10, 10, 10 \stackrel{\neq 1}{\neq} \underline{-11}, \underline{00}, \underline{00}, \underline{00} \leftarrow * \\
& 10, 01, 10, 10 \stackrel{\neq 1}{\neq} \underline{00}, \underline{-11}, \underline{00}, \underline{00} \leftarrow \underline{00}, -11, 00, 00 \leftarrow * \\
& 10, 10, 01, 10 \stackrel{\neq 1}{\neq} \underline{00}, \underline{00}, \underline{-11}, \underline{00} \leftarrow \underline{00}, 00, -11, 00 \leftarrow 00, \underline{00}, -11, 00 \leftarrow * \\
& 10, 10, 10, 01 \stackrel{\neq 1}{\neq} \underline{00}, \underline{00}, \underline{00}, \underline{-11} \leftarrow \underline{00}, 00, 00, -11 \leftarrow 00, \underline{00}, 00, -11 \leftarrow 00, 00, \underline{00}, -11 \leftarrow *
\end{aligned}$$

18.2 Appell's F_2, F_3

211, 22, 31, 31 : rank = 4, 5 parameters, ($1^6 \cdot 2^2$)

$\rightarrow F_1 : 201, 21, 21, 21 \quad H_2 : 011, 02, 11, 11$

= 010, 01, 10, 10 \oplus 201, 21, 21, 21 (4)

= 101, 11, 11, 20 \oplus 110, 11, 20, 11 (2)

= $2(100, 01, 10, 10) \oplus 011, 20, 11, 11$ (2)

これらはすべて Type 1.

$$2a + b + c + 2d + e + f = 3, 0$$

	t_∞	t_0	t_y	t_1	t_x	idx
t_∞		211	211	211	211	-8
t_0	211		31	31	22	2
t_y	211	31		22	31	2
t_1	211	31	22		31	2
t_x	211	22	31	31		2

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc}
x=0 & x=y & x=1 & x=\infty & y=0 & y=1 & y=\infty & x=y=\infty \\
[0]_2 & [0]_3 & [0]_3 & [d]_2 & [0]_3 & [0]_2 & [-a-b-e-d]_2 & [f]_3 \\
[a]_2 & b & c & e & a+b+2d & [e-f]_2 & f & -a-b-e \\
& & & f & & & a+f &
\end{array} \right\}$$

$\delta_1 a + e + \delta_2 (f - e), a + b + d + e + \delta_2 (f - e), \delta_1 a + d \notin \mathbb{Z}$ ($\delta_1, \delta_2 \in \{0, 1\}$, 既約条件)

$$\underline{211}, \underline{22}, \underline{31}, \underline{31} \xrightarrow[2]{\leftarrow} \underline{011}, \underline{02}, 11, 11 \rightarrow \underline{101}, \underline{02}, 11, 11 \rightarrow 110, \underline{02}, 11, 11 \rightarrow 110, 20, 11, 11 \Rightarrow \dots$$

$$2(100, 10, 10, 10) \stackrel{\neq 2}{\neq} *$$

$$010, 10, 10, 10 \stackrel{\neq 1}{\neq} \underline{-110}, \underline{00}, \underline{00}, \underline{00} \leftarrow *$$

$$001, 10, 10, 10 \stackrel{\neq 1}{\neq} \underline{-101}, \underline{00}, \underline{00}, \underline{00} \leftarrow \underline{0-11}, \underline{00}, \underline{00}, \underline{00} \leftarrow *$$

$$2(100, 01, 10, 10) \stackrel{\neq 1}{\neq} 2(\underline{000}, \underline{-11}, \underline{00}, \underline{00}) \leftarrow 2(\underline{000}, -11, 00, 00) \leftarrow 2(000, -11, 00, 00) \leftarrow *$$

$$010, 01, 10, 10 \stackrel{\neq 0}{\neq} \underline{010}, \underline{01}, \underline{10}, \underline{10} \leftarrow \underline{100}, 01, 10, 10 \leftarrow \underline{100}, 01, 10, 10 \leftarrow 100, \underline{10}, 10, 10 \leftarrow \dots$$

$$001, 01, 10, 10 \stackrel{\neq 0}{\neq} \underline{001}, \underline{01}, \underline{10}, \underline{10} \leftarrow \underline{001}, 01, 10, 10 \leftarrow \underline{110}, 01, 10, 10 \leftarrow 010, \underline{10}, 10, 10 \leftarrow \dots$$

$$110, 11, 11, 20 \stackrel{\neq 1}{\neq} \underline{010}, \underline{01}, \underline{01}, \underline{10} \leftarrow \underline{100}, 01, 01, 10 \leftarrow \underline{100}, 01, 01, 10 \leftarrow 100, \underline{10}, 01, 10 \leftarrow \dots$$

$$110, 11, 20, 11 \stackrel{\neq 1}{\neq} \underline{010}, \underline{01}, \underline{10}, \underline{01} \leftarrow \underline{100}, 01, 10, 01 \leftarrow \underline{100}, 01, 10, 01 \leftarrow 100, \underline{10}, 10, 01 \leftarrow \dots$$

18.3 Appell's F_4

22, 22, 31, 22 : rank = 4, 4 parameters, ($1^8 \cdot 2^1$)

$\rightarrow F_1 : 12, 12, 21, 12$

= 01, 01, 10, 01 \oplus 21, 21, 21, 21 (8)

= $2(11, 11, 20, 11) \oplus 00, 00, (-1)1, 00$ (1 : Type 2)

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc}
x=0 & x=1 & x=y & y=0 & y=1 & x=\infty & y=\infty & x=y=\infty \\
[0]_2 & [0]_2 & [0]_3 & [0]_2 & [0]_2 & [d]_2 & [b+c+d]_2 & b+c+2d \\
[b]_2 & [c]_2 & a & [-b]_2 & [-c]_2 & [e]_2 & [b+c+e]_2 & b+c+2e \\
& & & & & & & [0]_2
\end{array} \right\}$$

$$a + 2b + 2c + 2d + 2e = 3, 0 \quad (\text{Fucsh 条件})$$

$u \mapsto y^b(1-y)^c u$ という y 変数についての addition を施すと以下のようになる.

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} x=0 & x=1 & x=y & y=0 & y=1 & x=\infty & y=\infty & x=y=\infty \\ [0]_2 & [0]_2 & [0]_3 & [0]_2 & [0]_2 & [d]_2 & [d]_2 & 2d \\ [b]_2 & [c]_2 & a & [b]_2 & [c]_2 & [e]_2 & [e]_2 & 2e \\ & & & & & & & [-b-c]_2 \end{array} \right\}$$

	t_∞	t_0	t_y	t_1	t_x	idx
t_∞		211	22	211	22	-4
t_0	211		22	211	22	-4
t_y	22	22		22	31	2
t_1	211	211	22		22	-4
t_x	22	22	31	22		2

次の $\Sigma(\mathbf{m})$ の計算には, 21, 21, 21, 21 の結果が使える.

$$\begin{aligned} & \underline{31}, \underline{22}, \underline{22}, \underline{22} \xrightarrow[\downarrow 1]{\leftarrow} 21, \underline{12}, 12, 12 \rightarrow 21, 21, \underline{12}, 12 \rightarrow 21, 21, 21, \underline{12} \rightarrow 21, 21, 21, 21 \Rightarrow \dots \\ & 10, 10, 10, 10 \stackrel{\pm 1}{\leftarrow} * \\ & 10, 01, 10, 10 \stackrel{\pm 1}{\leftarrow} \underline{00}, \underline{-11}, \underline{00}, \underline{00} \leftarrow * \\ & 10, 10, 01, 10 \stackrel{\pm 1}{\leftarrow} \underline{00}, \underline{00}, \underline{-11}, \underline{00} \leftarrow \underline{00}, \underline{00}, \underline{-11}, \underline{00} \leftarrow * \\ & 10, 10, 10, 01 \stackrel{\pm 1}{\leftarrow} \underline{00}, \underline{00}, \underline{00}, \underline{-11} \leftarrow \underline{00}, \underline{00}, \underline{00}, \underline{-11} \leftarrow \underline{00}, \underline{00}, \underline{00}, \underline{-11} \leftarrow * \\ & 2(20, 11, 11, 11) \stackrel{\pm 1}{\leftarrow} 2(\underline{10}, \underline{01}, \underline{01}, \underline{01}) \leftarrow 2(10, \underline{10}, 01, 01) \leftarrow 2(10, 10, \underline{10}, 01) \leftarrow 2(10, 10, 10, \underline{10}) \leftarrow * \\ & 21, 21, 21, 21 \stackrel{\pm 2}{\leftarrow} \underline{01}, \underline{01}, \underline{01}, \underline{01} \leftarrow 01, \underline{01}, 01, 01 \leftarrow 01, 01, \underline{10}, 01 \leftarrow 01, 10, 10, \underline{10} \leftarrow \dots \\ & 10, 10, 01, 01 \stackrel{\pm 0}{\leftarrow} \underline{10}, \underline{10}, \underline{01}, \underline{01} \leftarrow 10, \underline{01}, 01, 01 \leftarrow 10, 01, \underline{10}, 01 \leftarrow 10, 01, 10, \underline{10} \leftarrow \dots \\ & 10, 01, 10, 01 \stackrel{\pm 0}{\leftarrow} \underline{10}, \underline{01}, \underline{10}, \underline{01} \leftarrow 10, \underline{10}, 10, 01 \leftarrow 10, 10, \underline{01}, 01 \leftarrow 10, 10, 01, \underline{10} \leftarrow \dots \\ & 10, 01, 01, 10 \stackrel{\pm 0}{\leftarrow} \underline{10}, \underline{01}, \underline{01}, \underline{10} \leftarrow 10, \underline{10}, 01, 10 \leftarrow 10, 01, \underline{10}, 10 \leftarrow 10, 10, 10, \underline{01} \leftarrow \dots \end{aligned}$$

加藤 [Ko] は, 写像 $\phi(x, y) = (xy, (1-x)(1-y))$ による Appell の超幾何 F_4 の引き戻しが次の方程式の解となることを示した.

$$F_4(\alpha, \beta; \gamma, \gamma'; x, y) = \sum_{m=n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n} (\beta)_{m+n}}{(\gamma)_m (\gamma')_n m! n!} x^m y^n,$$

$$\begin{cases} x(1-x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x) \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha\beta u + \epsilon \frac{y-1}{x-y} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0, \\ y(1-y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)y) \frac{\partial u}{\partial y} - \alpha\beta u + \epsilon \frac{x-1}{y-x} \left(y \frac{\partial u}{\partial y} - x \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \end{cases}$$

ここで $\epsilon = \gamma + \gamma' - \alpha - \beta - 1$ である. さらに

$$\begin{aligned} & b = 1 - \gamma, \quad c = -\gamma', \quad a = 2\epsilon, \quad d = \alpha, \quad e = \beta, \\ & \text{既約} \stackrel{\text{定理 17.4}}{\iff} \delta_1 b + \delta_2 c + \delta_3 (d - e) + e \notin \mathbb{Z} \quad (\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \{0, 1\}). \end{aligned}$$

$$\epsilon = 0 \text{ のとき} \quad u(\alpha, \beta, \gamma; x, y) = F(\alpha, \beta, \gamma; x) \cdot F(\alpha, \beta, \gamma; y) \quad (22)$$

が上の方程式の解になるので, このとき α, β, γ が一般ならば解空間のモノドロミーが (従って方程式も) 既約となる (隣接関係式を使えば, $\epsilon \in \mathbb{Z}$ のときもモノドロミー群は同型となって既約).

対応する Pfaff 系 (18) は、以下によって与えられる.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\gamma & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\gamma \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1-\gamma & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\gamma \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & -\epsilon & 0 \\ 0 & -\epsilon & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha\beta & -\gamma' & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\alpha+\epsilon)(\beta+\epsilon) & -\gamma' \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha\beta & \epsilon & -\gamma' & 0 \\ 0 & -(\alpha+\epsilon)(\beta+\epsilon) & 0 & -\gamma' \end{pmatrix}.$$

18.4 Rank 5 with 6 parameters

I_5 41, 32, 311, 311, J_5 41, 41, 221, 221: $(1^6 \cdot 2^4)$

41, 41, 221, 221 $\rightarrow F_1$: 21, 21, 021, 021

41, 32, 311, 311 $\rightarrow H_2$: 11, 02, 011, 011

41, 41, 221, 221

= 10, 10, 001, 010 \oplus 31, 31, 220, 211 (4)

= 20, 11, 110, 110 \oplus 21, 30, 111, 111 (2)

= 2(10, 10, 100, 100) \oplus 21, 21, 021, 021 (4)

	t_∞	t_0	t_y	t_1	t_x	idx
t_∞		311	311	221	221	-10
t_0	311		32	311	41	2
t_y	311	32		311	41	2
t_1	221	311	311		221	-10
t_x	221	41	41	221		2

18.5 Rank 5 with 5 parameters

41, 32, 32, 221 : $(1^7 \cdot 2^3)$

\rightarrow 31, 22, 22, 220 F_2 : 31, 22, 31, 121

F_1 : 21, 12, 12, 021

= 10, 10, 10, 001 \oplus 31, 22, 22, 220 (1)

= 10, 01, 10, 010 \oplus 31, 31, 22, 211 (4)

= 20, 11, 11, 101 \oplus 21, 21, 21, 120 (2)

= 2(10, 10, 10, 100) \oplus 21, 12, 12, 021 (2)

= 2(20, 11, 11, 110) \oplus 01, 10, 10, 001 (1)

	t_∞	t_0	t_y	t_1	t_x	idx
t_∞		311	32	2111	32	-6
t_0	311		32	2111	32	-6
t_y	32	32		221	41	2
t_1	2111	2111	221		221	-18
t_x	32	32	41	221		2

18.6 Rank 5 with 4 parameters

$P_{4,5}$ 32, 32, 32, 32 : $(1^8 \cdot 2^2)$

$\rightarrow F_4$: 22, 22, 22, 31 F_1 : 12, 12, 12, 12

= 10, 10, 10, 01 \oplus 22, 22, 22, 31 (4)

= 21, 21, 21, 12 \oplus 11, 11, 11, 20 (4)

= 2(10, 10, 10, 10) \oplus 12, 12, 12, 12 (1)

= 2(21, 21, 21, 21) \oplus -(10, 10, 10, 10) (1)

	t_∞	t_0	t_y	t_1	t_x	idx
t_∞		221	221	211	32	-10
t_0	221		221	221	32	-10
t_y	221	221		221	33	-10
t_1	221	221	221		32	-10
t_x	32	32	32	32		2

19 KZ 型方程式の変換

§16 で扱った 2 変数の Pfaff 系は, §15 で述べたように $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ 内の 5 点 $\{t_x, t_y, t_0, t_1, t_\infty\}$ の moduli 空間上の微分方程式系, すなわち 5 変数の Pfaff 系とみることができる*46. t_∞ を ∞ に取って 4 変数の Pfaff 系とみなすと

$$du = \sum_{0 \leq i < j \leq 3} A_{i,j} \frac{d(x_i - x_j)}{x_i - x_j} u, \quad (23)$$

$$A_{j,i} = A_{i,j}, \quad A_{i,i} = 0, \quad A_{i,4} = - \sum_{j=0}^3 A_{i,j} \quad (24)$$

の形となる*47. $A_{i,j}$ は N 次の正方定数行列で, **完全積分可能条件**

$$[A_{i,j}, A_{k,\ell}] = 0 \quad (\forall \{i, j, k, \ell\} \subset \{0, 1, 2, 3, 4\}, \#\{i, j, k, \ell\} = 4) \quad (25)$$

$$[A_{i,j}, A_{i,j} + A_{j,k} + A_{k,i}] = 0 \quad (\forall \{i, j, k\} \subset \{0, 1, 2, 3, 4\}, \#\{i, j, k\} = 3) \quad (26)$$

を満たす. なお (24) より, (25), (26) は, i, j, k, ℓ が 4 でない場合のみを課せば十分である*48.

より一般に

$$A_{i_1, \dots, i_k} = \sum_{1 \leq p < q \leq k} A_{i_p i_q}$$

と置くと

$$[A_{i,j}, A_I] = 0 \quad (I \subset \{0, 1, 2, 3, 4\}, \{i, j\} \subset I \text{ または } \{i, j\} \cap I = \emptyset)$$

が成り立つ. また $A_{0,1,2,3}$ は全ての $A_{i,j}$ と可換となる. 既約な Pfaff 系を考えるとすると, $A_{0,1,2,3}$ はスカラー行列であることが分かるので, それを κI_N と置く. なお, $u \mapsto (x_3 - x_2)^{-\kappa} u$ という変換により $\kappa = 0$ としてよい*49.

$\kappa = 0$ とした方程式には, $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ の番号の置換による **5 次対称群** (位数 120 の群) が作用している. §16 の (x, y) 変数に直すと座標変換に対応するが, それは 4 個の変換

$$(x, y) \mapsto (1 - x, 1 - y), \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right), (y, x), \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right) \quad (27)$$

で生成される*50.

変数 x_0 以外を固定して x_0 についての convolution と middle convolution を考察しよう. §16 では, $A_{0,1} = A_1, A_{0,2} = A_2, A_{0,3} = A_3$ となっていることに注意すると, convolution は以下のように与えられる (cf. [H3]):

$$\tilde{A}_{0,1} = \begin{pmatrix} A_{0,1} + \mu & A_{0,2} & A_{0,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_{0,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ A_{0,1} & A_{0,2} + \mu & A_{0,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

*46 この節は岡シンポジウムの講演には含まれていなかった内容を含む (cf. [O10]).

*47 前節の記号では, $x_0 = t_x, x_1 = t_y, x_2 = t_0, x_3 = t_1, x_4 = t_\infty = \infty$.

§16 の形や (23) の形の Pfaff 系の方程式を, KZ (Knizhnik-Zamolodchikov [KZ]) 型方程式という.

*48 一方, 添え字が 4 の場合も課すと (25) のみで十分. たとえば, $[A_{0,1}, A_{0,2} + A_{1,2}] = [A_{0,1}, -A_{2,3} - A_{2,4}]$.

*49 §16 の座標変換で 5 変数と見なしたときは $\kappa = 0$ となっている.

*50 **演習問題.** このことを示せ. 順に $(t_0, t_1), (t_\infty, t_0), (t_x, t_y), (t_1, t_x)$ の互換に対応する (cf. [O11, §2]).

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_{0,3} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ A_{0,1} & A_{0,2} & A_{0,3} + \mu \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_{0,4} = \begin{pmatrix} -A_{0,1} - \mu & -A_{0,2} & -A_{0,3} \\ -A_{0,1} & -A_{0,2} - \mu & -A_{0,3} \\ -A_{0,1} & -A_{0,2} & -A_{0,3} - \mu \end{pmatrix}, \\
\tilde{A}_{2,3} &= \begin{pmatrix} A_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & A_{2,3} + A_{0,3} & -A_{0,3} \\ 0 & -A_{0,2} & A_{2,3} + A_{0,2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_{1,3} = \begin{pmatrix} A_{1,3} + A_{0,3} & 0 & -A_{0,3} \\ 0 & A_{1,3} & 0 \\ -A_{0,1} & 0 & A_{1,3} + A_{0,1} \end{pmatrix}, \\
\tilde{A}_{1,2} &= \begin{pmatrix} A_{1,2} + A_{0,2} & -A_{0,2} & 0 \\ -A_{0,1} & A_{1,2} + A_{0,1} & 0 \\ 0 & 0 & A_{1,2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_{1,4} = \begin{pmatrix} A_{1,4} + A_{0,1} + A_{0,4} - \mu & 0 & 0 \\ A_{0,1} & A_{1,4} & 0 \\ A_{0,1} & 0 & A_{1,4} \end{pmatrix}, \\
\tilde{A}_{2,4} &= \begin{pmatrix} A_{2,4} & A_{0,2} & 0 \\ 0 & A_{2,4} + A_{0,2} + A_{0,4} - \mu & 0 \\ 0 & A_{0,2} & A_{2,4} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_{3,4} = \begin{pmatrix} A_{3,4} & 0 & A_{0,3} \\ 0 & A_{3,4} & A_{0,3} \\ 0 & 0 & A_{3,4} + A_{0,4} + A_{0,3} - \mu \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

このとき任意の部分集合 $I \subset \{0, 1, 2, 3\}$ に対して

$$\begin{cases} A_I - A_{\{0,1,2,3,4\} \setminus I} = \kappa I_N, \\ \tilde{A}_I - \tilde{A}_{\{0,1,2,3,4\} \setminus I} = (\mu + \kappa) I_{3N} \end{cases} \quad (28)$$

が成り立つ*51.

$\text{mc}_\mu(A_{0,i})$ の Riemann scheme は、単独高階の場合と同様に求められる (cf. [DR]). ただし、Riemann scheme における $[\lambda]_{(m)}$ (cf. (2)) は $[\lambda]_m = \begin{pmatrix} \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix}$ という長さ m の縦ベクトルに置き換えられ、Fuchs 条件は $\text{trace}(A_{0,0}) + \cdots + \text{trace}(A_{0,4}) = 0$ に対応し、記述はより簡単になる.

以下、他の $A_{i,j}$ を含めた多変数の Riemann scheme を求めることを考える. A の固有値型*52を $[A]$ のように書くことにすると、関係式

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A+B & -B \\ -C & A+C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B \\ 0 & A+B+C \end{pmatrix}, \\
&\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B+C & B & C \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

より、留数行列 $A_{i,j}$ の convolution による固有値型の変換が

$$\begin{aligned}
[\tilde{A}_{0,i}] &= [A_{0,i} + \mu] \cup [0]_{2N} \quad (1 \leq i \leq 3), \quad [\tilde{A}_{0,4}] = [A_{0,4} - \mu] \cup [-\mu]_{3N}, \\
[\tilde{A}_{i,j}] &= [A_{i,j}]_2 \cup [A_{0,i,j}] = [A_{i,j}]_2 \cup [A_{\{1,2,3,4\} \setminus \{i,j\}} + \kappa] \quad (1 \leq i < j \leq 3), \\
[\tilde{A}_{i,4}] &= [A_{i,4}]_2 \cup [A_{0,i,4} - \mu] = [A_{i,4}]_2 \cup [A_{\{1,2,3\} \setminus \{i\}} - \kappa - \mu] \quad (1 \leq i \leq 3)
\end{aligned}$$

で与えられる事が分かる.

middle convolution $\text{mc}_\mu(A_{i,j})$ の固有値型を求めるには $\tilde{A}_{i,j}$ -不変な \mathbb{C}^{3N} の部分空間

$$\mathcal{K}_1 = \begin{pmatrix} \ker A_{0,1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \ker A_{0,2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{K}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ker A_{0,3} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} v \\ v \\ v \end{pmatrix} \mid A_{0,4}v = \mu v \right\}$$

*51 $A_\emptyset = A_i = 0$ と解釈する.

*52 Riemann scheme の一つの特異点での固有値と重複度のデータで $\{[\lambda]_{k_1}, [\lambda']_{k_2}\}_m = \{[\lambda]_{mk_1}, [\lambda']_{mk_2}\}$ のように解釈する. 共役類を表すデータと考えてもよい.

における $\tilde{A}_{i,j}$ の固有値型が分かればよい。それは完全積分可能条件に注意すると

$$\begin{aligned}
[\tilde{A}_{0,1}|\mathcal{K}_1] &= [\mu|_{\ker A_{0,1}}], \\
[\tilde{A}_{0,i}|\mathcal{K}_1] &= [0|_{\ker A_{0,1}}] \quad (2 \leq i \leq 3), \\
[\tilde{A}_{0,4}|\mathcal{K}_1] &= [-\mu|_{\ker A_{0,1}}], \\
[\tilde{A}_{2,3}|\mathcal{K}_1] &= [A_{2,3}|_{\ker A_{0,1}}], \\
[\tilde{A}_{1,i}|\mathcal{K}_1] &= [A_{0,1,i}|_{\ker A_{0,1}}] = [A_{5-i,4} + \kappa|_{\ker A_{0,1}}] \quad (2 \leq i \leq 3), \\
[\tilde{A}_{i,4}|\mathcal{K}_1] &= [A_{i,4}|_{\ker A_{0,1}}] \quad (2 \leq i \leq 3), \\
[\tilde{A}_{1,4}|\mathcal{K}_1] &= [(A_{0,1,4} - \mu)|_{\ker A_{0,1}}] = [(A_{2,3} - \kappa - \mu)|_{\ker A_{0,1}}], \\
[\tilde{A}_{0,i}|\mathcal{L}] &= [0|_{\ker(A_{0,4}-\mu)}] \quad (1 \leq i \leq 4), \\
[\tilde{A}_{i,j}|\mathcal{L}] &= [A_{i,j}|_{\ker(A_{0,4}-\mu)}] \quad (1 \leq i < j \leq 3), \\
[\tilde{A}_{i,4}|\mathcal{L}] &= [(A_{0,i,4} - \mu)|_{\ker(A_{0,4}-\mu)}] = [(A_{\{1,2,3\}\setminus\{i\}} - \kappa - \mu)|_{\ker(A_{0,4}-\mu)}] \quad (1 \leq i \leq 3)
\end{aligned}$$

のように与えられることが分かる。よって $\{i, j, k, \ell\} \subset \{0, 1, 2, 3, 4\}$ とするとき, $(\tilde{A}_{i,j}, \tilde{A}_{k,\ell})$ やそれを $\mathbb{C}^{3N}/(\mathcal{K} + \mathcal{L})$ に落としたときの同時固有空間分解の型 (同時共役類) を求めたい。その型を $[\]$ で囲って表すと, 具体的には (cf. [O10, Theorem 7.1])

$$\begin{aligned}
[\tilde{A}_{0,1} : \tilde{A}_{2,3}] &= \{[A_{0,1} + \mu : A_{2,3}] \supset \bar{\mathcal{K}}_1, [0 : A_{2,3}] \supset \bar{\mathcal{L}}, [0 : A_{1,4} + \kappa] \supset \bar{\mathcal{K}}_2 + \bar{\mathcal{K}}_3\}, \\
[\tilde{A}_{0,1} : \tilde{A}_{2,4}] &= \{[A_{0,1} + \mu : A_{2,4}] \supset \bar{\mathcal{K}}_1, [0 : A_{2,4}] \supset \bar{\mathcal{K}}_3, [0 : A_{1,3} - \kappa - \mu] \supset \bar{\mathcal{K}}_2 + \bar{\mathcal{L}}\}, \\
[\tilde{A}_{0,4} : \tilde{A}_{1,2}] &= \{[A_{0,4} - \mu : A_{1,2}] \supset \bar{\mathcal{L}}, [-\mu : A_{1,2}] \supset \bar{\mathcal{K}}_3, [-\mu : A_{3,4} + \kappa] \supset \bar{\mathcal{K}}_1 + \bar{\mathcal{K}}_2\}, \\
[\tilde{A}_{1,2} : \tilde{A}_{3,4}] &= \{[A_{1,2} : A_{3,4}], [A_{1,2} : A_{1,2} - \kappa - \mu] \supset \bar{\mathcal{K}}_3 + \bar{\mathcal{L}}, [A_{3,4} + \kappa : A_{3,4}] \supset \bar{\mathcal{K}}_1 + \bar{\mathcal{K}}_2\}
\end{aligned} \tag{29}$$

などとなり, $\{1, 2, 3\}$ についての対称性から 15 組ある^{*53}。上では $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3, \mathcal{L}$ の同時固有空間分解がどうなると考えてよいかも示したので, これによって自明な方程式から, middle convolution や addition や 5 次の対称群の組み合わせで得られる KZ 方程式のスペクトル型が帰納的に求められることが分かる。なお $\bar{\mathcal{K}}_j = \ker A_{0,j}$, $\bar{\mathcal{L}} = \ker(A_{0,4} - \mu) \subset \mathbb{C}^N$ と置いている。

20 ベキ級数解

§16 にあるような 2 変数の場合, ある特異点でのべき級数解は

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= x^{\lambda_{0,n_1}} (1-x)^{\lambda_{(0)1,max}} (1-y)^{\lambda_{(0)2,max}} \sum_{\nu_{1,1}=1}^{\infty} \sum_{\nu_{2,1}=1}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_{1,K}=1}^{\infty} \sum_{\nu_{2,K}=1}^{\infty} \\
&\prod_{i=0}^{K-1} \frac{(\lambda(i)_{0,n_1} - \lambda(i)_{0,max} + 1)_{\sum_{s=1}^2 \sum_{t=i+1}^K \nu_{s,t}}}{(\lambda(i)_{0,n_1} - \lambda(i)_{0,max} + \mu(i) + 1)_{\sum_{s=1}^2 \sum_{t=i+1}^K \nu_{s,t}}} \\
&\cdot \prod_{i=1}^K \prod_{s=1}^2 \frac{(\lambda(i-1)_{s,max} - \lambda(i)_{s,max})_{\nu_{s,i}}}{\nu_{s,i}!} \cdot x^{\sum_{i=1}^K \nu_{1,i}} \cdot y^{\sum_{i=1}^K \nu_{2,i}}
\end{aligned}$$

^{*53} (29) では順に 3 組, 6 組, 3 組, 3 組で合計 15 組。たとえば 3 変数では $[I_2 : I_3 : I_4]$ ($I_2 \subset I_3 \subset I_4$, $\#I_\nu = \nu$) が対称性を考えて 90 組, $[I_2^{(1)} : I_2^{(2)} : I_2^{(3)}]$ ($I_2^{(i)} \cap I_2^{(j)} = \emptyset$, $\#I_2^{(i)} = 2$, $i \neq j$) が 15 組など, 変数の数が増えればより複雑になる (cf. (28)).

$$\lambda(i-1)_{s,max} = \lambda(i)_{s,max} \Rightarrow \nu_{s,i} = 0$$

によって与えられることが、最初に Gauss 超幾何で述べたと同様な方法で得られる（記号の詳しい説明は略す）。なお、 $\lambda(i)_{s,max}$ などは reduction の途中に現れる特性指数である。

自明な方程式から始めて、 x についての addition と middle convolution のみで考えている Pfaff 系が構成できるが、その途中で $x = y$ での addition を 1 回しか行わないなら、上のべき級数の $x^i y^j$ の係数がパラメータの一次式を中身とするガンマ関数の積 2 つの商となる。

そのような方程式の例には、1 変数のときは H_m の記号の一般超幾何級数、2 変数では以下の I_{2m}, I_{2m+1} の記号の Pfaff 系がある：

$$\begin{aligned} {}_m F_{m-1} : H_m &= 1^m, (m-1)1, 1^m \xleftarrow{H_1} H_{m-1} \\ I_{2m} &\xleftarrow{mH_1} H_m, \quad I_{2m+1} \xleftarrow{(m+1)H_1} H_m \\ 1, 1, 1 &\rightarrow 11, \underline{2}1, 11 \rightarrow 111, \underline{3}1, 111 \rightarrow 1111, \underline{4}1, 1111 \rightarrow \dots \\ 1^m, \underline{1}^m, \underline{(m-1)}1 &\rightarrow I_{2m} : m1^m, (m+1)1^{m-1}, \underline{(2m-1)}1, mm \\ 1^m, 1^m, \underline{(m-1)}1 &\rightarrow I_{2m+1} : (m+1)1^m, (m+1)1^m, \underline{(2m)}1, (m+1)m \end{aligned}$$

21 コンピュータ・プログラム

今まで述べてきた結果や式は、全て構成的な証明で示されているので、そのアルゴリズムをコンピュータ・プログラムで実現できる。微分方程式の具体形、解の積分表示やべき級数表示、接続公式、隣接関係式、既約性などがその例で、数式処理言語 Risa/Asir 上の [O12, os_muldif] で実現されている。スペクトル型やその reduction などの組み合わせ論的なものについては C 言語で書かれた [O12, okubo] もサポートしている。

参考文献

- [Ar] D. Arinkin, *Rigid irregular connections on \mathbb{P}^1* , Compos. Math., **146** (2010), 1323–1338.
- [CB] W. Crawley-Boevey, *On matrices in prescribed conjugacy classes with no common invariant subspaces and sum zero*, Duke Math. J. **118** (2003), 339–352.
- [DR] M. Dettweiler and S. Reiter, *An algorithm of Katz and its applications to the inverse Galois problems*, J. Symbolic Comput. **30** (2000), 761–798.
- [DR2] M. Dettweiler and S. Reiter, *Middle convolution of Fuchsian systems and the construction of rigid differential systems*, J. Algebra **318** (2007), 1–24.
- [H1] 原岡喜重, 超幾何関数, すうがくの風景 7, 朝倉書店, 2002.
- [H2] Y. Haraoka, *Middle convolution for completely integrable systems with logarithmic singularities along hyperplane arrangements*, Adv. Studies in Pure Math. **62**(2012), 109–136.

- [H3] 原岡喜重, 複素領域における線形微分方程式, 数学書房, 2015, 363pp.
- [HF] Y. Haraoka and G. M. Filipuk, *Middle convolution and deformation for Fuchsian systems*, J. Lond. Math. Soc. **76** (2007), 438–450.
- [HeO] G. J. Heckman and E. M. Opdam, *Root systems and hypergeometric functions I*, Comp. Math. **64** (1987), 329–352.
- [Hi] K. Hiroe, *Linear differential equations on \mathbb{P}^1 and root systems*, J. of Alg. **382** (2013), 1–38.
- [HO] K. Hiroe and T. Oshima, *A classification of roots of symmetric Kac-Moody root systems and its application*, *Symmetries, Integrable Systems and Representations*, Springer Proc. in Mathematics and Statistics, 2012, 195–241.
- [Hu] M. Hukuhara, *Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires, III*, Mem. Fac. Sci. Kyūsyū Imp. Univ. Ser. A **2** (1941), 125–137.
- [Kc] V. Kac, *Infinite-dimensional Lie algebras*, Third edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [Ko] M. Kato, *A Pfaffian system of Appell's F_4* , Bull. College Educ. Univ. Ryukyus **33** (1988), 331–334.
- [KMS] M. Kato, T. Mano and J. Sekiguchi, *Flat structure on the space of isomonodromic deformations*, arXiv:1511.01608.
- [Kaz] N. M. Katz, *Rigid Local Systems*, Annals of Mathematics Studies, vol. 139, Princeton University Press, 1995.
- [KZ] V. Knizhnik and A. Zamolodchikov, *Current algebra and Wess-Zumino model in 2 dimensions*, Nucl. Phys. B **247** (1984), 83–103.
- [公 III] 森口繁一, 宇田川鉄久, 一松信, 「数学公式 III」, 岩波全書, 岩波書店, 1960.
- [OOS] H. Ochiai, T. Oshima and H. Sekiguchi, *Commuting families of symmetric differential operators*, Proc. Japan. Acad. **70** Ser. A (1994), 62–64.
- [Op] E. M. Opdam, *An analogue of the Gauss summation formula for hypergeometric functions related to root systems*, Math. Z. **212** (1993), 313–336.
- [O1] 大島利雄, 半単純リー環の既約表現の次元, ユニタリー表現論セミナー報告集 I (1981), 122–140.
<http://dml.ms.u-tokyo.ac.jp/PSRT/>
- [O2] T. Oshima, *A quantization of conjugacy classes of matrices*, Advances in Math. **196** (2005), 124–146.
<http://www.sciencedirect.com/science/journal/00018708/196/1>
- [O3] T. Oshima, *Completely integrable quantum systems associated with classical root systems*, SIGMA **3** (2007), 071, 50pp.
<http://www.emis.de/journals/SIGMA/>
- [O4] 大島利雄, 特殊函数と代数的線型常微分方程式, 東京大学数理科学, レクチャーノート **11**,

- 2011, 111pp (廣惠一希記).
<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/publication/documents/spfct3.pdf>
- [O5] T. Oshima, *Fractional calculus of Weyl algebra and Fuchsian differential equations*, MSJ Memoirs **28** (2012), xix+203pp.
<http://projecteuclid.org/all/euclid.msjm>
- [O6] T. Oshima, *Classification of Fuchsian systems and their connection problem*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B37** (2013), 163–192.
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu-j-back.html>
- [O7] T. Oshima, *An elementary approach to the Gauss hypergeometric function*, Josai Mathematical Monographs **6** (2013), 2–23.
<http://libir.josai.ac.jp/contents/josai/kiyou/jmm/6/jmm06.htm>
- [O8] T. Oshima, *Katz’s middle convolution and Yokoyama’s extending operation*, Opuscula Math. **35** (2015), 665–688.
<http://www.opuscula.agh.edu.pl/>
- [O9] T. Oshima, *Reducibility of hypergeometric equations*, to appear in Analytic, Algebraic and Geometric Aspects of Differential Equations, Trends in Mathematics, Springer, 2016.
- [O10] T. Oshima, *Transformations of KZ type equations*, to appear in RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B61** (2017), 141–161.
- [O11] 大島利雄, *KZ型超幾何系の変換と解析, 表現論と非可換調和解析をめぐる諸問題*, 35pp, 数理解析研究所講究録に掲載予定.
- [O12] 大島利雄, *数式処理言語 Risa/Asir のライブラリ os_muldif.rr (2007–2016), および, スペクトル型計算のコンピュータプログラム okubo (2007–2008)*.
<ftp://akagi.ms.u-tokyo.ac.jp/pub/math/muldif>
<ftp://akagi.ms.u-tokyo.ac.jp/pub/math/okubo>
- [OS] T. Oshima and N. Shimeno, *Heckman-Opdam hypergeometric functions and their specializations*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B20** (2010), 129–162.
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu-j-back.html>
- [Sa] H. Sakai, *Isomonodromic deformation and 4-dimensional Painlevé type equations*, UTMS **2010-17**, preprint, 2010.
- [Si] C. T. Simpson, *Products of Matrices*, Canadian Math. Soc. Conference Proceedings **12**, AMS, Providence RI (1991), 157–185.
- [Sz] T. Suzuki, *Six-dimensional Painlevé systems and their particular solutions in terms of rigid systems*, J. Math. Phys., **55** (2014), 102902.
- [Yo] T. Yokoyama, *Construction of systems of differential equations of Okubo normal form with rigid monodromy*, Math. Nachr. **279** (2006), 327–348.