分かる Fuchs 型常微分方程式[1]

大島 利雄（東京大学大学院 数理科学研究科）

1. 序

Gauss の超幾何級数

$$(1.1)\qquad F(\alpha,\beta,\gamma;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta_n)}{(\gamma)_n}\frac{z^n}{n!},$$
$$(\alpha)_n:=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$$

として与えられる超幾何関数は Gauss の超幾何微分方程式

$$(1.2)\qquad z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2}+\bigl(\gamma-(\alpha+\beta+1)z\bigr)\frac{du}{dz}-\alpha\beta u=0$$

の（原点で正則で 1 の値を取る）解として特徴づけられる．

この Gauss の超幾何関数は，特殊関数の中で最も重要で基本的であり，解析接続を行って得られる大域的な性質がよく**分かり**，様々な公式が知られており，合流操作やパラメータの特殊化で得られる Bessel 関数や Legendre 多項式などの直交多項式系などを含め，応用上も重要な位置を占めている．

実際，岩波全書の数学公式 III は「特殊函数」であるが（[MUI]），本文 254 ページのうち 180 ページ，すなわち 7 割以上がそれで占められている．残りの前部 2 割強はガンマ関数や楕円関数など Gauss の超幾何関数と関連の深い関数，後部 1 割弱は Lamé 関数や Machieu 関数などの楕円体関数，すなわち Gauss の超幾何関数と違ってより難しい「**分からない**」関数で占められている．

一般に複素領域における正則関数を係数とする n 階の常微分方程式

$$(1.3)\qquad a_n(z)u^{(n)}+\cdots+a_1(z)u'+a_0(z)u=0$$

において，$a_n(z)$ の零点を方程式の**特異点**という．p を特異点以外の点とすると，点 p の近傍での (1.3) の正則解とその n 個の初期データ $u^{(k)}(p)$ $(k=0,\dots,n-1)$ とが対応しており，その解は方程式の特異点を除いた領域の多価解析関数に解析接続できる．

定義 1.1. 方程式 (1.3) の特異点 z_0 において $a_k(z)/a_n(z)$ が高々$n-k$ 位の極となっているとき，z_0 を (1.3) の**確定特異点**といい，そうでない特異点を**不確定特異点**という．

[1]第 47 回実函数論・函数解析学合同シンポジウム (2008 年 8 月 6–8 日，於慶応大学) の講演集の特別講演の原稿に加筆

$z_0 = 0$ を方程式の確定特異点とすると，(1.3) の左辺から $z^n/a_n(z)$ を掛けることにより，方程式は

$$p(\vartheta)u = zR(z,\vartheta)u, \quad \vartheta = z\frac{d}{dz} \tag{1.4}$$
$$p(\vartheta) = \vartheta^n + c_{n-1}\vartheta^{n-1} + \cdots + c_1\vartheta + c_0 \qquad (c_j \in \mathbb{C})$$
$$R(z,\vartheta) = r_{n-1}(z)\vartheta^{n-1} + \cdots + r_1(z)\vartheta + r_0(z)$$

の形になり，**決定方程式**

$$p(s) = 0 \tag{1.5}$$

の根，すなわち**特性指数** $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ において，たとえば $\lambda_j - \lambda_1 \neq \{1, 2, \ldots\}$ $(j = 2, \ldots, n)$ ならば原点に特異点を持つ原点の近傍での多価解析解 $u_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{1,n}z^{\lambda_1+n}$ が $u_{1,0} \in \mathbb{C}$ を与えることにより以下によって定まる．

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(\lambda_1 + n)u_{1,n}z^{\lambda_1+n} = \sum_{k=0}^{\infty} zR(z, \lambda_1 + k)u_{1,k}z^{\lambda_1+k} \tag{1.6}$$

実際，上式の右辺の z^{λ_1+n} の係数は $u_{1,k}$ $(k < n)$ で決まるので，両辺を比較することによって $u_{1,n}$ は $u_{1,k}$ $(k < n)$ から定まる．よって $u_{1,n}$ は帰納的に順に定まる．確定特異点の近傍では，このような具体的な方法で（特性指数に関する条件が成り立たない場合も含め，$\log z$ が現れることも許すと同様な考察ができ），n 個の独立解を構成できて，特異点の周りの局所解の表示が得られ，特に特異点における多価解析性や増大度が**分かる**．

単独 n 階方程式を 1 階のシステムに変換した形で述べれば，$z = 0$ に確定特異点をもつ方程式とは

$$\frac{d\tilde{u}}{dz} = A(z)\tilde{u} \tag{1.7}$$

の形であって，$A(z)$ は n 次正方行列で，$zA(z)$ の各成分が原点で正則な関数に拡張できる場合をいう．

Fuchs 型常微分方程式とは，リーマン球面上で定義された有限個の特異点を持つ複素常微分方程式で，特異点は全て確定特異点となるものを指す．通常は単独高階[2]か 1 階システムを考える．

Gauss の超幾何微分方程式は $z = 0, 1, \infty$ の 3 点に確定特異点をもつ Fuchs 型方程式で，Riemann Scheme では以下のように表せる．

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z) \in P\left\{\begin{matrix} z=0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha & ;\ z \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta & \end{matrix}\right\} \tag{1.8}$$

Riemann Scheme とは，上のように各特異点での（独立な）局所解の特異性（確定特異点での特性指数）を記述したものである．

逆に上の Riemann Scheme をもつ Fuchs 型方程式は，Gauss の超幾何微分方程式に限ることが容易に示される．すなわち特異点が $z = 0, 1, \infty$ であっ

[2]単独高階の形のものは，微分方程式の係数は多項式の形に表せる

て，その特性指数がそれぞれ $\{0, 1-\gamma\}$, $\{0, \gamma-\alpha-\beta\}$, $\{\alpha, \beta\}$ となる Fuchs 型方程式が，Gauss の超幾何微分方程式である．

「**分かる**」とは，「**必要な大域的情報が局所的情報などから具体的に分かる**」状況を指すことと考える．

単独で 3 階以上では**アクセサリー・パラメータ**が現れる．すなわち，各特異点での特性指数を与えだけでは Fuchs 型方程式は一意に定まらない．一方，特異点が 4 点以上あると幾何的モジュライが現れる．よって分かる方程式とは（狭い意味では）単独 2 階で特異点が 3 つの場合，すなわち **Gauss の超幾何**に対応する場合ということになる．実際この場合は，**大域モノドロミー**やより詳しい**接続公式**は代数的に求まる（Gauss による証明 – Gauss の和公式 – には，積分や微分は現れない）．

分かる Fuchs 型常微分方程式とは何か？ それを知りたい．表現論などから得られる多くの方程式は，そのような例を与えていると考えられ，それがうまくいっている原理とその一般化を知りたい，というのが興味を持つきっかけであった．

一方，Gauss の超幾何の他に接続公式が具体的にガンマ関数で表せている（日本で）一般超幾何と呼ばれているものがあり，それは

$$
{}_nF_{n-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k \cdots (\alpha_n)_k}{(\beta_1)_k \cdots (\beta_{n-1})_k} \frac{z^k}{k!} \tag{1.9}
$$

と書かれるベキ級数の満たす n 階の方程式である．これは 0, 1, ∞ に確定特異点を持っているが「$z=1$ の近傍で $n-1$ 次元の正則解を持つ」ということで特徴づけられる．この性質をもてばアクセサリー・パラメータ無しに，局所情報だけで方程式が定まる．たとえば特異点 3 つの 3 階単独方程式は 1 つのアクセサリー・パラメータをもつが．そのパラメータを「$z=1$ で 2 次元の正則解をもつ」（あるいは「1 における局所モノドロミーの型（**スペクトルタイプ**）を特別のものに限った」）という条件で定めたので，局所的状況から方程式が一意に定まり「分かる方程式になった」という言い方ができる．

アクセサリー・パラメータが現れないようにスペクトルタイプを限った方程式を **rigid** な方程式とよぶ．それは「**分かる方程式**」の一候補と考えられる．

2. Gauss の超幾何関数

2.1. Gauss の超幾何級数の性質.

$$
F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k} \frac{z^k}{k!} = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \cdots
$$

$$
z(1-z)u'' + \bigl(\gamma - (\alpha+\beta+1)z\bigr)u' - \alpha\beta u = 0
$$

から以下が容易に分かる．

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z)' = \frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1;z) \tag{2.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} F(\alpha,\beta,\gamma+n;z) = 1 \qquad (|z|\le 1) \tag{2.2}$$

さらに

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z) \in P\begin{Bmatrix} z=0 & 1 & \infty & \\ \underline{0} & 0 & \alpha & ;\ z \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta & \end{Bmatrix}$$
$$= (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} P\begin{Bmatrix} z=0 & 1 & \infty & \\ \underline{0} & \alpha+\beta-\gamma & \gamma-\beta & ;\ z \\ 1-\gamma & 0 & \gamma-\alpha & \end{Bmatrix}$$

より，次の **Kummer の変換式**が分かる．

$$(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma}F(\alpha,\beta,\gamma;z) = F(\gamma-\beta,\gamma-\alpha,\gamma;z) \tag{2.3}$$

2.2. **モノドロミー．** 特異点が 3 点の 2 階の一般の Fuchs 型常微分方程式を考えよう．特異点は一次分数変換で 0, 1, ∞ に変換するとその Riemann Scheme は

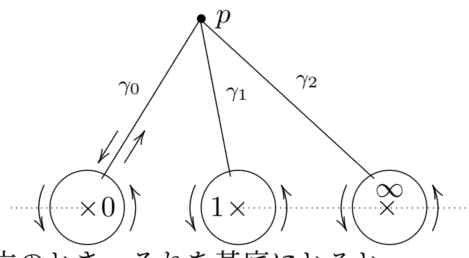
$$P\begin{Bmatrix} z=0 & 1 & \infty \\ \lambda_{0,1} & \lambda_{1,1} & \lambda_{2,1} \\ \lambda_{0,2} & \lambda_{1,2} & \lambda_{2,2} \end{Bmatrix} \tag{2.4}$$

となるが，このような方程式が存在するためには以下の関係式が成り立たなければならないので，その条件を課す．

$$\lambda_{0,1}+\lambda_{0,2}+\lambda_{1,1}+\lambda_{1,2}+\lambda_{2,1}+\lambda_{2,2} = 1 \quad \text{(Fuchs の関係式)} \tag{2.5}$$

この解に $z^{-\lambda_{0,2}}(1-z)^{-\lambda_{1,2}}$ を掛ける変換で，Gauss の超幾何微分方程式に移る．よって特異点が 3 点の 2 階の Fuchs 型常微分方程式は，Gauss の超幾何微分方程式に変換されることに注意しよう．

(2.4) の各特異点の特性指数 $\lambda_{j,\nu}$ に対応する正規化された局所解を $u_{j,\nu}$ とおき，この解の解析接続を考察する．



$u_{0,2}$, $u_{1,2}$ が一次独立のとき，それを基底にとると．

$(\gamma_j u_{0,2}, \gamma_j u_{1,2}) = (u_{0,2}, u_{1,2})M_j \quad (M_j \in GL(2,\mathbb{C}))$ ：モノドロミー

$$M_0 = \begin{pmatrix} e^{2\pi i\lambda_{0,2}} & a_0 \\ 0 & e^{2\pi i\lambda_{0,1}} \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} e^{2\pi i\lambda_{1,1}} & 0 \\ a_1 & e^{2\pi i\lambda_{1,2}} \end{pmatrix}, \quad M_2M_1M_0 = I_2$$

となるので

$$\operatorname{trace} M_1M_0 = e^{2\pi i(\lambda_{0,2}+\lambda_{1,1})} + a_0a_1 + e^{2\pi i(\lambda_{0,1}+\lambda_{1,2})} = e^{-2\pi i\lambda_{2,1}} + e^{-2\pi i\lambda_{2,2}}$$

$$\begin{aligned}a_0a_1 &= e^{-2\pi i\lambda_{2,1}} + e^{-2\pi i\lambda_{2,2}} - e^{2\pi i(\lambda_{0,2}+\lambda_{1,1})} - e^{2\pi i(\lambda_{0,1}+\lambda_{1,2})}\\ &= e^{-2\pi i\lambda_{2,2}}(e^{2\pi i(\lambda_{0,2}+\lambda_{1,1}+\lambda_{2,2})}-1)(e^{2\pi i(\lambda_{0,1}+\lambda_{1,2}+\lambda_{2,2})}-1)\end{aligned}$$

より

$$a_0a_1 \neq 0 \iff \lambda_{0,1}+\lambda_{1,2}+\lambda_{2,\nu} \notin \mathbb{Z} \quad (\nu = 1,\, 2)$$

$u_{0,2}$ と $u_{1,2}$ とが一次独立でないときも考慮すると

既約 $\iff \lambda_{0,1}+\lambda_{1,\mu}+\lambda_{2,\nu} \notin \mathbb{Z} \quad (\mu,\, \nu = 1, 2)$

2.3. **接続公式.**

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z) = \phi(w) + C_{\alpha,\beta,\gamma}\cdot w^{\gamma-\alpha-\beta}(1+a_1w+\cdots) \qquad (w = 1-z) \tag{2.6}$$

で定義される定数 $C_{\alpha,\beta,\gamma}$ を決定したい ($\phi(w)$ は $w=0$ で正則)．微分すると

$$\begin{aligned}\frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1;z) &= -\phi(w)'\\ &\quad + C_{\alpha,\beta,\gamma}(\alpha+\beta-\gamma)\cdot w^{\gamma-\alpha-\beta-1}(1+b_1w+\cdots)\end{aligned}$$

となることより

$$C_{\alpha+1,\beta+1,\gamma+1} = \frac{\gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\alpha\beta}C_{\alpha,\beta,\gamma} \tag{2.7}$$

また Kummer の変換式 (2.3) より

$$F(\gamma-\beta,\gamma-\alpha,\gamma;z) = w^{\alpha+\beta-\gamma}\phi(w) + C_{\alpha,\beta,\gamma}(1+a_1w+\cdots)$$

であるが，(2.2) から

$$\lim_{n\to\infty} F(\gamma-\beta,\gamma-\alpha,\gamma+n;z) = 1 \quad (|z|\leq 1) \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} C_{\alpha+n,\beta+n,\gamma+n} = 1$$

となるので，$C_{\alpha,\beta,\gamma}$ が求まる:

$$\begin{aligned}C_{\alpha,\beta,\gamma} &= \frac{(\alpha)_n(\beta)_nC_{\alpha+n,\beta+n,\gamma+n}}{(\gamma)_n(\alpha+\beta-\gamma)_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n(\alpha+\beta-\gamma)_n}\\ &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}.\end{aligned} \tag{2.8}$$

これを一般の形に直すのは容易である：

$$\begin{aligned}&P\left\{\begin{matrix} z=0 & 1 & \infty & \\ \lambda_{0,1} & \lambda_{1,1} & \lambda_{2,1} & ;z \\ \lambda_{0,2} & \lambda_{1,2} & \lambda_{2,2} & \end{matrix}\right\}\\ &= z^{\lambda_{0,2}}(1-z)^{\lambda_{1,1}}P\left\{\begin{matrix} z=0 & 1 & \infty & \\ \lambda_{0,1}-\lambda_{0,2} & 0 & \lambda_{0,2}+\lambda_{1,1}+\lambda_{2,1} & ;z \\ 0 & \lambda_{1,2}-\lambda_{1,1} & \lambda_{0,2}+\lambda_{1,1}+\lambda_{2,2} & \end{matrix}\right\}\\ &\ni u_{0,2} = z^{\lambda_{0,2}}(1-z)^{\lambda_{1,1}}F(\lambda_{0,2}+\lambda_{1,1}+\lambda_{2,1},\lambda_{0,2}+\lambda_{1,1}+\lambda_{2,2},\lambda_{0,2}-\lambda_{0,1}+1;z)\\ &\qquad = c_{\{\lambda\}}(\lambda_{0,2}\rightsquigarrow\lambda_{1,1})\cdot u_{1,1} + c_{\{\lambda\}}(\lambda_{0,2}\rightsquigarrow\lambda_{1,2})\cdot u_{1,2}\end{aligned}$$

であるから (2.7) より

$$c_{\{\lambda\}}(\lambda_{0,2}\rightsquigarrow\lambda_{1,2}) = \frac{\Gamma(\lambda_{0,2}-\lambda_{0,1}+1)\Gamma(\lambda_{1,1}-\lambda_{1,2})}{\Gamma(\lambda_{0,2}+\lambda_{1,1}+\lambda_{2,1})\Gamma(\lambda_{0,2}+\lambda_{1,1}+\lambda_{2,2})}. \tag{2.9}$$

3. Fuchs 型常微分方程式

3.1. **行列の共役類.** n 階の方程式の解の確定特異点での局所モノドロミーは n 次の可逆な線形変換である．1 階のシステムの形に表示したとき，方程式を定める (1.7) の行列 $A(z)$ の特異点での留数行列 A_o の固有値が generic[3]であれば，その指数関数 $e^{2\pi\sqrt{-1}A_o}$ が局所モノドロミーを与える線形変換となる．

線形変換または留数行列の共役類の代表元を以下のように与える．

$$
\begin{aligned}
&L(m,\lambda) := \Big(A_{ij}\Big)_{\substack{1\le i\le N\\ 1\le j\le N}} \in M(n,\mathbb{C}),\\
&\qquad m=(m_1,\dots,m_N)\in\mathbb{Z}^N_{>0},\quad \lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_N)\in\mathbb{C}^N,\\
&\qquad n=m_1+m_2+\cdots+m_N,\quad m_1\ge m_2\ge\cdots\ge m_N,\\
&\qquad A_{ij}=\begin{cases}\lambda_i I_{m_i} & (j=i)\\ I_{m_i,m_j} := \Big(\delta_{\mu,\nu}\Big)_{\substack{1\le\mu\le m_i\\ 1\le\nu\le m_j}} & (j=i+1)\\ 0 & (j\ne i,\, i+1)\end{cases} \quad \in M(m_i,m_j\,;\mathbb{C}),
\end{aligned}
$$

$$
L(m,\lambda)=\begin{pmatrix}
\lambda_1 & & & 1 & & & & & & & \\
 & \ddots & & & \ddots & & & & & & \\
 & & \lambda_1 & & & & & & & & \\
 & & & \lambda_2 & & & 1 & & & & \\
 & & & & \ddots & & & \ddots & & & \\
 & & & & & \lambda_2 & & & & & \\
 & & & & & & \lambda_3 & & & 1 & \\
 & & & & & & & \ddots & & & \ddots \\
 & & & & & & & & \lambda_3 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & \lambda_N
\end{pmatrix}.
$$

このとき以下が成り立つ[4]

$$\dim Z_{M(n,\mathbb{C})}\big(L(m,\lambda)\big) = m_1^2+m_2^2+\cdots+m_N^2 \quad (\lambda \text{ に依らず } m \text{ で定まる})$$

注意 3.1. Jordan 標準型 $J(m,\lambda)$ も n の分割 m と分割の個数に応じた複素数の組 λ を与えると定まる．$L(m,\lambda)$ との対応は，固有値が同じものを集めた分割がお互いに相対（Young 図形の転置）になっていること，と述べられる．

---

[3]局所モノドロミーの固有値は留数行列の固有値から定まるが，一般には A_o が半単純でも局所モノドロミーは半単純とは限らない．特性指数の差に 0 でない整数が現れる場合は，特異点での展開の差の大きさに応じた特異点での $A(z)$ の正則項の Tayler 展開に依る

[4]$L(m,\lambda)$ の共役類の閉包 $V_{m,\lambda}$ は，$\mathbb{C}^{n^2}$ に含まれる代数多様体となるが，その生成元の具体的表示が [Os] で与えられた．それは λ の多項式を係数とする $\mathbb{C}^{n^2}$ 上の多項式となる

3.2. **Riemann Scheme.** 一般超幾何級数 ${}_nF_{n-1}(\alpha,\beta;z)$ の満たす n 階 Fuchs 型微分方程式は，$z=1$ で $n-1$ 次元の正則解をもつことで特徴づけられる．すなわち $z=1$ の特性指数には $z=0,1,\dots,n-2$ が現れるが，整数差があっても局所モノドロミーが半単純（log の項が現れない）という条件である．このことを考慮して以下のような Riemann Scheme を考える．

$\mathcal{P}_{k+1}^{(n)}$: 正整数 n の分割の $k+1$ 個の組の全体

$\mathbf{m} := (m_{0,1},\dots,m_{0,n_0};m_{1,1},\dots,m_{1,n_1};\cdots;m_{k,1},\dots,m_{k,n_k}) \in \mathcal{P}_{k+1}^{(n)}$

$\operatorname{ord}\mathbf{m} := n = m_{j,1}+\cdots+m_{j,n_j} \qquad [\lambda]_{(m)} := \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda+1 \\ \vdots \\ \lambda+m-1 \end{pmatrix}$

$$\{\lambda_{\mathbf{m}}\} := \begin{Bmatrix} [\lambda_{0,1}]_{(m_{0,1})} & [\lambda_{1,1}]_{(m_{1,1})} & \cdots & [\lambda_{k,1}]_{(m_{k,1})} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [\lambda_{0,n_0}]_{(m_{0,n_0})} & [\lambda_{1,n_1}]_{(m_{1,n_1})} & \cdots & [\lambda_{k,n_2}]_{(m_{k,n_2})} \end{Bmatrix}$$
$$\in M(n,k+1;\mathbb{C})$$

$P\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$: generic $\lambda_{j,\nu}\in\mathbb{C}$ に対して対角化可能な局所モノドロミーをもつ *Riemann scheme* (特異点は $z_0,\dots,z_k$)．ただし，Fuchs の関係式 (F) の下

$$\text{(F)}\quad |\{\lambda_{\mathbf{m}}\}| := \sum_{j=0}^{k}\left(\sum_{\nu=1}^{n_j} m_{j,\nu}\lambda_{i,\nu} + \frac{m_{j,\nu}(m_{j,\nu}-1)}{2}\right) - \frac{n(n-1)(k-1)}{2} = 0$$

特異点 $z=z_j$ における局所モノドロミー行列は $L(m_j;e^{2\pi\sqrt{-1}\lambda_j})$ となる．

例 3.2. $k=2$: 特異点 $0,\ 1,\ \infty$ をもつ Fuchs 型微分方程式 $Pu=0$ は次の形

$$P = z^n(1-z)^n\frac{d^n}{dz^n} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(z)\frac{d^j}{dz^j}$$
$$\Bigl(\deg a_j(z) \le j+n,\ \frac{d^\nu a_j}{dz^\nu}\Big|_{z=0,1} = 0 \quad (0\le \nu < j)\Bigr)$$

・方程式のパラメータ：$\sum_{j=1}^{n}(j+1) = \frac{n(n+3)}{2}$ 個
・特性指数：$3n$ 個（独立なのは $3n-1$ 個 $\Leftarrow$ Fuchs の関係式）
・アクセサリー・パラメータ：$\frac{n(n+3)}{2} - 3n + 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ 個[5]

例 3.3. ${}_nF_{n-1}(\alpha,\beta;z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_k\cdots(\alpha_n)_k}{(\beta_1)_k\cdots(\beta_{n-1})_k(1)_k}z^k$

$$(3.1)\qquad P\begin{Bmatrix} z=0 & 1 & \infty & \\ 1-\beta_1 & [0]_{(n-1)} & \alpha_1 & \\ \vdots & & \vdots & ;\ z \\ 1-\beta_{n-1} & & \alpha_{n-1} & \\ 0 & -\beta_n & \alpha_n & \end{Bmatrix} \quad \text{with} \quad \sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu = \sum_{\nu=1}^{n}\beta_\nu$$

[5] 特異点が $k+1$ 個の n 階単独方程式の場合は，$\frac{1}{2}(n-1)\bigl((k-1)n-2\bigr)$ 個

$$P = z(1-z)^{n-1}\left(\prod_{j=1}^{n-1}(z\frac{d}{dz}+\beta_j)\cdot\frac{d}{dz} - \prod_{j=1}^{n}(z\frac{d}{dz}+\alpha_j)\right) \tag{3.2}$$

$\mathbf{m} = (1,\ldots,1;n-1,1;1,\ldots,1) = (1^n;n-1,1;1^n) \in \mathcal{P}_3^{(n)}$
$n=2$: $11,11,11$ $n=3$: $111,21,111$ $n=4$: $1111,31,1111$

Gauss HG $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$: $P\begin{Bmatrix} z=0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha & ;\ z \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta & \end{Bmatrix}$

4. Katz' middle convolutions

リーマン球面上で $k+1$ 個の確定特異点 $z_0,\ldots,z_k$ を持ち，特異点 z_j でのスペクトルタイプが分割 $n = m_{j,1}+\cdots+m_{j,n_j}$ で記述され，対応する特性指数が $\lambda_{j,1},\ldots,\lambda_{j,n_j}$ の方程式を考える（$j=0,\ldots,k$）．スペクトルタイプは，簡単のため $m_{j,\nu}$ を並べて $m_{0,1}\cdots m_{0,n_0}, m_{1,1}\cdots m_{1,n_1}, m_{2,1}\cdots m_{k,n_k}$ のように書くことにする（たとえば，Gauss の超幾何は $11,11,11$ で ${}_3F_2$ は $111,21,111$）．

対応する方程式が存在するには，以下の Fuchs の関係式が必要.

$$\sum_{j=0}^{k}\sum_{\nu=1}^{n_j} m_{j,\nu}\lambda_{j,\nu} = 0 \qquad (1\text{ 階システムの場合}) \tag{4.1}$$

4.1. Deligne-Simpson Problem.

行列での定式化: Fix $A_1,\ A_2 \in M(n,\mathbb{C})$ $(k=2)$.

Fuchs 系：
$$\frac{du}{dz} = \frac{A_1}{z}u + \frac{A_2}{z-1}u, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

「$A_1 \sim B_1,\ A_2 \sim B_2,\ A_1+A_2 \sim B_1+B_2 \Longrightarrow (A_1,A_2) \sim (B_1,B_2)$」となるとき，$(A_1,A_2)$ を rigid という（アクセサリ・パラメータ無し）[6]

$A_1,\ A_2,\ A_0 := -(A_1+A_2)$ の共役類で決まる条件となる．
generic には全て semisimple で，それが基本（$\Rightarrow$ partitions の言葉）．

Additive Deligne–Simpson problem:
Given $C_j \in M(n,C)$ $(j=0,1,\ldots,k)$ with $\sum \operatorname{trace} C_j = 0$
$\exists?\ A_j \sim C_j$ with $A_0+A_1+\cdots+A_k = 0$ and $A_j \in M(n,\mathbb{C})$

Multiplicative version（局所モノドロミー群 $\Rightarrow$ 大域モノドロミー群）
Given $C_j \in GL(n,C)$ $(j=0,1,\ldots,k)$ with $\prod \det C_j = 1$
$\exists?\ A_j \sim C_j$ with $A_0A_1\cdots A_k = I_n$ and $A_j \in GL(n,\mathbb{C})$

[6] $(A_1,A_2)\sim(B_1,B_2)$ とは $gA_jg^{-1} = B_j$ $(j=1,2)$ を満たす可逆行列 g が存在すること

4.2. **Katz' middle convolutions.** $(k=2)$

Additive version: $A_j \in M(n,\mathbb{C})$

1. $M_{(\mu_1,\mu_2)} : (A_1,A_2) \mapsto (A_1+\mu_1 I_n, A_2+\mu_2 I_n)$

2. $mc_\lambda : (A_1,A_2) \mapsto (G_1,G_2) \mapsto (\bar{G}_1,\bar{G}_2)$,

$G_j \in M(kn,\mathbb{C}),\quad \bar{G}_i := G_i\big|_{\mathbb{C}^{kn}/V_\lambda}$

$$G_1 = \begin{pmatrix} A_1+\lambda I_n & A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_1 & A_2+\lambda I_n \end{pmatrix},\ (G_j)_{\mu\nu} = (A_\nu + \lambda\delta_{\mu\nu})\delta_{\mu j}$$

$V_\lambda := {}^t(\ker A_1, \ker A_2) + \ker(G_1+G_2) :$ an invariant subspace of $\mathbb{C}^{kn}$

Multiplicative version: $A_j \in GL(n,\mathbb{C})$

$M^\times_\mu : A_j \mapsto \mu_j A_j,\quad MC^\times_\mu : A_j \mapsto G_j \mapsto \bar{G}_j = G_j|_{\mathbb{C}^{kn}/V_\lambda}$

$V_\lambda := {}^t\big(\ker(A_1-I_n), \ker(A_2-I_n)\big) + \ker(G_1G_2 - I_{kn})$

$$G_1 = \begin{pmatrix} \lambda A_1 & A_2 - I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix},\quad G_2 = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \lambda(A_1-I_n) & \lambda A_2 \end{pmatrix}$$

定理 4.1 (cf. [DG2])**.** $\mathbf{A} = (A_1,\ldots,A_k) \in M(n,\mathbb{C})^k$ および $\mu = (\mu_0,\ldots,\mu_k) \in \mathbb{C}^{k+1}$ に対し

$$\begin{aligned} mc_\mu &:= M_{\mu'} \circ mc_{|\mu|} \circ M_{-\mu'}, \\ \mu' &:= (\mu_1,\ldots,\mu_k),\quad |\mu| := \mu_0+\mu_1+\cdots+\mu_k, \\ A_0 &:= -(A_1+\cdots+A_k) \end{aligned} \tag{4.2}$$

とおき，以下を仮定する（$n>1$ で $\mathbf{A}$ が既約なら満たされる）.

$$\bigcap_{\substack{1\le j\le k\\ j\ne i}} \ker(A_j-\mu_j) \cap \ker(A_0-\tau) = \{0\} \qquad (i=1,\ldots,k,\ \forall\tau\in\mathbb{C}) \tag{4.3}$$

$$\sum_{\substack{1\le j\le k\\ j\ne i}} \mathrm{Im}(A_j-\mu_j) + \mathrm{Im}(A_0-\tau) = \mathbb{C}^n \qquad (i=1,\ldots,k,\ \forall\tau\in\mathbb{C}) \tag{4.4}$$

このとき $\mathbf{A}' := mc_\mu(\mathbf{A})$ も (4.3) と (4.4) を満たし，$\mathbf{A}$ が既約なら $\mathbf{A}'$ も既約で，$|\mu|=0$ のとき $\mathbf{A}' \sim \mathbf{A}$.

さらに，μ' に対してこの 2 つの仮定を満たす $M(n,\mathbb{C})^k$ の上で

$$mc_{(\mu_0,\,\mu')} \circ mc_{(\bar{\mu}_0,\,\mu')} \simeq mc_{(\bar{\mu}_0+|\mu|,\,\mu')} \tag{4.5}$$

特に，$\mu^* := (\mu_0 - 2|\mu|,\, \mu')$ とおくと $mc_{\mu^*} \circ mc_\mu \simeq \mathrm{id}$.

$A_j \sim L(m_j,\lambda_j) = L\big((m_{j,1},\ldots,m_{j,n_j}),(\lambda_{j,1},\ldots,\lambda_{j,n_j})\big)$ となるよう m_j, λ_j を定め，$I_j := \{\nu\,;\,\lambda_{j,\nu}=\mu_j\}$ が空でないとき，$\ell_j \in I_j$ を

$$\nu \in I_j \Rightarrow m_{j,\ell_j} \ge m_{j,\nu} \tag{4.6}$$

となるように選び，$I_j=\emptyset$ のときは $\ell_j=n_j+1$, $m_{j,n_j+1}=0$ とおき，さらに

$$d(\mathbf{m},\lambda,\mu):=m_{0,\ell_0}+m_{1,\ell_1}+\cdots+m_{k,\ell_k}-(k-1)n, \tag{4.7}$$

$$m'_{j,\nu}:=m_{j,\nu}-\delta_{\ell_j,\nu}\cdot d(\mathbf{m},\lambda,\mu), \tag{4.8}$$

$$\lambda'_{j,\nu}:=\begin{cases}\lambda_{j,\nu}+|\mu| & (j\neq 0,\ \nu\neq\ell_j)\\ \mu_j & (j\neq 0,\ \nu=\ell_j)\\ \lambda_{0,\nu}-|\mu| & (j=0,\ \nu\neq\ell_0)\\ \mu_0-2|\mu| & (j=0,\ \nu=\ell_0)\end{cases} \tag{4.9}$$

と定義すると，$|\mu|\neq 0$ ならば $\mathbf{A}'$ は $A'_j\sim L(m'_j,\lambda'_j)\quad(j=0,\dots,k)$ を満たす．

定理 4.2 (cf. [DG2])**.** $\mathbf{A}=(A_1,\dots,A_k)\in GL(n,\mathbb{C})^k$ および $\mu=(\mu_0,\dots,\mu_k)\in(\mathbb{C}\setminus\{0\})^{k+1}$ に対し

$$\begin{aligned}mc_\mu&:=M^\times_{\mu'}\circ MC_{|\mu|_\times}\circ M^\times_{\mu'^{-1}},\\ \mu'&:=(\mu_1,\dots,\mu_k),\quad |\mu|_\times:=\mu_0\mu_1\cdots\mu_k,\\ A_0&:=(A_1\cdots A_k)^{-1}\end{aligned} \tag{4.10}$$

とおき，(4.3) と (4.4) を仮定する（$n>1$ で $\mathbf{A}$ が既約なら満たされる）．このとき $\mathbf{A}':=MC_\mu(\mathbf{A})$ も (4.3) と (4.4) を満たし，$\mathbf{A}$ が既約なら $\mathbf{A}'$ も既約で，$|\mu|_\times=1$ のとき $\mathbf{A}'\sim\mathbf{A}$.

さらに，μ' に対してこの 2 つの仮定を満たす $M(n,\mathbb{C})^k$ の上で

$$MC_{(\mu_0,\,\mu')}\circ MC_{(\bar\mu_0,\,\mu')}\simeq MC_{(\bar\mu_0|\mu|_\times,\,\mu')} \tag{4.11}$$

特に，$\mu^*:=(\mu_0|\mu|_\times^{-2},\,\mu')$ とおくと $MC_{\mu^*}\circ MC_\mu\simeq\mathrm{id}$.

$A_j\sim L(m_j,\lambda_j)=L\bigl((m_{j,1},\dots,m_{j,n_j}),(\lambda_{j,1},\dots,\lambda_{j,n_j})\bigr)$ となるよう m_j, λ_j を定め，$I_j:=\{\nu\,;\,\lambda_{j,\nu}=\mu_j\}$ が空でないとき，$\ell_j\in I_j$ を

$$\nu\in I_j\Rightarrow m_{j,\ell_j}\geq m_{j,\nu} \tag{4.12}$$

となるように選び，$I_j=\emptyset$ のときは $\ell_j=n_j+1$, $m_{j,n_j+1}=0$ とおき，さらに

$$d(\mathbf{m},\lambda,\mu):=m_{0,\ell_0}+m_{1,\ell_1}+\cdots+m_{k,\ell_k}-(k-1)n, \tag{4.13}$$

$$m'_{j,\nu}:=m_{j,\nu}-\delta_{\ell_j,\nu}\cdot d(\mathbf{m},\lambda,\mu), \tag{4.14}$$

$$\lambda'_{j,\nu}:=\begin{cases}\lambda_{j,\nu}|\mu|_\times & (j\neq 0,\ \nu\neq\ell_j)\\ \mu_j & (j\neq 0,\ \nu=\ell_j)\\ \lambda_{0,\nu}|\mu|_\times^{-1} & (j=0,\ \nu\neq\ell_0)\\ \mu_0|\mu|_\times^{-2} & (j=0,\ \nu=\ell_0)\end{cases} \tag{4.15}$$

と定義すると，$|\mu|_\times\neq 1$ ならば $\mathbf{A}'$ は $A'_j\sim L(m'_j,\lambda'_j)\quad(j=0,\dots,k)$ を満たす．

例 4.3. $1,1,1\ (H_1) \longleftrightarrow 11,11,11\ (H_2 : {}_2F_1) \longleftrightarrow 111,12,111\ (H_3 : {}_3F_2)$

$$\begin{Bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & -\lambda_1-\lambda_2\end{Bmatrix} \xrightarrow{mc_{\mu_1,\mu_2,\mu_3}} \begin{Bmatrix}\lambda_1+|\mu| & \lambda_2+|\mu| & -\lambda_1-\lambda_2-|\mu| \\ \mu_1 & \mu_2 & -\mu_1-\mu_2-|\mu|\end{Bmatrix}$$

$$\xrightarrow{mc_{\mu'_1,\mu_2,\mu'_3}} \begin{Bmatrix}\lambda_1+|\mu|+|\mu'| & \lambda_2+|\mu|+|\mu'| & -\lambda_1-\lambda_2-|\mu|-|\mu'| \\ \mu_1+|\mu'| & \mu_2 & -\mu_1-\mu_2-|\mu|-|\mu'| \\ \mu'_1 & \mu_2 & -\mu'_1-\mu_2-|\mu'|\end{Bmatrix}$$

4.3. **Reduction.** n の分割の $k+1$ 個の組の全体を $\mathcal{P}_{k+1}^{(n)}$ と書き，$\mathcal{P}_{k+1} := \bigcup_{n=0}^{\infty}\mathcal{P}_{k+1}^{(n)}$ とおく $(\mathcal{P}_k^{(n)} \subset \mathcal{P}_{k+1}^{(n)}$ とみなす$)$．$\mathbf{m} = (m_{j,\nu}) \in \mathcal{P}_{k+1}^{(n)}$ に対し，$\partial\mathbf{m} \in \mathcal{P}_{k+1}$ を以下のように定義する．

必要なら順序を並べ替えて，$m_{j,1} \geq m_{j,2} \geq \cdots \geq m_{j,n_j}$ としてよい．このとき $d = m_{0,1} + m_{1,1} + \cdots + m_{k,1} - (k-1)n$ とおき，$m_{j,1}$ を $m_{j,1} - d$ に置き換えてできる $n-d$ の分割の組を $\partial\mathbf{m} \in \mathcal{P}_{k+1}^{(n-d)}$ とおく．

ただし，$m_{j,1} = d$ のとき現れる 0 は削除する．さらに trivial な分割の項も削除 – このときは k が減る．

定義 4.4. $\mathbf{m} \in \mathcal{P}_{k+1}$ とする．

・$\mathbf{m}$ が **simple** $\Longleftrightarrow \{m_{j,\nu}\}$ は非自明な公約数を持たない

・$\mathbf{m}$ が実現可能でない $\Longleftrightarrow \partial$ を複数回施すと，$m_{j,1} < d$ が起きて，適用不能になる

・$\mathbf{m}$ が**実現可能** $\Longleftrightarrow \partial$ は $n=0$ になるまで適用可能（このとき **rigid**），または途中で $d \leq 0$ となる（**not rigid**）

・実現可能で $\operatorname{ord}\partial\mathbf{m} \geq \operatorname{ord}\mathbf{m}$ となる simple な $\mathbf{m}$ を **basic** という

・実現可能な $\mathcal{P}_{k+1}^{(n)}$ の全体を $\mathcal{Q}_{k+1}^{(n)}$ と書き，$\mathcal{Q} := \bigcup_{n,k}\mathcal{Q}_{k+1}^{(n)}$ とおく

・rigid（resp. かつ simple）な $\mathcal{Q}_{k+1}^{(n)}$ の全体を $\mathcal{R}_{k+1}^{(n)}$（resp. $\bar{\mathcal{R}}_{k+1}^{(n)}$）と書く

$$\operatorname{idx}\mathbf{m} := \sum_{j,\nu} m_{j,\nu}^2 - (k-1)n^2 \quad \text{(Katz' index of rigidity)} \tag{4.16}$$

$$\gcd\mathbf{m} := \{m_{j,\nu}\}\ \text{の最大公約数} \tag{4.17}$$

$$\operatorname{Pidx}\mathbf{m} := \gcd\mathbf{m}\cdot\operatorname{idx}\mathbf{m} - \frac{\operatorname{idx}\mathbf{m}}{2\gcd\mathbf{m}} \tag{4.18}$$

注意 4.5. i) 上の ∂ は Katz の middle convolution に対応する．

ii) middle convolution は，idx を変えず，方程式のみならず，解の積分表示，モノドロミー（不変変形方程式），接続係数の間の対応を引き起こす．

iii) $\underline{4}11,\underline{4}11,\underline{4}2,\underline{3}3 \xrightarrow{15-2\cdot6=3} \underline{1}11,\underline{1}11,\underline{2}1 \xrightarrow{4-3=1} \underline{1}1,\underline{1}1,\underline{1}1 \xrightarrow{3-2=1} 1,1,1$ (rigid)

$\underline{2}11,\underline{2}11,\underline{1}111 \xrightarrow{5-4=1} \underline{1}11,\underline{1}11,\underline{1}11 \xrightarrow{3-3=0} 111,111,111$ (not rigid)

$\underline{2}11,\underline{2}11,\underline{2}11,\underline{3}1 \xrightarrow{9-8=1} \underline{1}11,\underline{1}11,\underline{1}11,\underline{2}1 \xrightarrow{5-6=-1}$ (not rigid)

$\underline{2}2,\underline{2}2,\underline{1}111 \xrightarrow{5-4=1} \underline{2}1,\underline{2}1,\underline{1}11 \xrightarrow{5-3=2} \times$ (実現可能でない)

定理 4.6. [Ka] Fuchs 型 1 階方程式系（or Deligne-Simpson Problem) が与えられていて，それが既約な（i.e. 非自明部分系がない）とき

$$\text{それが rigid } (\Leftrightarrow \mathbf{m} \text{ が rigid で } \{\lambda_{\mathbf{m}}\} \text{ が `一般'}) \Longleftrightarrow \operatorname{idx}\mathbf{m} = 2 \tag{4.19}$$

定理 4.7 (Katz, Kostov, O[7])**.** Fuchs の関係を満たす generic な $\lambda_{j,\nu}$ に対し

$$\text{方程式が存在する} \Longleftrightarrow \mathbf{m} \text{ が実現可能} \tag{4.20}$$

このとき $2\operatorname{Pidx}\mathbf{m}$ はアクセサリ・パラメータの数[8].

定理 4.8 (O)**.** basic な $\mathbf{m}$ で $\operatorname{Pidx}\mathbf{m}$ が同一のものは有限個.

例 4.9. i) $\operatorname{Pidx}\mathbf{m} = 0$: Katz (rigid な場合)
ii) $\operatorname{Pidx}\mathbf{m} = 1$: Kostov [Ko2]（4 個）
11,11,11,11　111,111,111　22,1111,1111　33,222,111111
iii) $\operatorname{Pidx}\mathbf{m} = 2$ (13 個)
5: 11,11,11,11,11
4: 21,21,111,111　31,22,22,1111　$*$22,22,22,211
3: 211,1111,1111　221,221,11111　32,11111,11111　$*$222,222,2211
33,2211,111111　$*$44,2222,22211　44,332,11111111　55,3331,22222
$*$66,444,2222211

iv) $\operatorname{Pidx}\mathbf{m} = 3$ (36 個)

```
  2:11,11,11,11,11,11    3:111,21,21,21,21       4:22,22,22,31,31
  3:111,111,111,21       4:1111,22,22,22         4:1111,1111,31,31
  4:211,211,22,22        4:1111,211,22,31       *6:321,33,33,33
  6:222,222,33,51        4:1111,1111,1111        5:11111,11111,311
  5:11111,2111,221       6:111111,222,321        6:111111,21111,33
  6:21111,222,222        6:111111,111111,42      6:222,33,33,42
  6:111111,33,33,51      6:2211,2211,222         7:1111111,2221,43
  7:1111111,331,331      7:2221,2221,331         8:11111111,3311,44
  8:221111,2222,44       8:22211,22211,44       *9:3321,333,333
  9:111111111,333,54     9:22221,333,441        10:1111111111,442,55
 10:22222,3322,55       10:222211,3331,55       12:22221111,444,66
*12:33321,3333,66       14:2222222,554,77      *18:3333321,666,99
```

v) basic なものは以下の個数だけある.

Pidx	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
# of base	4	13	36	67	90	162	243	305	420	565	720
# triplets	3	9	24	44	56	97	144	163	223	291	342
# tuples of 4	1	3	9	17	24	45	68	95	128	169	239
max order	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66

[7] rigid なシステムのときは Katz [Ka], 一般のシステムは Kostov [Ko], 単独高階では rigid の場合など Oshima

[8] 単独の時は，アクセサリー・パラメータの数は半分の $\operatorname{Pidx}\mathbf{m}$

注意 4.10. i)　$\mathbf{m} \in \mathcal{R}$ で，スペクトルタイプが $11\ldots1$ の点をもつものは Simpson [Si] が分類した以下の 4 種 (Simpson's list)：

order	type	name	partitions
n	H_n	hypergeometric family	$1^n, 1^n, n-11$
$2m$	EO_{2m}	even family	$1^{2m}, mm-11, mm$
$2m+1$	EO_{2m+1}	odd family	$1^{2m+1}, mm1, m+1m$
6	X_6	extra case	$111111, 222, 42$

$H_1 = EO_1$, $H_2 = EO_2$, $H_3 = EO_3$

ii) 既約 rigid なものは以下のように沢山ある．

ord	$\#\bar{\mathcal{R}}_3$	$\#\bar{\mathcal{R}}$	ord	$\#\bar{\mathcal{R}}_3$	$\#\bar{\mathcal{R}}$	ord	$\#\bar{\mathcal{R}}_3$	$\#\bar{\mathcal{R}}$
2	1	1	15	1481	2841	28	114600	190465
3	1	2	16	2388	4644	29	143075	230110
4	3	6	17	3276	6128	30	190766	310804
5	5	11	18	5186	9790	31	235543	371773
6	13	28	19	6954	12595	32	309156	493620
7	20	44	20	10517	19269	33	378063	588359
8	45	96	21	14040	24748	34	487081	763126
9	74	157	22	20210	36078	35	591733	903597
10	142	306	23	26432	45391	36	756752	1170966
11	212	441	24	37815	65814	37	907150	1365027
12	421	857	25	48103	80690	38	1143180	1734857
13	588	1177	26	66409	112636	39	1365511	2031018
14	1004	2032	27	84644	139350	40	1704287	2554015

iii) 階数が 6 以下の既約 rigid なものは以下の通り．

$$\bar{\mathcal{R}}^{(n)}\ (2 \le n \le 6)$$

```
2:11,11,11    (Gauss)
3:111,111,21   (3F2)
3:21,21,21,21 (Po)
4:1111,1111,31 (4F3)
4:1111,211,22 (even)
4:211,211,211
4:211,22,31,31
4:22,22,22,31
4:31,31,31,31,31 (Po)
5:11111,11111,41 (5F4)
5:11111,221,32 (odd)
5:2111,2111,32
5:2111,221,311
5:221,221,221
5:221,221,41,41
5:221,32,32,41
5:311,311,32,41
5:32,32,32,32
5:32,32,41,41,41
5:41,41,41,41,41,41 (Po)
6:111111,111111,51 (6F5)
6:111111,222,42 (extra)
6:111111,321,33 (even)
6:21111,2211,42
6:21111,222,33
6:21111,222,411
6:21111,3111,33
6:2211,2211,33
```

```
6:2211,2211,411              6:2211,321,321
6:222,222,321                6:222,3111,321
6:3111,3111,321              6:2211,222,51,51
6:2211,33,42,51              6:222,33,33,51
6:222,33,411,51              6:3111,33,411,51
6:321,321,42,51              6:321,42,42,42
6:33,33,33,42                6:33,33,411,42
6:33,411,411,42              6:411,411,411,42
6:33,42,42,51,51             6:321,33,51,51,51
6:411,42,42,51,51            6:51,51,51,51,51,51,51 (Po)
```

Hierarchy of rigid triplets

$$
\begin{tikzcd}
1,1,1 \arrow[d] & 1\text{個} & 3\text{個} & 5\text{個} & 13\text{個} \\
1^2,1^2,1^2 \arrow[r] & 21,1^3,1^3 \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & 31,1^4,1^4 \arrow[r] \arrow[ddr] & 41,1^5,1^5 \arrow[r] & 51,1^6,1^6 \\
 & & 2^2,21^2,1^4 \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & 32,2^21,1^5 \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & 3^2,321,1^6 \\
 & & 21^2,21^2,21^2 \arrow[dr] \arrow[drr] \arrow[ddr] & 32,21^3,21^3 \arrow[dr] & 42,2^3,1^6 \\
 & & & 31^2,2^21,21^3 \arrow[dr] & 321,31^3,2^3 \\
 & & & 2^21,2^21,2^21 \arrow[r] & 321,321,2^21^2 \\
 & & & & \vdots
\end{tikzcd}
$$

5. Rigid 分解

定義 5.1. $\mathbf{m} = (m_{j,\nu})$, $\mathbf{m}' = (m'_{j,\nu})$, $\mathbf{m}'' = (m''_{j,\nu}) \in \mathcal{Q}$ となっている非自明な

$$m_{j,\nu} = m'_{j,\nu} + m''_{j,\nu} \tag{5.1}$$

という $\mathbf{m}$ の分解を，**実現可能分解**といい，$\mathbf{m} = \mathbf{m}' + \mathbf{m}''$ と書く．

この分解において

・**直和分解** $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Pidx}\,\mathbf{m} = \mathrm{Pidx}\,\mathbf{m}' + \mathrm{Pidx}\,\mathbf{m}''$ (これを $\mathbf{m} = \mathbf{m}' \oplus \mathbf{m}''$ と書く)
・**rigid 分解** $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{m}'$ または $\mathbf{m}''$ が rigid となる直和分解
・**Katz 分解** $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{m}'$ または $\mathbf{m}''$ が trivial な直和分解

注意 5.2. i) $\mathbf{m} \in \mathcal{R}$ については，実現可能分解 = 直和分解 = rigid 分解
ii) $1111, 1111, 31 = 000\underline{1}, 100\underline{0}, 10 \oplus 1110, 0111, 21$　(Katz 分解)
$11111, 221, 32 = 0000\underline{1}, 10\underline{0}, 10 \oplus 11110, 121, 22$　($H_1 \oplus EO_4$, Katz 分解)

$$
\begin{aligned}
&= 1000\underline{1}, 11\underline{0}, 11 \oplus 01110, 111, 21 \quad (H_2 \oplus H_3,\ \text{rigid 分解})\\
211, 211, 211 &= 00\underline{1}, 10\underline{0}, 100 \oplus 210, 111, 111 \qquad (\text{Katz 分解})\\
&= 200, 200, 200 \oplus 011, 011, 011 \qquad (\text{Katz 分解})\\
&= 10\underline{1}, 11\underline{0}, 110 \oplus 110, 101, 101 \qquad (\text{rigid 分解})\\
22, 22, 22, 211 &= 11, 11, 11, 100 \oplus 11, 11, 11, 101 \quad (\text{Pidx} : 2 = 1 + 1 \text{ ：直和})\\
11, 11, 11, 11 &= 10, 10, 10, 10 + 01, 01, 01, 01 \ \ (\text{Pidx} : 1 > 0 + 0 \text{ ：実現可能})
\end{aligned}
$$

6. 可約性

簡単のため，generic には既約で rigid な単独高階方程式を考えよう．よって $\mathbf{m} \in \mathcal{R}_{k+1}^{(n)}$ に対し，以下の Riemann scheme を持って generic には log が現れない方程式を $\mathcal{M}_{\lambda_{\mathbf{m}}}$ とおく（下の $|\{\lambda_{\mathbf{m}}\}|$ の式は，simple かつ rigid のとき）．

$$
\{\lambda_{\mathbf{m}}\} := \left\{\begin{matrix} [\lambda_{0,1}]_{(m_{0,1})} & [\lambda_{1,1}]_{(m_{1,1})} & \cdots & [\lambda_{k,1}]_{(m_{k,1})} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [\lambda_{0,n_0}]_{(m_{0,n_0})} & [\lambda_{1,n_1}]_{(m_{1,n_1})} & \cdots & [\lambda_{k,n_k}]_{(m_{k,n_k})} \end{matrix}\right\},
$$

$$
|\{\lambda_{\mathbf{m}}\}| := \sum_{j=0}^{k}\sum_{\nu=1}^{n_j} m_{j,\nu}\lambda_{j,\nu} - \operatorname{ord}\mathbf{m} + 1, \qquad (|\{\lambda_{\mathbf{m}}\}| = 0\text{：Fuchs の関係式})
$$

定理 6.1. $\mathcal{M}_{\lambda_{\mathbf{m}}}$ **が可約**

$\iff \exists \mathbf{m}' \oplus \mathbf{m}'' = \mathbf{m}$ *with* $\gcd \mathbf{m}'' = 1$ *s.t.* $|\{\lambda_{\mathbf{m}'}\}| \in \gcd \mathbf{m}' \cdot \mathbb{Z}$

例 6.2. i) H_n (hypergeometric family of order n: ${}_nF_{n-1}(\alpha, \beta; z)$)

$$
P\left\{\begin{matrix} \lambda_{0,1} & [\lambda_{1,1}]_{(n-1)} & \lambda_{2,1} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{0,n-1} & & \lambda_{2,n-1} \\ \lambda_{0,n} & \lambda_{1,2} & \lambda_{2,n} \end{matrix}\right\} = P\left\{\begin{matrix} 1-\beta_1 & [0]_{(n-1)} & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1-\beta_{n-1} & & \alpha_{n-1} \\ 0 & -\beta_n & \alpha_n \end{matrix}\right\} \tag{6.1}
$$

$$
H_n = H_1 \oplus H_{n-1}
$$

(6.1) が可約 $\iff \lambda_{0,j} + \lambda_{1,1} + \lambda_{2,i} \in \mathbb{Z} \quad (1 \le \exists i \le n,\ 1 \le \exists j \le n)$

(3.1) が可約 $\iff \alpha_i \in \mathbb{Z}$ or $\alpha_i - \beta_j \in \mathbb{Z} \quad (1 \le \exists i \le n,\ 1 \le \exists j \le n-1)$

ii) EO_{2m} (even family of order $2m$):

$$
P\left\{\begin{matrix} \lambda_{0,1} & [\lambda_{1,1}]_{(m)} & [\lambda_{2,1}]_{(m)} \\ \vdots & [\lambda_{1,2}]_{(m-1)} & [\lambda_{2,2}]_{(m)} \\ \lambda_{0,2m} & \lambda_{1,3} & \end{matrix}\right\} \tag{6.2}
$$

$$
EO_{2m} = H_1 \oplus EO_{2m-1} = H_2 \oplus EO_{2m-2}
$$

可約 $\iff \exists\mu \ne \mu',\ \exists\nu \in \{1, 2\}$ s.t. $\lambda_{0,\mu} + \lambda_{1,1} + \lambda_{2,\nu} \in \mathbb{Z}$

or $\lambda_{0,\mu} + \lambda_{0,\mu'} + \lambda_{1,1} + \lambda_{1,2} + \lambda_{2,1} + \lambda_{2,2} \in \mathbb{Z}$

iii) EO_{2m+1} (odd family of order $2m+1$):

$$
P\left\{\begin{matrix} \lambda_{0,1} & [\lambda_{1,1}]_{(m)} & [\lambda_{2,1}]_{(m+1)} \\ \vdots & [\lambda_{1,2}]_{(m)} & [\lambda_{2,2}]_{(m)} \\ \lambda_{0,2m+1} & \lambda_{1,3} & \end{matrix}\right\} \tag{6.3}
$$

$$
EO_{2m+1} = H_1 \oplus EO_{2m} = H_2 \oplus EO_{2m-1}
$$

可約 $\Longleftrightarrow \exists\mu \neq \mu',\ \exists\nu \in \{1,\,2\}$ s.t. $\lambda_{0,\mu} + \lambda_{1,\nu} + \lambda_{2,1} \in \mathbb{Z}$
or $\quad \lambda_{0,\mu} + \lambda_{0,\mu'} + \lambda_{1,1} + \lambda_{1,2} + \lambda_{2,1} + \lambda_{2,2} \in \mathbb{Z}$

iv) Other rigid examples in [Ro] and direct sum of simple rigid tuples.

B_n:
$$\begin{aligned}
m^21, m+11^m, m1^{m+1} &= 10, 10, 01 \oplus mm-11, m1^m, m1^m \\
&= 01, 10, 10 \oplus m^2, m1^m, m-11^{m+1} \\
&= 1^20, 11, 11 \oplus (m-1)^21, m1^{m-1}, m-11^m \\
mm-11, m1^m, m1^m &= 100, 01, 10 \oplus (m-1)^21, m1^{m-1}, m-11^m \\
&= 001, 10, 10 \oplus mm-1, m-11^m, m-11^m \\
&= 110, 11, 11 \oplus m-1m-21, m-11^{m-1}, m-11^{m-1} \\
B_n &= H_1 \oplus B_{n-1} = H_1 \oplus C_{n-1} = H_2 \oplus B_{n-2}
\end{aligned}$$

C_n:
$$\begin{aligned}
m+1m, m1^{m+1}, m1^{m+1} &= 10, 01, 10 \oplus m^2, m1^m, m-11^{m+1} \\
&= 11, 11, 11 \oplus m(m-1), m-11^m m-11^m \\
m^2, m1^m, m-11^{m+1} &= 1, 10, 01 \oplus mm-1, m-11^{m-1}, m-11^{m-1} \\
&= 1^2, 11, 11 \oplus (m-1)^2, m-11^{m-1}, m-21^m \\
C_n &= H_1 \oplus C_{n-1} = H_2 \oplus C_{n-2}
\end{aligned}$$

D_n ($D_6 \Rightarrow$ Extra case):
$$\begin{aligned}
(2m-1)2, 2^m1, 2^{m-2}1^5 &= 10, 01, 10 \oplus (2m-2)2, 2^m, 2^{m-3}1^5 \\
&= 10, 10, 01 \oplus (2m-2)2, 2^{m-1}1^2, 2^{m-3}1^4 \\
&= (m-1)1, 1^m0, 1^{m-2}1^2 \oplus m1, 1^m1, 1^{m-2}1^3 \\
(2m-2)2, 2^m, 2^{m-3}1^6 &= 10, 1, 01 \oplus (2m-3)2, 2^{m-1}1, 2^{m-3}1^5 \\
&= m-11, 1^m, 1^m \oplus m-11, 1^m, 1^m \\
D_{2m+1} &= H_1 \oplus D_{2m} = H_1 \oplus E_{2m} = H_m \oplus H_{m+1} \\
D_{2m} &= H_1 \oplus D_{2m-1} = H_m \oplus H_m
\end{aligned}$$

E_n:
$$\begin{aligned}
(2m-1)2, 2^{m-1}1^3, 2^{m-1}1^3 &= 10, 01, 10 \oplus 2m-22, 2^{m-1}1^2, 2^{m-2}1^4 \\
&= m-21, 1^{m-1}0, 1^{m-1}0 \oplus m+11, 1^{m-1}1^3, 1^{m-1}1^3 \\
&= m-11, 1^{m-1}1, 1^{m-1}1 \oplus m1, 1^{m-1}1^2, 1^{m-1}1^2 \\
(2m-2)2, 2^{m-1}1^2, 2^{m-2}1^4 &= 10, 10, 01 \oplus 2m-32, 2^{m-2}1^3, 2^{m-2}1^3 \\
&= 10, 01, 10 \oplus 2m-32, 2^{m-1}1, 2^{m-3}1^5 \\
&= m-21, 1^{m-1}, 1^{m-2}1 \oplus m1, 1^{m-1}1^2, 1^{m-2}1^3 \\
&= m-11, 1^{m-1}1, 1^{m-2}1^2 \oplus m-11, 1^{m-1}1, 1^{m-2}1^2
\end{aligned}$$
$$E_{2m+1} = H_1 \oplus E_{2m} = H_m \oplus H_{m+1}$$
$$E_{2m} = H_1 \oplus E_{2m-1} = H_1 \oplus D_{2m-1} = H_{m-1} \oplus H_{m+1} = H_m \oplus H_m$$

$$
\begin{aligned}
F_n\colon (2m-1)1^2,2^m1,2^{m-1}1^3 &= 10,10,01 \oplus (2m-2)1^2,2^{m-1}1^2,2^{m-1}1^2\\
&= 10,01,10 \oplus (2m-2)1^2,2^m,2^{m-2}1^4\\
&= m-11,1^m0,1^{m-1}1 \oplus m1,1^m1,1^{m-1}1^2\\
(2m-2)1^2,2^m,2^{m-2}1^4 &= 10,1,01 \oplus (2m-3)1^2,2^{m-1}1,2^{m-2}1^3\\
&= 2m-11,1^m,1^{m-1}1^2 \oplus 2m-11,1^m,1^{m-1}1^2\\
F_{2m+1} &= H_1 \oplus G_{2m} = H_1 \oplus F_{2m} = H_m \oplus H_{m+1}\\
F_{2m} &= H_1 \oplus F_{2m-1} = H_m \oplus H_m
\end{aligned}
$$

G_{2m}:

$$
\begin{aligned}
(2m-2)1^2,2^{m-1}1^2,2^{m-1}1^2 &= 10,01,01 \oplus (2m-3)1^2,2^{m-1}1,2^{m-2}1^3\\
&= m-21,1^{m-1}0,1^{m-1}0 \oplus m1,1^{m-1}1^2,1^{m-1}1^2\\
&= m-11,1^{m-1}1,1^{m-1}1 \oplus m-11,1^{m-1}1,1^{m-1}1\\
G_{2m} &= H_1 \oplus F_{2m-1} = H_{m-1} \oplus H_{m+1} = H_m \oplus H_m
\end{aligned}
$$

7. 接続公式

定理 7.1. $\mathbf{m} \in \mathcal{R}_3$ が $m_{0,n_0} = m_{1,n_1} = 1$ を満たすとする．λ_{0,n_0} に対応する $\mathcal{M}_{\lambda_\mathbf{m}}$（前節参照）の局所解から λ_{1,n_1} に対応する局所解への**接続係数**を $c(\lambda_{0,n_0} \rightsquigarrow \lambda_{1,n_1})$ とおくと

$$
c(\lambda_{0,n_0} \rightsquigarrow \lambda_{1,n_1}) = \frac{\prod_{\nu=1}^{n_0-1} \Gamma\bigl(\lambda_{0,n_0} - \lambda_{0,\nu} + 1\bigr) \cdot \prod_{\nu=1}^{n_1-1} \Gamma\bigl(\lambda_{1,\nu} - \lambda_{1,n_1}\bigr)}{\prod_{\substack{\mathbf{m}'\oplus\mathbf{m}''=\mathbf{m}\\ m'_{0,n_0}=m''_{1,n_1}=1}} \Gamma\bigl(|\{\lambda_{\mathbf{m}'}\}|\bigr)},
$$

$$
\sum_{\substack{\mathbf{m}'\oplus\mathbf{m}''=\mathbf{m}\\ m'_{0,n_0}=m''_{1,n_1}=1}} m'_{j,\nu} = (n_1-1)m_{j,\nu} - \delta_{j,0}(1-n_0\delta_{\nu,n_0}) + \delta_{j,1}(1-n_1\delta_{\nu,n_1}) \qquad (0 \le j \le 2,\ 1 \le \nu \le n_j)
$$

系 7.2. 前定理の仮定の下で

$$
\#\{\mathbf{m}' \in \mathcal{R}_3\,;\, \mathbf{m}' \oplus \mathbf{m}'' = \mathbf{m},\ m'_{0,n_0} = m''_{1,n_1} = 1\} = n_0 + n_1 - 2 \tag{7.1}
$$

$$
\sum_{\substack{\mathbf{m}'\oplus\mathbf{m}''=\mathbf{m}\\ m'_{0,n_0}=m''_{1,n_1}=1}} \operatorname{ord}\mathbf{m}' = (n_1-1)\operatorname{ord}\mathbf{m} \tag{7.2}
$$

例 7.3. i) H_1 ($\mathbf{m} = (11,11,11)$: Gauss hypergeometric function cf. §2)

$$
P\begin{Bmatrix} \lambda_{0,1} & \lambda_{1,1} & \lambda_{2,1}\\ \lambda_{0,2} & \lambda_{1,2} & \lambda_{2,2}\end{Bmatrix} \qquad \bigl(|\{\lambda_{j,\nu}\}| = \sum \lambda_{j,\nu} - 1 = 0\bigr)
$$

$$
1\overline{1},1\underline{1},11 = 0\overline{1},1\underline{0},10 \oplus 10,01,01 = 0\overline{1},1\underline{0},01 \oplus 10,01,10
$$

$$
c(\lambda_{0,2} \rightsquigarrow \lambda_{1,2}) = \frac{\Gamma(\lambda_{0,2}-\lambda_{0,1}+1)\cdot\Gamma(\lambda_{1,1}-\lambda_{1,2})}{\Gamma(\lambda_{0,2}+\lambda_{1,1}+\lambda_{2,1})\cdot\Gamma(\lambda_{0,2}+\lambda_{1,1}+\lambda_{2,2})}
$$

ii) H_n ($\mathbf{m} = (1^n, n-11, 1^n)$: hypergeometric family, ${}_nF_{n-1}(\alpha,\beta;z)$)[9]

$$P\begin{Bmatrix} \lambda_{0,1} & [\lambda_{1,1}]_{(n-1)} & \lambda_{2,1} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{0,n-1} & & \lambda_{2,n-1} \\ \lambda_{0,n} & \lambda_{1,2} & \lambda_{2,n} \end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix} 1-\beta_1 & [0]_{(n-1)} & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1-\beta_{n-1} & & \alpha_{n-1} \\ 0 & -\beta_n & \alpha_n \end{Bmatrix}$$

$$\textstyle\sum_\nu (\lambda_{0,\nu}+\lambda_{2,\nu}) + (n-1)\lambda_{1,1} + \lambda_{1,2} = n-1$$

$c(\lambda_{0,n} \rightsquigarrow \lambda_{1,2})$:

$$\begin{aligned} 1\ldots 1\bar{1}; n-1\underline{1}; 1\ldots 1 &= 0\ldots 0\bar{1};\quad 1\quad \underline{0}; 0\ldots 0\overset{\nu}{\smile}\!\!10\ldots 0 \\ &\oplus 1\ldots 1\bar{0}; n-2\underline{1}; 1\ldots 101\ldots 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c(\lambda_{0,n} \rightsquigarrow \lambda_{1,2}) &= \frac{\displaystyle\prod_{\nu=1}^{n-1}\Gamma(\lambda_{0,n}-\lambda_{0,\nu}+1)\cdot\Gamma(\lambda_{1,1}-\lambda_{1,2})}{\displaystyle\prod_{\nu=1}^{n}\Gamma(\lambda_{0,n}+\lambda_{1,1}+\lambda_{2,\nu})} = \prod_{\nu=1}^{n}\frac{\Gamma(\beta_\nu)}{\Gamma(\alpha_\nu)} \\ &= \lim_{x\to 1-0}(1-x)^{\beta_n}{}_nF_{n-1}(\alpha,\beta;x) \qquad (\mathrm{Re}\,\beta_n > 0), \end{aligned}$$

$c(\lambda_{0,n} \rightsquigarrow \lambda_{2,n})$: $\quad n=3$

$$\begin{aligned} 11\bar{1}, 21, 11\underline{1} &= 001, 10, 100 \quad 001, 10, 010 \quad 101, 11, 110 \quad 011, 11, 110 \\ &\oplus 110, 11, 011 = 110, 11, 101 = 010, 10, 001 = 100, 10, 001 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c(\lambda_{0,n} \rightsquigarrow \lambda_{2,n}) &= \prod_{k=1}^{n-1}\frac{\Gamma(\lambda_{2,k}-\lambda_{2,n})}{\Gamma\Bigl(\Bigl|\begin{Bmatrix}\lambda_{0,n} & \lambda_{1,1} & \lambda_{2,k}\end{Bmatrix}\Bigr|\Bigr)} \\ &\quad\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\Gamma(\lambda_{0,n}-\lambda_{0,k}+1)}{\Gamma\left(\left|\begin{Bmatrix}(\lambda_{0,\nu})_{\substack{1\le\nu\le n\\ \nu\ne k}} & [\lambda_{1,1}]_{(n-2)} & (\lambda_{2,\nu})_{1\le\nu\le n-1} \\ & \lambda_{1,2} & \end{Bmatrix}\right|\right)} \\ &= \prod_{k=1}^{n-1}\frac{\Gamma(\beta_k)\Gamma(\alpha_k-\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_k)\Gamma(\beta_k-\alpha_n)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c(\lambda_{1,2} \rightsquigarrow \lambda_{0,n}) &= \frac{\Gamma\bigl(\lambda_{1,2}-\lambda_{1,1}+1\bigr)\cdot\prod_{\nu=1}^{n-1}\Gamma\bigl(\lambda_{0,\nu}-\lambda_{0,n}\bigr)}{\displaystyle\prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(\left|\begin{Bmatrix}(\lambda_{0,\nu})_{1\le\nu\le n-1} & [\lambda_{1,1}]_{(n-2)} & (\lambda_{2,\nu})_{1\le\nu\le n,\ \nu\ne j} \\ & \lambda_{1,2} & \end{Bmatrix}\right|\right)} \\ &= \prod_{\nu=1}^{n}\frac{\Gamma(1-\beta_\nu)}{\Gamma(1-\alpha_\nu)}. \end{aligned}$$

iii) EO_{2m} ($\mathbf{m} = (1^{2m}, mm-11, mm)$: even family)

$$P\begin{Bmatrix} \lambda_{0,1} & [\lambda_{1,1}]_{(m)} & [\lambda_{2,1}]_{(m)} \\ \vdots & [\lambda_{1,2}]_{(m-1)} & [\lambda_{2,2}]_{(m)} \\ \lambda_{0,2m} & \lambda_{1,3} & \end{Bmatrix}$$

$$\textstyle\sum_\nu \lambda_{0,\nu} + m(\lambda_{1,1}+\lambda_{2,1}+\lambda_{2,2}) + (m-1)\lambda_{1,2} + \lambda_{1,3} = 2m-1$$

---

[9] ${}_nF_{n-1}$ は，ガンマ関数での具体形が分かっていた接続公式の唯一の例 (cf. [Le], [OTY])

$$c(\lambda_{0,2m} \rightsquigarrow \lambda_{1,3}) = \prod_{k=1}^{2} \frac{\Gamma\bigl(\lambda_{1,k}-\lambda_{1,3}\bigr)}{\Gamma\Bigl(\Bigl|\Bigl\{\begin{matrix}\lambda_{0,2m} & \lambda_{1,1} & \lambda_{2,k}\end{matrix}\Bigr\}\Bigr|\Bigr)}$$

$$\cdot \prod_{k=1}^{2m-1} \frac{\Gamma\bigl(\lambda_{0,2m}-\lambda_{0,k}+1\bigr)}{\Gamma\Bigl(\Bigl|\begin{Bmatrix}\lambda_{0,k} & \lambda_{1,1} & \lambda_{2,1}\\ \lambda_{0,2m} & \lambda_{1,2} & \lambda_{2,2}\end{Bmatrix}\Bigr|\Bigr)},$$

$$c(\lambda_{1,3} \rightsquigarrow \lambda_{0,2m}) = \prod_{k=1}^{2} \frac{\Gamma\bigl(\lambda_{1,3}-\lambda_{1,k}+1\bigr)}{\Gamma\Biggl(\Biggl|\begin{Bmatrix} & [\lambda_{1,1}]_{(m-1)} & [\lambda_{2,k}]_{(m)}\\ (\lambda_{0,\nu})_{1\le\nu\le 2m-1} & [\lambda_{1,2}]_{(m-1)} & [\lambda_{2,3-k}]_{(m-1)}\\ & \lambda_{1,3} & \end{Bmatrix}\Biggr|\Biggr)}$$

$$\cdot \prod_{k=1}^{2m-1} \frac{\Gamma\bigl(\lambda_{0,k}-\lambda_{0,2m}\bigr)}{\Gamma\Biggl(\Biggl|\begin{Bmatrix} & [\lambda_{1,1}]_{(m-1)} & [\lambda_{2,1}]_{(m-1)}\\ (\lambda_{0,\nu})_{\substack{1\le\nu\le 2m-1\\ \nu\ne k}} & [\lambda_{1,2}]_{(m-2)} & [\lambda_{2,2}]_{(m-1)}\\ & \lambda_{1,3} & \end{Bmatrix}\Biggr|\Biggr)}.$$

iv) EO_{2m+1} ($\mathbf{m} = (1^{2m+1}, mm1, m+1m)$: odd family)

$$P\begin{Bmatrix}\lambda_{0,1} & [\lambda_{1,1}]_{(m)} & [\lambda_{2,1}]_{(m+1)}\\ \vdots & [\lambda_{1,2}]_{(m)} & [\lambda_{2,2}]_{(m)}\\ \lambda_{0,2m+1} & \lambda_{1,3} & \end{Bmatrix}$$

$$\textstyle\sum_\nu \lambda_{0,\nu} + m(\lambda_{1,1}+\lambda_{1,2}+\lambda_{2,2}) + (m+1)\lambda_{2,1} + \lambda_{1,3} = 2m$$

$$c(\lambda_{0,2m+1} \rightsquigarrow \lambda_{1,3}) = \prod_{k=1}^{2} \frac{\Gamma\bigl(\lambda_{1,k}-\lambda_{1,3}\bigr)}{\Gamma\Bigl(\Bigl|\Bigl\{\begin{matrix}\lambda_{0,2m+1} & \lambda_{1,k} & \lambda_{2,1}\end{matrix}\Bigr\}\Bigr|\Bigr)}$$

$$\cdot \prod_{k=1}^{2m} \frac{\Gamma\bigl(\lambda_{0,2m+1}-\lambda_{0,k}+1\bigr)}{\Gamma\Bigl(\Bigl|\begin{Bmatrix}\lambda_{0,k} & \lambda_{1,1} & \lambda_{2,1}\\ \lambda_{0,2m+1} & \lambda_{1,2} & \lambda_{2,2}\end{Bmatrix}\Bigr|\Bigr)},$$

$$c(\lambda_{1,3} \rightsquigarrow \lambda_{0,2m+1}) = \prod_{k=1}^{2} \frac{\Gamma\bigl(\lambda_{1,3}-\lambda_{1,k}+1\bigr)}{\Gamma\Biggl(\Biggl|\begin{Bmatrix} & [\lambda_{1,k}]_{(m)} & [\lambda_{2,1}]_{(m)}\\ (\lambda_{0,\nu})_{1\le\nu\le 2m} & [\lambda_{1,3-k}]_{(m-1)} & [\lambda_{2,2}]_{(m)}\\ & \lambda_{1,3} & \end{Bmatrix}\Biggr|\Biggr)}$$

$$\cdot \prod_{k=1}^{2m} \frac{\Gamma\bigl(\lambda_{0,k}-\lambda_{0,2m+1}\bigr)}{\Gamma\Biggl(\Biggl|\begin{Bmatrix} & [\lambda_{1,1}]_{(m-1)} & [\lambda_{2,1}]_{(m)}\\ (\lambda_{0,\nu})_{\substack{1\le\nu\le 2m\\ \nu\ne k}} & [\lambda_{1,2}]_{(m-1)} & [\lambda_{2,2}]_{(m-1)}\\ & \lambda_{1,3} & \end{Bmatrix}\Biggr|\Biggr)}.$$

8. 接続公式の証明の概略

基本的には，Gauss の超幾何関数の場合に挙げたのと同様の方法で，以下のように証明することが出来る[10].

[10]全く別の証明もある (2009 年 2 月)

1. 変換 $u \mapsto z^{-\lambda_{0,n_0}}(1-z)^{-\lambda_{1,n_1}}u \ \Rightarrow\ \lambda_{0,n_0}=\lambda_{1,n_1}=0$

2. Shift $T_1\ :\ \lambda_{0,\nu}\mapsto\lambda_{0,\nu}-(1-\delta_{\nu,n_0}),\ \lambda_{1,\nu}\mapsto\lambda_{1,\nu}+(1-\delta_{\nu,n_1})$

3. 隣接関係 $R(\lambda_{\mathbf{m}}) := \frac{c_{\mathbf{m}}(\lambda_{0,n_0}\rightsquigarrow\lambda_{1,n_1})}{T_1\big(c_{\mathbf{m}}(\lambda_{0,n_0}\rightsquigarrow\lambda_{1,n_1})\big)}\ \Leftarrow$ Shift 作用素

4. 定理 8.1 より $c_{\mathbf{m}}(\lambda_{0,n_0}\rightsquigarrow\lambda_{1,n_1})=\prod_{k=0}^{\infty}R(T_1^k\lambda_{\mathbf{m}})$

$R(\lambda_{\mathbf{m}})$: n_0+n_1-2 次の多項式を分母分子とする $\lambda_{j,\nu}$ の有理関数
分子 $\leftarrow$ 可約性 $\Leftarrow$ $\mathbf{m}=\mathbf{m}'\oplus\mathbf{m}''$ に起因する rigid 部分系の存在
分母 $\leftarrow$ log 項をもつ局所解 $\Leftarrow$ 特性根が整数差

定理 8.1. $A=\begin{pmatrix}0&0\\A_0&A_1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&B_0\\0&B_1\end{pmatrix}\in M(n,\mathbb{C})$
$A_1,\ B_1\in M(n_1,\mathbb{C}),\ n=n_0+n_1,\ D(\mathbf{0},\mathbf{r}):=\mathrm{Diag}(\mathbf{0}_{n_0},r_1,\dots,r_{n_1})$

$$\frac{du}{dz}=\frac{A-D(\mathbf{0},\mathbf{r})}{z}u+\frac{B+D(\mathbf{0},\mathbf{r})}{z-1}u \tag{8.1}$$

$u^{\mathbf{r}}$: 上の方程式の原点での正則解 $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}&\max_{1\le\nu\le n,\,|z|\le1,\,z\in\mathbb{C}}\big\{\big|u^{\mathbf{r}}_\nu(z)-u^{\mathbf{r}}_\nu(0)\big|\big\}\\&\qquad\le\max_{1\le\nu\le n_0}\{|u^{\mathbf{r}}_\nu(0)|\}\cdot\Big(\big(1+\frac{N+1}{\min_{1\le\nu\le n_1}\{\mathrm{Re}\,r_\nu\}-4N-3}\big)^{N+1}-1\Big)\end{aligned} \tag{8.2}$$

$\quad$ *if* $\quad \mathrm{Re}\,r_\nu>4N+3$ $\quad$ *and* $\quad n\cdot\max\{|A_{ij}|,|B_{ij}|\}\le N.$

特に，$u^{\mathbf{r}}(0)=u_0\in\mathbb{C}^n$，$\min_\nu\{\mathrm{Re}\,r_\nu\}\to\infty\ \Rightarrow\ u^{\mathbf{r}}(z)$ は u_0 に一様収束

9. 関連事項

9.1. 三角関数の恒等式.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod_{\nu\in\{1,\dots,n\}}\sin(x_k-y_\nu)}{\prod_{\nu\in\{1,\dots,n\}\setminus\{k\}}\sin(x_k-x_\nu)}=\sin\Big(\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu-\sum_{\nu=1}^{n}y_\nu\Big),$$

$$\sum_{k=1}^{n}\prod_{\nu\in\{1,\dots,n\}\setminus\{k\}}\frac{\sin(y_j-x_\nu)}{\sin(x_k-x_\nu)}\prod_{\nu\in\{1,\dots,n\}\setminus\{j\}}\frac{\sin(x_k-y_\nu)}{\sin(y_j-y_\nu)}=1\quad(j=1,\dots,n),$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\sin(x_k+s)\cdot\sin(x_k+t)\cdot\prod_{\nu\in\{1,\dots,n\}\setminus\{k\}}\frac{\sin(x_k+x_\nu+2u)}{\sin(x_k-x_\nu)}\\&=\begin{cases}\sin\Big(nu+\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu\Big)\cdot\sin\Big(s+t+(n-2)u+\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu\Big)&\text{if } n=2m\\\sin\Big(s+(n-1)u+\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu\Big)\cdot\sin\Big(t+(n-1)u+\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu\Big)&\text{if } n=2m+1\end{cases}\end{aligned}$$

注意 9.1. 最初の 2 つの等式は，hypergeometric family の接続係数から，3 つめの等式は，even/odd family の接続係数から得られる．

　これらの等式は，別の証明がある（H. Ochiai, J. Sekiguchi, Oshima 他）．

9.2. **応用，今後の問題.** [11]

(1) 多重複度の場合 $\cdots$ 部分 Wronskian?
  整数差，見かけの特異点，単独高階と一階システム
  $\Rightarrow$ 大域モノドロミーに十分な情報
(2) 方程式の構成 $\cdots$ middle convolution, 横山 (+原岡)[12], その他
  文献多数：[CB, CB2], [CBS], [DG], [DG2], [Gl], [HY], [Ih], [Ka], [Ko, Ko2, Ko3], [Os3, Os4], [Si, Si2], [Vo], [Yo2] etc.
(3) Heckman-Opdam 超幾何の Gauss 和公式 [Op] （$\Leftarrow H_n$, EO_{2n} [Os2]）
(4) アクセサリパラメータ/幾何的モジュライ
  Shift 作用素，隣接関係式，Painlevé 方程式（[Ta], [HF]）
(5) 接続係数がガンマ関数で表せる多数の例（[Os2]）
  eg. 特殊なパラメータ値の $211, 211, 1111$ （どうして**分かる**のか？）
  $\Leftarrow$ アフィンヘッケ環の表現 ([He])
(6) 不確定特異点 ([HF], [Bo])
(7) 超幾何系の間の $\mathcal{D}$-加群としての準同型
(8) 多変数の超幾何 $\cdots$ rigid 系，Shift 作用素 ([He])，制限／拡張 ([Os2], [Ha2], [Yo2])

以下の他，より詳しくは [Ha2], [Ko3], [Si2] の文献表を参照.

References

[BH] F. Beukers and G. Heckman, *Monodromy for the hypergeometric function* ${}_nF_{n-1}$, Invent. Math. **95** (1989), 325–354.

[Bo] P. Boalch, *From Klein to Painlevé via Fourier, Laplace and Jimbo*, Proc. London Math. Soc. **90** (2005) 167–208.

[CB] W. Crawley-Boevey, *On matrices in prescribed conjugacy classes with no common invariant subspaces and sum zero*, Duke Math. J. **118** (2003), 339–352.

[CB2] ———, *Indecomposable parabolic bundles and the existence of matrices in prescribed conjugacy class closures with product equal to the identity*, Publ. Inst. Hautes Études Sci. **100** (2004), 171–207.

[CBS] W. Crawley-Boevey and P. Shaw, *Multiplicative preprojective algebras, middle convolution and the Deligne-Simpson problem*, Adv. in Math. **201** (2006), 180–208.

[De] P. Deligne, *Equations Differéntielles à Points Sunguliers Réguliers*, Lecture Notes in Math., vol. 163, Springer-Verlag, 1970.

[DG] M. Dettweiler and S. Reiter, *An algorithm of Katz and its applications to the inverse Galois problems*, J. Symbolic Comput. **30** (2000), 761–798.

[DG2] ———, *Middle convolution of Fuchsian systems and the construction of rigid differential systems*. J. Algebra **318** (2007), 1–24.

[Gl] O. A. Gleiser, *Some explicit solutions of the additive Deligne-Simpson problem and their applications*, Adv. Math. **178** (2003), 311–374.

[11] addition，middle convolution, 合流操作，Laplace 変換などを含むより一般の変換が多変数の Weyl 代数に定義できる (2009 年 2 月)

[12] Katz の middle convolution に基づく operation と横山の extension に基づく operation は同値となる ([Os5])

[Ha] Y. Haraoka, *Integral representations of solutions of differential equations free from accessory parameters*, Adv. Math. **169** (2002), 187–240.

[Ha2] 原岡喜重, 「超幾何関数」, すうがくの風景 7, 朝倉書店, 2002.

[HF] Y. Haraoka and G. M. Filipuk, *Middle convolution and deformation for Fuchsian systems.* J. Lond. Math. Soc. **76** (2007), 438–450.

[HY] Y. Haraoka and T. Yokoyama, *Construction of rigid local systems and integral representations of their sections*, Math. Nachr. **279** (2006), 255–271.

[He] G. Heckman, *Hypergeometric and Spherical Functions*, Harmonic Analysis and Special Functions on Symmteric Spaces, Part I, G. Heckman and H. Schlichtkrull, Acdemic Press, 1994, pp.1–90.

[Ih] 伊原康隆, ガロア逆問題に於ける *linear rigidity* とその応用（*survey)*, 代数的整数論とその周辺（2000 年 5 月）, 数理研講究録 **1154**, 117–124.

[Ka] N. M. Katz, *Rigid Local Systems*, Annals of Mathematics Studies **139**, Princeton University Press, 1995.

[Koh] M. Kohno, *Global Analysis in Linear Differential Equations*, Kluwer Academic Publishers, 1999.

[Ko] V. P. Kostov, *On the Deligne–Simpson problem*, Trudy Mat. Inst. Steklov. **238** (2001), 158–195.

[Ko2] ———, *The Deligne–Simpson problem for zero index of rigidity*, Perspective in Complex Analysis, Differential Geometry and Mathematical Physics, World Scientific 2001, 1–35.

[Ko3] ———, *The Deligne–Simpson problem — a survay*, J. Algebra **281** (2004), 83–108.

[Le] A. H. M. Levelt, *Hypergeometric functions III*, Indag. Math. **23** (1961), 386–403.

[MWZ] P. Magyar, J. Weynman and A. Zelevinsky, *Multiple flag varieties of finite type*, Adv. in Math. **141** (1999), 97–118.

[MUI] 森口繁一，宇田川銈久，一松信，数学公式 III –特殊函数– ，岩波全書，岩波書店, 1960.

[OTY] K. Okubo, K. Takano and S. Yoshida, *A connection problem for the generalized hypergeometric equations*, Funkcial. Ekvac. **31** (1988), 483–495.

[Op] E. M. Opdam, *An analogue of the Gauss summation formula for hypergeometric functions related to root systems*, Math. Z. **212** (1993), 313–336.

[Os] T. Oshima, *A quantization of conjugacy classes of matrices*, Advances in Math. **196** (2005), 124–146.

[Os2] ———, *Heckman-Opdam hypergeometric functions and their specializations*, Harmonische Analysis und Darstellungstheorie Topologischer Gruppen, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Report **49** (2007), 38–40.

[Os3] ———, `Okubo`, a computer program for Katz/Yokoyama/Oshima algorithms on MS-Windows, ftp://akagi.ms.u-tokyo.ac.jp/pub/math/okubo/okubo.zip, 2007-8.

[Os4] ——— *Classification of Fuchsian systems and their connection problem*, arXiv:0811.2916, preprint, 2008, 29pp.

[Os5] ——— *Katz's middle convolution and Yokoyama's extending operation*, arXiv:0812.1135, 2008, 18pp.

[Ro] D. P. Roberts, *Rigid Jordan Tuples*, preprint, http://cda.mrs.umn/edu/˜roberts.

[Si] C. T. Simpson, *Products of Matrices*, Canadian Math. Soc. Conference Proceedings **12**, AMS, Providence RI (1991), 157–185.

[Si2] ———, *Katz's middle convolution algorithm*, 53 pp, arXiv:math/0610526.

[Ta] K. Takemura, *Integral representation of solutions to Fuchsian system and Heun's equation*, arXiv:0705.3358, preprint, 2007.

[WW] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis, Fourth Edition*, 1927, Cambridge University Press.

[Vo] H. Völklein, *The braid group and linear rigidity*, Geom. Dedicata **84** (2001), 135–150.

[Yo] T. Yokoyama, *On an irreducible conditions for hypergeometric systems*, Funkcial. Ekvac. **38** (1995), 11–19.

[Yo2] ———, *Construction of systems of differential equations of Okubo normal form with rigid monodromy*, Math. Nachr. **279** (2006), 327–348.

[Yo3] ———, *Recursive calculation of connection formulas for systems of differential equations of Okubo normal form*, preprint, 2008.