多変数ネヴァンリンナ理論とディオファントス近似

野口潤次郎 東大・数理
解析学賞受賞特別講演
平成 15(2003) 年度日本数学会年会 3 月 於東大・駒場

平成９年秋の学会の折に，企画特別講演で「値分布と有理点分布」という題で話をした．今回は，その後のこの方面の進展を紹介し，問題点について考えたい．

1　第一主要定理

第一主要定理は，理論の枠組みを決めるということで重要である．一変数では，R. Nevanlinna の後，A. Bloch, H. Cartan, 清水辰次郎, L.V. Ahlfors 等が 1930 年前後に研究し，高次元では 1960 年代，W. Stoll, Bott-Chern, H. Wu 等により盛んに研究された．

$\mathbf{C}^m$ の複素座標を $z=(z_j)$ とする．次の記号を定める．

$$\begin{aligned} &\|z\| = (\textstyle\sum_j |z_j|^2)^{1/2}, \quad d = \partial + \bar\partial, \qquad d^c = \frac{i}{4\pi}(\bar\partial - \partial), \\ &\alpha = dd^c\|z\|^2, \qquad\qquad \gamma = (dd^c \log\|z\|^2)^{m-1} \wedge d^c \log\|z\|^2. \end{aligned}$$

$\varphi(z)$ を $\mathbf{C}^m$ 上定義された $[-\infty,\infty]$ に値をもち，局所的に多重劣調和関数の差で表される関数とする．カレントの意味での二階微分 $dd^c[\phi]$ は複素数値ラドン測度を係数とする $(1,1)$ 型式である．このとき次の Jensen の公式が成立する．

補題 1.1 (Jensen の公式) 任意の $r>s>0$ に対し，

$$\int_{\{\|z\|=r\}} \varphi(z)\gamma(z) - \int_{\{\|z\|=s\}} \varphi(z)\gamma(z) = \int_s^r \frac{dt}{t^{2m-1}} \int_{\{\|z\|<t\}} 2dd^c[\varphi] \wedge \alpha^{m-1}.$$

$f(z)$ を $\mathbf{C}^m$ 上の有理型関数として，$\varphi(z) = \log|f(z)|$ とおく．$f(z)$ の零因子を $(f)_0$, 極因子を $(f)_\infty$ とする．(f) の因子は，$(f) = (f)_0 - (f)_\infty$ である．

補題 1.2 (Poincaré-Lelong の公式) カレントとして，

$$2dd^c[\log|f|] = (f).$$

$\varphi(z) = \log|f(z)|$ とおき，補題 1.1, 補題 1.2 を用いると次を得る．

$$\begin{aligned} \text{(1.3)} \qquad &\int_{\{\|z\|=r\}} \log|f(z)|\gamma(z) - \int_{\{\|z\|=1\}} \log|f(z)|\gamma(z) \\ &= \int_1^r \frac{dt}{t^{2m-1}} \int_{\{\|z\|<t\}\cap(f)_0} \alpha^{m-1} - \int_1^r \frac{dt}{t^{2m-1}} \int_{\{\|z\|<t\}\cap(f)_\infty} \alpha^{m-1}. \end{aligned}$$

次のように定める．

$$
\log^+ t = \max\{0, \log t\}, \qquad \log t = \log^+ t - \log^+ \frac{1}{t} \tag{1.4}
$$

$$
m(r, f) = \int_{\{\|z\|=r\}} \log^+ |f(z)| \gamma(z) \quad (\textbf{無限遠点への接近関数}),
$$

$$
N(r, (f)_{0(\text{resp.}\,\infty)}) = \int_1^r \frac{dt}{t^{2m-1}} \int_{\{\|z\| \le t\} \cap (f)_{0(\text{resp.}\,\infty)}} \alpha^{m-1} \quad (\textbf{個数関数}),
$$

$$
T(r, f) = m(r, f) + N(r, (f)_\infty) \quad (\textbf{ネヴァンリンナの位数関数}).
$$

(1.3) と (1.4) より次を得る．

定理 1.5 (第一主要定理) $T(r, f) = T(r, 1/f) + \int_{\|z\|=1} \log |f(z)| \gamma(z)$.

次の簡単な事実に注意する．

$$
\log^+ \left| \prod_1^q a_j \right| \le \sum_1^q \log^+ |a_j|,
$$

$$
\log^+ \left| \sum_1^q a_j \right| \le \sum_1^q \log^+ |a_j| + \log q.
$$

従って，

$$
T\left(r, \prod_1^q f_j\right) \le \sum_1^q T(r, f_j),
$$

$$
T\left(r, \sum_1^q f_j\right) \le \sum_1^q T(r, f_j) + \log q,
$$

$$
T\left(r, Q(f_1, \ldots, f_q)\right) \le C_1 \sum_1^q T(r, f_j) + C_2.
$$

ここで，$Q(\cdots)$ は多変数有理関数である．特に $1/(f-a), a \in \mathbf{C}$ を考えると，

定理 1.6 (第一主要定理)

$$
\begin{aligned}
T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) &= T(r, f-a) - \int_{\|z\|=1} \log |f(z) - a| \gamma(z) \\
&= T(r, f) + O(1), \\
|O(1)| &\le \log^+ |a| + \log 2 + \left| \int_{\|z\|=1} \log |f(z) - a| \gamma(z) \right|.
\end{aligned}
$$

補題 1.7 $\displaystyle\int_{\|z\|=1} \log |f(z) - a| \gamma(z)$ は $a \in \mathbf{C}$ について局所有界（実は連続）である．

$$N(r,(f-a)_0) \le T\left(r, \frac{1}{f-a}\right).$$

$N(r,(f-\infty)_0) = N(r,(f)_\infty)$ と考える．以上より，次の重要な不等式を得る．

定理 1.8 (ネヴァンリンナ不等式) ある定数 C が存在して，任意の $a \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ に対し

$$N(r,(f-a)_0) \le T(r,f) + C.$$

$T(r,f)$ の幾何学的解釈：Ω_0 を $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ の Fubini-Study 計量型式，つまり超平面束 $O(1)$ の Chern 型式とする．**清水の位数関数** ([22]) を次のように定義する．

$$T_f(r,\Omega_0) = \int_1^r \frac{dt}{t^{2m-1}} \int_{\|z\| \le t} f^*\Omega_0 \wedge \alpha^{m-1}.$$

定理 1.9 (**清水** [22]・**Ahlfors** [1]) $T(r,f) = T_f(r,\Omega_0) + O(1)$.

以上を n 次元複素射影代数的多様体 V と有理型写像 $f : \mathbf{C}^m \to V$ に拡張する．$\{\psi_j\}_{j=1}^n$ を有理関数体 $\mathbf{C}(V)$ の超越基底とする．$f^*\psi_j \not\equiv \infty$ とする．$\{\psi_j\}_{j=1}^n$ に関する位数関数を次で定める．

$$T_f(r,\{\psi_j\}_{j=1}^n) = \max_j T(r, f^*\psi_j).$$

$L \to V$ をエルミート直線束，Ω_L を L の Chern 型式とし，L に関する位数関数を次のように定める．

$$T_f(r,L) = T(r,\Omega_L) = \int_1^r \frac{dt}{t^{2m-1}} \int_{\|z\| \le t} f^*\Omega_L \wedge \alpha^{m-1}.$$

定理 1.10 (i) $T_f(r,L) < C_1 T_f(r,\{\psi_j\}_{j=1}^n) + C_2$.
(ii) $L > 0$ ならば，$T_f(r,\{\psi_j\}_{j=1}^n) < C_3 T_f(r,L) + C_4$.
(iii) $L > 0$ ならば，$T_f(r,L) = O(\log r)$ と f が有理写像であることは同値である．更に，$T_f(r,L) = O(1)$ と f が定写像であることは同値である．

$T_f(r,\{\psi_j\}_{j=1}^n)$ はネヴァンリンナの位数関数 $T(r,f)$ の拡張，$T_f(r,L)$ は清水の位数関数 $T_f(r,\Omega_0)$ の拡張と考えられる．

非負係数因子 $D = (\sigma), \sigma \in H^0(V,L)$ への接近関数を次のようにおく．

$$m_f(r,D) = \int_{\|z\|=r} \log \frac{1}{\|\sigma \circ f(z)\|} \gamma(z).$$

定理 1.11 (第一主要定理) $T_f(r,L) = m_f(r,D) + N(r,f^*D) + O(1)$.

さてどうして $f(\mathbf{C}^m)$ と因子 D の交わりを考えるのか？ 値分布なのであるから，$a \in V$ に対し $f^{-1}a$ を考えないのか？

この問題の背後には，安定性の問題が横たわっているように思われる．ある意味で，因子の逆像にはたとえ写像が超越的でもある種の安定性がある．それを示すのが第二主要定理である．一方，点の逆像には，少なくとも次のような理由で安定性がない．

(i) Fatou (1922)，Bieberbach (1933): 単射正則写像 $f : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ で，ヤコビヤン $J(f) \equiv 1$ であるが，$\mathbf{C}^2 \setminus f(\mathbf{C}^2)$ が非空開集合を含むものがある．更に，別のそのような単射正則写像 $g : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ で，$f(\mathbf{C}^2) \cap g(\mathbf{C}^2) = \emptyset$ となるものが取れる．このような f に対しては $f^{-1}x$ は，ある開集合上空集合で，また別の開集合上では 1 点集合になり，安定性がない．

(ii) 最近 Buzzard-Lu (2000) は，$n(\geqq 2)$ 次元複素トーラス N と非空開集合 $U \subset N$ に対し，微分非退化正則写像 $f : \mathbf{C}^n \to N \setminus U$ を構成した．$\pi : \mathbf{C}^n \to N$ を普遍被覆写像とし，$\tilde{U} = \pi^{-1}U$ とおく．$\tilde{f} : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ を f の持ち上げとする．$\tilde{f}$ は微分非退化で，格子状に分布している開集合 $\tilde{U}$ に対し，$\tilde{f}^{-1}\tilde{U} = \emptyset$ である．

(iii) Cornalba-Shiffman (1972) は次のような正則写像 $f : z \in \mathbf{C}^2 \to (f_1(z), f_2(z)) \in \mathbf{C}^2$ を構成した．各正則関数 f_1, f_2 の位数が零でも，共通零点 $f^{-1}0$ は，離散集合で位数が無限になるものが作れる．$\mathbf{C}^m$ のいくつかの解析集合 A_ν の増大度から共通部分 $\bigcap_\nu A_\nu$ の増大度を評価する問題は，超越ベズー問題と呼ばれるが，この例は，それが一般には成立しないことを示している．これは，(i), (ii) の理由に比べると少し弱い感じがするが，それでも点の逆像分布を調べる難しさを十分に表している．

因子 D に対し f^*D を解析することで，かなり $f(\mathbf{C}^m)$ の様子がわかるというのが以下の話である．

2 対数的 Bloch・落合の定理と整数点分布

V を n 次元複素射影代数的多様体とする．Ω_V^1 で V 上の正則 1 型式の芽の層を表す．$f : \mathbf{C}^m \to V$ を有理型写像とする．$f(\mathbf{C}^m)$ のザリスキー像 $X_0(f)$ ($f(\mathbf{C}^m)$ を含む最小の代数的集合) を調べる．$X_0(f) \neq V$ のとき，f は**代数的に退化**しているという．解析的に非退化な $\phi : \mathbf{C} \to \mathbf{C}^m$ と合成することにより，それは $f(\phi(\mathbf{C}))$ のザリスキー像と一致するから，ひとまず $m = 1$ とする．

定理 2.1 (Bloch・落合の定理) (i) $h^0(V, \Omega_V^1) = \dim_{\mathbf{C}} H^0(V, \Omega_V^1) > n$ ならば，f は代数的に退化している．

(ii) V をアーベル多様体 A とすると，整正則曲線 $f : \mathbf{C} \to A$ に対し $X_0(f)$ はアーベル部分多様体の平行移動になる．

f は非定写像とする．この証明を解説する．簡単にするため $n=1$ とする．一次独立な $\eta_j \in H^0(V, \Omega^1_V), j=1,2$ がある．

$$f^*\eta_j = \zeta_j(z)dz$$

とおく．$\psi = \frac{\eta_1}{\eta_2} \in \mathbf{C}(V)$ は超越基底である．$f^*\psi = \zeta_1/\zeta_2$ であるから，第一主要定理を使って

$$T(r, f^*\psi) = T(r, \zeta_1/\zeta_2) \leq T(r, \zeta_1) + T(r, \zeta_2) + O(1).$$

ζ_j は正則関数であるから，$T(r, \zeta_j) = m(r, \zeta_j)$. 従って次のような評価があれば，矛盾を得ることになる．

補題 2.2 (微分補題) 任意の $0 < \delta < 1$ に対し

$$m(r, \eta_j) \leq \delta \log r + O(\log^+ T_f(r, f^*\psi))||_{E(\delta)}. \tag{2.3}$$

ここで，"$||_{E(\delta)}$" とは $E(\delta) \subset \mathbf{R}^+$ は測度有限なボレル集合で，不等式は $r \notin E(\delta)$ に対し成立することを意味する．

(2.3) の右辺を "小項 (small term)" と呼び，$S_f(r)$ と記す．

この補題の証明は，概略次のようなものである．V 上にエルミート計量型式 Ω を取る．定数 $c>0$ があり，$|\eta_j|^2 \leq \pi c \Omega$.

$$\begin{aligned} m(r, \eta_j) &= \int_{|z|=r} \log^+ |\eta_j(z)| \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \frac{1}{2} \int_{|z|=r} \log^+ |\eta_j(z)|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \\ &\leq \frac{1}{2} \log^+ \left(\int_{|z|=r} |\eta_j(z)|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \log^+ \left(\int_1^r \frac{dt}{t} \int_{|z|<t} |\eta_j(z)|^2 \frac{1}{\pi} r dr d\theta \right)^{(1+\delta)^2} + \delta \log r ||_{E(\delta)} \\ &\leq \frac{1}{2} \log^+ \left(\int_1^r \frac{dt}{t} \int_{|z|<t} c f^*\Omega \right)^{(1+\delta)^2} + \delta \log r ||_{E(\delta)} \\ &\leq 2 \log T_f(r, \Omega) + 2 \log^+ c + \delta \log r ||_{E(\delta)}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

一方，清水・Ahlfors の定理より $T_f(r, \Omega) \sim T(r, f^*\psi)$ であるから，(2.3) を得る．

さて Picard の定理を考える．$D = \{0, 1, \infty\} \subset \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ とおく．

定理 2.5 (Piard の定理) 任意の $f : \mathbf{C} \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \setminus D$ は，定写像である．

今度は，$\omega_1 = dw/w, \omega_2 = dw/(w-1) \in H^0(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \Omega^1_{\mathbf{P}^1(\mathbf{C})}(\log D))$ が一次独立なので，

$$h^0(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \Omega^1_{\mathbf{P}^1(\mathbf{C})}(\log D)) > 1.$$

$f^*(\omega_1/\omega_2) = 1 - 1/f(z)$．従って $f^*\omega_j = \xi_j(z)dz$ とおいて，次が分かれば Picard の定理の証明は，$n = 1$ のときの Bloch・落合の定理の証明と同じである．

$$m(r, \xi_1) = m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = S_f(r).$$

これは，**Nevanlinna の対数微分の補題**に他ならない．いずれも，一意化定理にはよらない証明であることに注意されたい．

$H_j, 1 \leq j \leq q$ を $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ の相異なる超平面とし，$D = \sum_j H_j$ とおく．

$$h^0(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}), \Omega^1_{\mathbf{P}^n(\mathbf{C})}(\log D)) = q - 1.$$

定理 2.6 (Borel の定理) $h^0(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}), \Omega^1_{\mathbf{P}^n(\mathbf{C})}(\log D)) > n$, つまり $q \geq n+2$ ならば，任意の $f : \mathbf{C} \to \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus D$ は代数的に退化する．

対数微分を導入することにより，結局 Bloch・落合の定理と Borel の定理は同じことを言っていることになる．

一般次元 $\dim V \geq 1$ での微分補題 2.2 は，A. Bloch [3] が定理 2.1 を示す際に，証明できずに仮定したもので，後日落合 [21] により証明された．A. Bloch の与えた定理 2.1 の証明それ自体も，２次元の場合のスケッチ風のものであった．しかし，そのアイデアの豊かさには驚くべきものがある．対数微分の場合は [9] による．

現在次の定理が証明されている．

定理 2.7 (対数的 Bloch・落合の定理 [9], [10], [16]) M をコンパクトケーラー多様体，D をその超曲面とする．$h^0(M, \Omega^1_M(\log D)) > \dim M$ ならば，任意の $f : \mathbf{C} \to M \setminus D$ の像は，M の真解析的部分集合に含まれる．

対数的 Bloch・落合の定理の応用を述べる．相異なる超曲面 $D_j \subset V, 1 \leq j \leq l$ が**一般の位置**にあるとは，相異なる任意の k 個の共通部分 $D_{j_1} \cap \cdots \cap D_{j_k}$ が純 $n-k$ 次元を持つこととする．$k > n$ ならば空集合である．

$\mathrm{NS}(V)$ で Neron-Severi 群を表す．$L(D_j), 1 \leq j \leq l$ で生成される部分群の階数を $\mathrm{rank}_{\mathbf{Z}}\{D_j\}_{j=1}^l$ と記す．

定理 2.8 ([16]) $D_j \subset V, 1 \leq j \leq l$ は一般の位置にある豊富超曲面とする．

(i) $l > n(\mathrm{rank}_{\mathbf{Z}} \mathrm{NS}(V) + 1)$ ならば，$V \setminus \bigcup_{i=1}^l D_i$ は完備小林双曲的で，V に双曲的に埋め込まれている．

(ii) $X \subset \mathbf{P}^m(\mathbf{C})$ を既約部分多様体とする．$D_j, 1 \leqq i \leqq l$ は超曲面切断であるとする．$l > 2\dim X$ ならば $X \setminus \bigcup_{j=1}^l D_j$ は完備小林双曲的で，X に双曲的に埋め込まれている．

(iii) $f : \mathbf{C} \to V$ を整正則曲線で，各 D_j に対し $f(\mathbf{C}) \subset D_j$ であるか，$f(\mathbf{C}) \cap D_j = \emptyset$ が成立しているとする．$l > n$ と仮定する．すると $f(\mathbf{C})$ は，次の次元評価をみたす部分多様体 $W \subset V$ に含まれる．

$$\dim W \leqq \frac{n}{l-n} \mathrm{rank}_{\mathbf{Z}} \, \mathrm{NS}(M).$$

特に，$V = \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ ならば

$$\dim W \leqq \frac{n}{l-n}.$$

対数的 Bloch・落合の定理 2.7 と定理 2.8 には，Diophantine 類似がある．

定理 2.9 (**Faltings** [8]-**Vojta** [29]) F を有限次代数体とし，V, D は F 上定義されているとする．S を F の素点からなる有限集合で，全ての無限素点を含むものとする．$h^0(V, \Omega^1_V(\log D) > n$ を仮定する．W を (D, S)-整数点集合とすると，W は V の真代数的部分集合に含まれる．

定理 2.10 ([16]) $D_j \subset V, 1 \leq j \leq l$ は F 上定義された一般の位置にある豊富超曲面とする．

(i) $l > m(\mathrm{rank}_{\mathbf{Z}} \, \mathrm{NS}(V) + 1)$ ならば，任意の $(\sum_{j=1}^{l} D_j, S)$-整数点集合 $(\subset V(k) \setminus D)$ は有限である．

(ii) $X \subset \mathbf{P}^m_k$ を既約部分多様体とする．$D_j, 1 \leqq i \leqq l$ は超曲面切断であるとする．$l > 2 \dim X$ ならば $X(k) \setminus \sum D_j$ の任意の $(\sum_{j=1}^{l} D_j, S)$-整数点集合は有限である．

(iii) $A \subset V(k)$ は，各 D_j に対し $A \subset D_j$ であるか，$A \cap D_j = \emptyset$ で A は $(\sum_{D_j \not\supset A} D_j, S)$-整数点集合である．$l > n$ と仮定する．すると A 次の次元評価をみたす部分多様体 $W \subset V$ に含まれる．

$$\dim W \leqq \frac{n}{l-n} \mathrm{rank}_{\mathbf{Z}} \, \mathrm{NS}(V).$$

特に，$V = \mathbf{P}^n_k$ ならば $\dim W \leqq \frac{n}{l-n}$; $l > 2n$ ならば，$\dim W = 0$，つまり A は有限集合である．

補足． 微分補題 2.2 の証明で，(2.4) の計算をみると，解析性はあまり使っていない．実際概複素構造に関する擬正則写像に対して成立する．M をコンパクト概複素多様体とし，Ω をその上のエルミート計量型式とする．擬正則曲線 $f : \mathbf{C} \to M$ に対し，位数関数を次で定義する．

$$T_f(r, \Omega) = \int_1^r \frac{dt}{t} \int_{\|z\|<t} f^* \Omega.$$

M 上の任意の連続 1 型式 η に対し，

$$f^* \eta = \zeta_1(z) dz + \zeta_2(z) d\bar{z}$$

とおく．

補題 2.11 上述の記号のもとで，次が成立する．

$$m(r, \zeta_j) = S_f(r).$$

何かに使えないか？

3 対数ジェット微分の補題と第二主要定理

前節でみたように,（対数）微分の補題は値分布論で本質的である．特に定義域が $\mathbf{C}^m (m > 1)$ の場合，その証明はかなり長い評価の末に得られるものだった．最近，H.L. Selberg (1941) のアイデアにもとづくかなり簡約化されたものを得たので紹介したい．ひとまず，$\mathbf{C}^m$ 上の有理型関数 f を考える．

$$\|df\| = \left(\sum_{j=1}^{m} \left| \frac{\partial f}{\partial z_j} \right|^2 \right)^{1/2}$$

とおく．

補題 3.1 (**A.L. Vitter** [27], **Biancofiore-Stoll** [2])

$$m\left(r, \frac{\|df\|}{|f|}\right) = S_f(r).$$

証明 $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ 上の特異計量型式

$$\Psi = \frac{1}{|w|^2(1 + |\log|w||^2)} \frac{i}{2\pi} dw \wedge d\bar{w}$$

を考える．

$$\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{C})} \Psi = \pi.$$

$$f^*\Psi \wedge \alpha^{m-1} = \frac{1}{m} \frac{\|df\|^2}{|f|^2(1 + |\log|f||)^2} \alpha^m.$$

である．

$$\mu(r) = \int_1^r \frac{dt}{t^{2m-1}} \int_{\|z\|<t} f^*\Psi \wedge \alpha^{m-1}$$

とおく．Fubini の定理より

$$\begin{aligned} \mu(r) &= \int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{C})} \int_1^r \frac{dt}{t^{2m-1}} \int_{\{\|z\|<t\} \cap (f-w)_0} \alpha^{m-1} \Psi(w) \\ &\leq \int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{C})} N(r, (f-w)_0) \Psi(w). \end{aligned}$$

ネヴァンリンナ不等式 (定理 1.8) から,

$$\mu(r) \leq \int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{C})} (T(r,f)+C)\Psi(w) = \pi T(r,f) + C\pi. \tag{3.2}$$

一方,

$$\frac{\|df\|^2}{|f|^2}\alpha^m = m(1+|\log|f||^2) f^*\Psi \wedge \alpha^{m-1}.$$

これと (3.2) より,

$$m\left(r, \frac{\|f\|}{|f|}\right) = S_f(r)$$

が, ちょっとした計算で従う. **証了**

V を n 次元複素射影代数的多様体, D をその超曲面とする. $\mathcal{J}_k(V, \log D)$ で D に沿う対数的 k-ジェットの層とする ([11]). D が正規交叉ならば, 対数的 k-ジェット空間 $J_k(V, \log D)$ の切断の芽の層になっている. 一般に $J_k(V, \log D)$ の正則有理関数 ϕ を k-ジェット微分と呼ぶ. 有理型写像 $f : \mathbf{C}^m \to V$ に対し,

$$f^*\phi = \sum \xi_{i_1 h_1 \ldots i_m h_m} (d^{i_1} z_1)^{h_1} \cdots (d^{i_m} z_m)^{h_m}$$

と係数関数を決める.

補題 3.3 (対数ジェット微分の補題) $m(r, \xi_{i_1 h_1 \ldots i_m h_m}) = S_f(r)$.

以下の結果の証明では, 解析的にはこの対数ジェット微分の補題 3.3 が本質的である.

定理 3.4 (i) (**Siu-Yeung** [24]) A をアーベル多様体, D をその豊富超曲面とする. このとき $f : \mathbf{C} \to A \setminus D$ は定写像である.

(ii) ([12]) A を準アーベル多様体, D をその超曲面で $\{a \in A; a + D = D\}$ は有限とする. このとき $f : \mathbf{C} \to A \setminus D$ の像は準アーベル部分多様体の平行移動 W で, $W \cap D = \emptyset$ であるものに含まれる.

Faltings と Vojta は, Siegel の楕円曲線の整数点に関する定理の拡張として次のことを証明した. この類似については, Diophantine 近似が先行した（初めての場合？）.

定理 3.5 F を有限次代数体とする. 以下 F 上で考える.

(i) (**Faltings** [7]) A をアーベル多様体, D をその豊富超曲面とする. このとき (D, S)-整数点集合は有限である.

(ii) (**Vojta** [29]) A を準アーベル多様体, D をその超曲面で $\{a \in A; a + D = D\}$ は有限とする. このとき (D, S)-整数点集合は準アーベル部分多様体の平行移動 W で, $W \cap D = \emptyset$ であるものに含まれる.

アーベル多様体や準アーベル多様体（準トーラス）A では，そのジェット空間が，$J_k(A) \cong A \times \mathbf{C}^n$ $(n = \dim A)$ と大域的に自明になるので解析しやすくなる．以下定理 3.4 の定量版である第二主要定理を与える．

定義により，A のもつ群完全列を次のようにおく．

$$0 \to (\mathbf{C}^*)^t \to A \to A_0 \to 0.$$

A_0 はアーベル多様体である．$(\mathbf{C}^*)^t \hookrightarrow (\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))^t$ とコンパクト化をとり A のコンパクト化 $\bar{A}$ を得る．$\partial A = \bar{A} \setminus A = \cup_{i=1}^t B_i$ を境界因子の非特異点集合–特異点集合の非特異点集合–$\cdots$ ととる階層分解とする．D を A の代数的超曲面で $\bar{A}$ 上に $\bar{D}$ と拡張しておく．$\partial A + \bar{D}$ が一般の位置にある条件を考える．

3.6 **条件**　任意の既約成分 $Z \subset B_t$ に対し，$Z \not\subset \bar{D}$.

自然数 k を取る．整正則曲線 $f : \mathbf{C} \to A$ $(f(\mathbf{C}) \not\subset D)$ に対し，$f^*D = \sum_\nu m_\nu z_\nu$ (z_ν は相異なる) とするとき，次のように定める．

$$\begin{aligned}
&(f^*D)_k = \textstyle\sum_\nu \min\{k, m_\nu\} z_\nu, \quad (f^*D)^k = \sum_\nu (m_\nu - k)^+ z_\nu, \\
&N_k(r, f^*D) = N(r, (f^*D)_k) \quad (\textbf{打ち切り個数関数}), \\
&N^k(r, f^*D) = N(r, (f^*D)^k) \quad (\textbf{重複度関数}).
\end{aligned}$$

次が成立する．

$$\begin{aligned}
N(r, f^*D) &= N_k(r, f^*D) + N^k(r, f^*D), \\
T_f(r, L(\bar{D})) &= m_f(r, \bar{D}) + N(r, f^*D) + O(1).
\end{aligned}$$

定理 3.7 (**第二主要定理** [20])　A は，準アーベル多様体（準トーラスでもよい）．D は条件 *3.6* を満たす代数的超曲面とする．任意の整正則曲線 $f : \mathbf{C} \to A$ に対し，その位数 ρ_f が有限な場合は自然数 $k = k(\rho_f, D)$，$\rho_f = \infty$ の場合は $k = k(f, D)$ が存在して，

$$T_f(r, L(\bar{D})) \le N_k(r, f^*D) + S_f(r). \tag{3.8}$$

同値な式であるが，$f(z)$ の D に近づく近似（あまり近づかない）の評価として，

$$m_f(r, \bar{D}) + N^k(r, f^*D) = S_f(r). \tag{3.9}$$

証明の要点は，対数ジェット微分の補題 3.3 と以下に述べる**ジェット射影法**である．$\bar{A}$ 上の ∂A に沿う対数ジェット空間 $J_k(\bar{A}, \log \bar{D})$ は $\bar{A} \times \mathbf{C}^{nk}$ と同型になるので，ジェット射影

$$I_k : J_k(\bar{A}, \log \bar{D}) \cong \bar{A} \times \mathbf{C}^{nk} \to \mathbf{C}^{nk}$$

が取れる．$f(z)$ が $\bar{D}$ をあまり近似しないことが定量的に分かればよいが，このままでは難しい．そこで，ジェット空間まで持ち上げ $X_k(f)$ と $J_k(D)$ をジェット射影をして分離するのがアイデアである．k を大きくとると

$$I_k(X_k(f)) \cap I_k(J_k(\bar{D}, \log D \cap \partial A)) \neq I_k(X_k(f)). \tag{3.10}$$

A がアーベル多様体の場合，Siu-Yeung は，(3.10) の交叉の位数を D の Chern 数で評価し，$k = k(c_1(D)^n)$ という依存性を示した．D に任意の特異点を許し，剰余項を $S_f(r)$ という量で抑える為には，これが最良であることが例で分かる．しかし，この剰余項を $\epsilon T_f(r, L)$ $(L > 0)$ と緩めると，打ち切り位数 k を下げられる．実際，山ノ井は次を示している．

定理 3.11 (**山ノ井** [31]) A をアーベル多様体，D をその豊富超曲面，$f : \mathbf{C} \to A$ を代数的非退化な整正則曲線とすると，

$$T_f(r, L(D)) \leq N_1(r, f^*D) + \epsilon T_f(r, L(D))||_{E(\epsilon)}.$$

このような強い結果が得られるのは，f のジェット像 $X_k(f)$ の構造が単純であることが効いている．次の構造定理が成立する．

定理 3.12 [17] A を n 次元準アーベル多様体とする．$f : \mathbf{C} \to A$ を整正則曲線とし，$X_k(f)$ を $J_k(f)(\mathbf{C})$ の $J_k(A) \cong A \times \mathbf{C}^{nk}$ 内でのザリスキー閉包とする．

(i) $\rho_f < \infty$ ならば，準アーベル部分多様体 $B \subset A$，$a \in A$ そして部分多様体 $W_k \subset \mathbf{C}^{nk}$ が存在して，$X_k(f) = (B + a) \times W_k$ が成立する．

(ii) A が単純アーベル多様体ならば，部分多様体 $W_k \subset \mathbf{C}^{nk}$ があって，$X_k(f) = A \times W_k$ が存在する．

一般には，この様な直積構造になっていないことが例をもって示される．しかしそれでも，$X_k(f)$ は扱いやすい形状をしていることが分かる．

定理 3.7 や定理 3.11 の様に，打ち切り個数関数 $N_k(r, \bullet)$ を用いた Diophantine 類似の評価式は興味深い (A. Buium)．これが，イロハ予想 (abc-Conjecture) につながる．準アーベル多様体上では，その関数体類似が成立することが分かる (A. Buium [5] [6], [18])．

小林予想と Lang 予想の関連で下記の結果も値分布と Diophantine 近似の応用で得られた．

城崎 ([23]) に従い，次のようにおく．$d, e \in \mathbf{N}$ は互いに素で次をみたす．

$$d > 2e + 8.$$

二変数同次多項式 $P(w_0, w_1)$ を

$$P(w_0, w_1) = w_0^d + w_1^d + w_0^e w_1^{d-e}$$

と定め，帰納的に

$$P_1(w_0, w_1) = P(w_0, w_1),$$
$$P_n(w_0, w_1, \ldots, w_n) = P_{n-1}(P(w_0, w_1), \ldots, P(w_{n-1}, w_n)),$$
$$n = 2, 3, \ldots,$$

と定める．P_n は次数 d^n の同次多項式である．$e \geqq 2$ とすると，

(3.13) $$X = \{P_n(w_0, w_1, \ldots, w_n) = 0\} \subset \mathbf{P}^n_{\mathbf{Q}}$$

は小林双曲的である（城崎 [23]）．

定理 3.14 ([13]) X を (3.13) で，$e \geqq 2$ として定義する．すると，任意の有限次代数体 F に対し有理点集合 $X(F)$ は有限である．

4 基本予想

(1) 正則曲線． V を n 次元複素射影代数的多様体とし，D をその超曲面とする．D は単純正規交叉のみをもつとする（たぶん妥当な仮定）．$f : \mathbf{C} \to V$ を整正則曲線とする．$L \to V$ を直線束とし，$|L|$ でその完備線形系を表す．f が L-非退化とは，任意の $E \in |L|$ に対し $f(\mathbf{C}) \not\subset E$ が成立することとする．

4.1 **(正則曲線の基本予想)** ある $k = k(n)$ が存在して，$(L(D) + K_V)$-非退化な整正則曲線 $f : \mathbf{C} \to V$ に対し，

$$T_f(r, L(\bar{D})) + T_f(r, K_V) \leq N_k(r, f^*D) + S_f(r),$$
$$m_f(r, \bar{D}) + N^k(r, f^*D) + T_f(r, K_V) = S_f(r).$$

この予想の Diophantine 類似は，次のように与えられる．

F を有限次代数体とする．その無限素点を全て含む素点の有限集合 S をとり，固定する．V, D は F 上で考える．$x \in V(x)$ に対し，$x \in V \setminus D$ の D への接近を $v \in S$ で測り和をとったものを $m(x, D)$ と表す．$v \notin S$ に関して v-進距離で D への接近を測り和をとったものを $N(x, D)$，その v-進位数を k で打ち切り測ったものを $N_k(x, D)$,

$$N^k(x, D) = N(x, D) - N_k(r, D)$$

とおく．直線束 $L \to V$ に関する $x \in V(F)$ の高さ関数を $\mathrm{h}(x, L)$ と書く．

正則曲線の基本予想の類似は次のように述べられる．

4.2 **(Diophantine 近似類似基本予想，多変数イロハ予想)** 上述のことを仮定する．さらに，豊富直線束 $L_0 \to V$ を一つ固定する．このとき，任意の $\epsilon > 0$ に対し真部分多様体 $E(\epsilon) \subset V_F$ が存在して，$x \in V(F) \setminus E(\epsilon)$ に対し，

(4.3) $$\mathrm{h}(x, L(D)) + \mathrm{h}(x, K_V) \leq N_k(x, D) + \epsilon \mathrm{h}(x, L_0),$$
$$m(x, D) + N^k(x, D) + \mathrm{h}(x, K_V) \leq \epsilon \mathrm{h}(x, L_0).$$

$V = \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$ の場合は, $D = \{0, -1, \infty\}$ ととると，次のイロハ予想 (Masser-Oesterlé) になる．

4.4 **(イロハ予想 (abc-conjecture))** $a, b, c \in \mathbf{Z}$ を互いに素で

$$a + b + c = 0$$

を満たすとする．任意の $\epsilon > 0$ に対し ϵ のみに依る正定数 $C(\epsilon)$ が存在して，次が成立する．

$$(\max\{|a|, |b|, |c|\})^{3-2-\epsilon} \leq C(\epsilon) \prod_{p>0,\, 素, p|(abc)} p. \tag{4.5}$$

(4.5) の左辺の指数について $3 = \deg D$, $-2 = \deg K_{\mathbf{P}^1}$, 右辺での打ち切り位数は $k = 1$ である．(4.5) の log をとれば，(4.3) になる．

参考文献

[1] Ahlfors, L.V., Beiträge zur Theorie der meromorphen Funktionen, 7e Congr. Math. Scand. Oslo 1929, pp. 84–88, Oslo, 1930.

[2] Biancofiore, A. and Stoll, W., Another proof of the lemma of the logarithmic derivative in several complex variables, Ann. Math. Studies **100**, pp. 29–45, Princeton Univ. Press, 1981.

[3] Bloch, A., Sur les systèmes de fonctions uniformes satisfaisant à l'équation d'une variété algébrique dont l'irrégularité dépasse la dimension, J. Math. Pures Appl. **5** (1926), 19–66.

[4] Bott, R. and Chern, S.-S., Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeros of their holomorphic sections, Acta Math. **114** (1965), 71–112.

[5] Buium, A., The abc theorem of abelian varieties, Intern. Math. Res. Notices **5** (1994), 219-233.

[6] Buium, A., Intersection Multiplicities on abelian varieties, Math. Ann. **310** (1998), 653-659.

[7] Faltings, G., Diophantine approximation on abelian varieties, Ann. Math. **133** (1991), 549–576.

[8] Faltings, G., The general case of Lang's conjecture, Symposium in Algebraic Geometry, Barsoti, eds., pp. 175–182, Acad. Press, 1994.

[9] Noguchi, J., Holomorphic curves in algebraic varieties, Hiroshima Math. J. **7** (1977), 833–853.

[10] Noguchi, J., Lemma on logarithmic derivatives and holomorphic curves in algebraic varieties. Nagoya Math. J. **83** (1981), 213–233.

[11] Noguchi, J., Logarithmic jet spaces and extensions of de Franchis' theorem, Contributions to Several Complex Variables, pp. 227–249, Aspects Math. No. **9**, Vieweg, 1986.

[12] Noguchi, J., On holomorphic curves in semi-Abelian varieties, Math. Z. **228** (1998), 713-721.

[13] Noguchi, J., An arithmetic property of Shirosaki's hyperbolic projective hypersurface, preprint, UTMS 2002-10, to appear in Forum Math.

[14] 野口潤次郎，ネヴァンリンア理論とディオファントス近似，共立出版，2003 年出版予定.

[15] Noguchi, J. and Ochiai, T., Geometric Function Theory in Several Complex Variables, Japanese edition, Iwanami, Tokyo, 1984; English Translation, Transl. Math. Mono. **80**, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1990.

[16] Noguchi, J. and Winkelmann, J., Holomorphic curves and integral points off divisors, Math. Z. **239** (2002), 593–610.

[17] Noguchi, J. and Winkelmann, J., A note on jets of entire curves in semi-abelian varieties, preprint UTMS 2002-25, 2002, to appear in Math. Z.

[18] Noguchi, J. and Winkelmann, J., Bounds for curves in abelian varieties, preprint UTMS 2002-21.

[19] Noguchi, J., Winkelmann, J., and Yamanoi, K., The value distribution of holomorphic curves into semi-Abelian varieties, C.R. Acad. Sci. Paris t. **331** (2000), Serié I, 235-240.

[20] Noguchi, J.; Winkelmann, J.; Yamanoi, K.: The second main theorem for holomorphic curves into semi-Abelian varieties, Acta Math. **188** no. 1 (2002), 129-161.

[21] Ochiai, T., On holomorphic curves in algebraic varieties with ample irregularity, Invent. Math. **43** (1977), 83–96.

[22] Shimizu, T., On the theory of meromorphic functions, Japan. J. Math. **6** (1929), 119–171.

[23] Shirosaki, M., On some hypersurfaces and holomorphic mappings, Kodai Math. J. **21** (1998), 29–34.

[24] Siu, Y.-T. and Yeung, S.-K., A generalized Bloch's theorem and the hyperbolicity of the complement of an ample divisor in an Abelian variety. Math. Ann. **306** (1996), 743-758.

[25] Stoll, W., Die beiden Hauptsätze der Wertverteilungstheorie bei Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen (II), Acta Math. **92** (1954), 55–169.

[26] Stoll, W., Value Distribution of Holomorphic Maps into Compact Complex Manifolds, Lecture Notes in Math. **135**, Springer-Verlag, 1970.

[27] Vitter, A.L., The lemma of the logarithmic derivative in several complex variables, Duke Math. J. **44** (1977), 89–104.

[28] Vojta, P., Diophantine Approximations and Value Distribution Theory, Lecture Notes in Math. **1239**, Springer-Verlag, 1987.

[29] Vojta, P., Integral points on subvarieties of semiabelian varieties, I–II; I, Invent. Math. **126** (1996), 133–181; II, Amer. J. Math. **121** (1999), 283–313.

[30] Wu, H., Remarks on the first main theorem in equidistribution theory, I–IV; I, J. Diff. Geom. **2** (1968), 197–202; II, J. Diff. Geom. **2** (1968), 369–384; III, J. Diff. Geom. **3** (1969), 83–94; VI, J. Diff. Geom. **3** (1969), 433–446.

[31] Yamanoi, K., Holomorphic curves in Abelian varieties and intersections with higher codimensional subvarieties, preprint, 2001.