On the distance from a matrix to nilpotents* †

森 迪也 ‡ (東大数理/理研 iTHEMS)

概 要

零でない $n \times n$ 直交射影行列全体と $n \times n$ ベキ零行列全体の距離は $(2\cos\frac{\pi}{n+2})^{-1}$ である．

1 はじめに

この講演は [9] に基づく．（可分）複素 Hilbert 空間 H, K に対し，H から K への有界線形作用素全体を $\mathcal{B}(H,K)$ と表す．$A \in \mathcal{B}(H,K)$ に対し，$\|A\| \coloneqq \sup_{h\in H,\, \|h\|\le 1} \|Ah\|$ と定めると，$\mathcal{B}(H,K)$ はノルム $\|\cdot\|$ について Banach 空間をなすのであった．このノルムは距離 $d(A,B) \coloneqq \|A-B\|$ $(A, B \in \mathcal{B}(H,K))$ を定め，この距離から $\mathcal{B}(H,K)$ の位相（ノルム位相）が定まる．以下，主として $H = K$ の場合を考える．$\mathcal{B}(H,H)$ を $\mathcal{B}(H)$ と表す．$\mathcal{B}(H)$ は合成を積として Banach 環をなす（$\|AB\| \le \|A\|\|B\|$ が成り立つ）．$\mathcal{B}(H)$ の単位元は H 上の恒等作用素である．これを $I_{\mathcal{B}(H)}$ あるいは I と表すことにする．$n = \dim H < \infty$ のとき，H と $\mathbb{C}^n$ の（線形等距離）同型写像をひとつとれば，通常の方法により，$\mathcal{B}(H)$ は $n \times n$ 複素行列全体のなす空間 $\mathcal{M}_n$ と同一視される．

作用素 $N \in \mathcal{B}(H)$ に対し，ある正の整数 k が存在して $N^k = 0$ が成り立つとき，N は**ベキ零**（nilpotent）であるという．$\mathcal{B}(H)$ のベキ零な元全体の集合を $\mathcal{N}(H)$ と表す．$n \times n$ ベキ零行列全体を $\mathcal{N}_n$ と表す．$A \in \mathcal{B}(H)$ に対し，A と $\mathcal{N}(H)$ の距離 $\inf_{N\in\mathcal{N}(H)} \|A - N\|$ を $\nu(A)$ と表すことにする．線形代数で学ぶように，$N \in \mathcal{N}_n$ であることは $N^n = 0$ であることと同値である．したがって，$\mathcal{N}_n$ は $\mathcal{M}_n$ の閉集合である．これよりとくに，$A \in \mathcal{M}_n$ に対し，$\nu(A) = 0$ であることは $A \in \mathcal{N}_n$ であることと同値である．

いっぽう，$\dim H = \infty$ の場合は，ベキ零作用素全体の集合は閉集合ではない．作用素 $A \in \mathcal{B}(H)$ に対し，スペクトル $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - A \text{ は可逆でない}\}$ を $\sigma(A)$ で表す．$A \in \mathcal{B}(H)$ のスペクトル $\sigma(A)$ が一点集合 $\{0\}$ であるとき，A は**準ベキ零**（quasinilpotent）であるという．Gelfand のスペクトル半径公式から，A が準ベキ零であることは $\|A^k\|^{1/k} \to 0$ $(k \to \infty)$ となることと同値である．とくに，ベキ零作用素は準ベキ零である．Paul Halmos の有名な 10 の問題 [5] の第 7 問は，任意の準ベキ零作用素は $\mathcal{N}(H)$ の閉包に属すか，という問題である．この問題は肯定的に解かれており，より強い以下の定理が知られている．

定理 1 (Apostol, Foiaș, Voiculescu [1])**.** $A \in \mathcal{B}(H)$ が $\mathcal{N}(H)$ の閉包に属する（すなわち $\nu(A) = 0$ となる）ためには次の 3 条件が成り立つことが必要十分である．

1. A のスペクトルは 0 を含み，連結である．

---

*2023 年度 作用素論・作用素環論研究集会 講演集原稿

†講演者は科研費（課題番号 22K13934）による助成を受けている．

‡mmori@ms.u-tokyo.ac.jp

2. A の本質的スペクトルは 0 を含み，連結である．

3. $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し，$\lambda I - A$ が semi-Fredholm ならば $\lambda I - A$ の Fredholm index は 0 である．

ベキ零作用素への理解を（「外側」から）もっと深めるために，ν の具体的な値をさらに調べよう，と考えることは自然な発想であろう．ところが，それはどうやら易しくないらしく，ν の具体的な値が知られている作用素は，ν がゼロの場合（上記）を除き，H が有限次元でも無限次元でもかなり限定的である．ν の値に関し知られているいくつかの事実を以下にまとめる．

- 任意の $A, B \in \mathcal{B}(H)$ と $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し，$\nu(\lambda A) = |\lambda|\nu(A)$，$\nu(A) = \nu(A^*)$, $|\nu(A) - \nu(B)| \leq \|A - B\|$ である（定義より明らか）．
- $U \in \mathcal{B}(H)$ が等距離作用素（$U^*U = I$）ならば，$\nu(U) = 1$ である．($\nu(U) \leq 1$ は明らか．$N \in \mathcal{N}(H)$ ならば，$h \in \ker N (\neq \{0\})$ に対し $\|(U - N)h\| = \|Uh\| = \|h\|$ となるため，$\nu(U) \geq 1$ である．)
- （Apostol–Salinas [2, Theorem 3.5]）任意の $A \in \mathcal{B}(H)$ に対し，$\nu(A)$ は A のスペクトル半径以下である．

$P \in \mathcal{B}(H)$ が**射影**（projection）であるとは，$P = P^2 = P^*$ であることを指す．$\mathcal{B}(H)$ の射影全体の集合を $\mathcal{P}(H)$ と表す．また，$\mathcal{M}_n$ の射影全体の集合を $\mathcal{P}_n$ と表し，$\mathcal{P}_n$ の元で階数が m であるもの全体を $\mathcal{P}_{n,m}$ と表す．射影は基本的な作用素であるが，射影の場合に限っても ν の完全な理解は未だに得られていない．先行研究をまとめてみよう．

- 射影に対する ν の値の評価を与えた最も古い研究はおそらく [6] である．この論文で著者の Hedlund は，零でない射影全体の集合と $\mathcal{N}(H)$ の距離について "the determination of the precise value (中略) seems difficult, even if H is finite-dimensional" と述べている．
- （Herrero [7, Corollary 9]）$\dim H = \infty$ のとき，$P \in \mathcal{P}(H) \setminus \{0\}$ の核が無限次元なら $\nu(P) = 1/2$, 有限次元なら $\nu(P) = 1$ である．
- （MacDonald [8, Theorem 1]）$P \in \mathcal{P}_{n,1}$ ならば，$\nu(P) = (2\cos\frac{\pi}{n+2})^{-1}$ である．
- （Cramer [4, Theorem 3.6]）$P \in \mathcal{P}_{n,n-1}$ ならば，$\nu(P) = (2\cos\frac{\pi}{\frac{n}{n-1}+2})^{-1}$ である．

MacDonald [8] は，任意の $P \in \mathcal{P}_n \setminus \{0\}$ に対し $\nu(P) \geq (2\cos\frac{\pi}{n+2})^{-1}$ が成り立つと予想した．本講演の主目的は，この予想に証明を与えることである．

なお，Cramer [4, Conjecture 5.1] は $P \in \mathcal{P}_{n,m}$ ならば $\nu(P) = (2\cos\frac{\pi}{\frac{n}{m}+2})^{-1}$ であることを予想しているが，$1 < m < n-1$ の場合これは未解決である．類似の予想は一般の II_1 型 von Neumann 因子環の設定においても考えられるが，その場合も正しいか，あるいは II_1 型因子環のとり方に依存するか，といった問題も考える価値がありそうだ．

2　主定理の証明

自己共役な有界作用素 $A, B \in \mathcal{B}(H)$ に対し，$B - A$ が正（半正定値）であるとき，$A \leq B$ と書く．$0 \leq A$ のとき，A の正の平方根を $A^{1/2}$ と表す．本節では，論文 [9] よりも自己完結な形で，次が成り立つことを示す．(Hilbert 空間論の初歩，特に continuous functional calculus や極分解，平方根の基本性質くらいまで知っていれば読めるはず．)

定理 2. $M \in \mathcal{M}_n$ とする．ある $P \in \mathcal{P}_n \setminus \{0\}$ について $PMP = M$ および $M^*M \geq P$ が成り立つならば，$\nu(M) \geq (2\cos\frac{\pi}{n+2})^{-1}$ である．

定理 2 の仮定は，M が $\begin{pmatrix} M_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$（$M_0 \in \mathcal{M}_m$, $1 \leq m \leq n$）という形の行列とユニタリ同値であり，かつ $M_0^*M_0 \geq I \in \mathcal{M}_m$ となることを意味している．特に，零でない正規行列でそのスペクトルが $\{0\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 1\}$ に含まれるものは，この仮定を満たす．したがって，この定理は MacDonald の予想を含む．

まず，よく知られたふたつの補題を用意しておく．

補題 1 (Douglas の補題)**.** $A \in \mathcal{B}(H, K)$, $B \in \mathcal{B}(H)$, $A^*A \leq B^*B$ ならば，ある $C \in \mathcal{B}(H, K)$ に対し $\|C\| \leq 1$ および $A = CB$ が成り立つ．

証明. $A^*A \leq B^*B$ より，各 $h \in H$ に対し

$$\|Ah\|^2 = \langle Ah, Ah \rangle = \langle A^*Ah, h \rangle \leq \langle B^*Bh, h \rangle = \langle Bh, Bh \rangle = \|Bh\|^2$$

が成り立つ．これより，B の像の各元 Bh を Ah へ送る写像を考えると，これは well-defined，線形，かつノルム 1 以下となることがわかる．その連続拡張で，B の像の直交補空間を 0 に送る写像を C とおけばよい.[1] □

補題 2. $A \in \mathcal{B}(H, K)$, $\|A\| \leq 1$ ならば，次の作用素はユニタリである：

$$U = \begin{pmatrix} (I_{\mathcal{B}(H)} - A^*A)^{1/2} & -A^* \\ A & (I_{\mathcal{B}(K)} - AA^*)^{1/2} \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(H \oplus K).$$

証明. U^*U の $(1,1)$ 成分および $(2,2)$ 成分が I となることは容易にわかる．任意の整数 $n \geq 1$ について $(I_{\mathcal{B}(H)} - A^*A)^n A^* = A^*(I_{\mathcal{B}(K)} - AA^*)^n$ であることが確かめられる．$[0,1]$ 上の関数 $t \mapsto \sqrt{t}$ の多項式近似を考えることで，$(I_{\mathcal{B}(H)} - A^*A)^{1/2}A^* = A^*(I_{\mathcal{B}(K)} - AA^*)^{1/2}$ を得る．ゆえに U^*U の $(1,2)$ 成分 $-(I_{\mathcal{B}(H)} - A^*A)^{1/2}A^* + A^*(I_{\mathcal{B}(K)} - AA^*)^{1/2}$ は 0 となる．同様に $(2,1)$ 成分も 0 である．以上から $U^*U = I_{\mathcal{B}(H \oplus K)}$ である．同様の議論から $UU^* = I_{\mathcal{B}(H \oplus K)}$ であることも示される． □

ν の値を調べるにあたり，Arveson の距離公式 [3] の一種として知られる次の定理が重要である．

定理 3 ([11, Lemma], [10, Theorem 1])**.** Hilbert 空間の直交分解 $H = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n$, $K = K_1 \oplus K_2 \oplus \cdots \oplus K_n$ と，作用素 $A \in \mathcal{B}(H, K)$ が与えられているとする．この分解を用い，

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad A_{ij} \in \mathcal{B}(H_j, K_i) \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

と表しておく．また，同じブロック分割について狭義上三角であるような $\mathcal{B}(H, K)$ の元の全体，つ

[1] 極分解の存在証明と同様の議論である．

まり $\begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ という形の作用素の全体を $\mathcal{T}$ と表すことにする．このとき，

$$\inf_{T\in\mathcal{T}}\|A-T\| = \max_{1\le k\le n}\left\|\begin{pmatrix} A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kk} \\ A_{k+1,1} & A_{k+1,2} & \cdots & A_{k+1,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nk} \end{pmatrix}\right\|$$

が成り立ち，またこの左辺の下限を達成する $\mathcal{T}$ の元が存在する．

証明．まず，$T\in\mathcal{T}$ に対し，$A-T = \begin{pmatrix} A_{11} & * & \cdots & * \\ A_{21} & A_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ と表せるので，

$$\inf_{T\in\mathcal{T}}\|A-T\| \ge \max_{1\le k\le n}\left\|\begin{pmatrix} A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kk} \\ A_{k+1,1} & A_{k+1,2} & \cdots & A_{k+1,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nk} \end{pmatrix}\right\|$$

は明らかである．以下，逆向きの不等式を示す．

$n=2$ の場合を考えよう．この場合，

$$\left\|\begin{pmatrix} A_{11} & B \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\right\| \le \max\left\{\left\|\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix}\right\|, \left\|\begin{pmatrix} A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\right\|\right\} \tag{1}$$

なる $B\in\mathcal{B}(H_2,K_1)$ をみつければよい．(1) の右辺が 0 の場合は $B=0$ とすればよい．そうでない場合は，全体に適当な正の数をかけることで，(1) の右辺が 1 の場合に帰着される．このとき，

$$1 \ge \left\|\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix}\right\|^2 = \left\|\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix}^*\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix}\right\| = \|A_{11}^*A_{11} + A_{21}^*A_{21}\|$$

より $A_{11}^*A_{11} + A_{21}^*A_{21} \le I_{\mathcal{B}(H_1)}$ である．ゆえに，$A_{11}^*A_{11} \le I_{\mathcal{B}(H_1)} - A_{21}^*A_{21}$ なので，Douglas の補題より，ある $C_1\in\mathcal{B}(H_1,K_1)$ に対し $\|C_1\|\le 1$ および $A_{11} = C_1(I_{\mathcal{B}(H_1)} - A_{21}^*A_{21})^{1/2}$ が成り立つ．同様に，

$$1 \ge \left\|\begin{pmatrix} A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\right\|^2 = \left\|\begin{pmatrix} A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^*\right\| = \|A_{21}A_{21}^* + A_{22}A_{22}^*\|$$

より $A_{21}A_{21}^* + A_{22}A_{22}^* \le I_{\mathcal{B}(K_2)}$ である．ゆえに $A_{22}A_{22}^* \le I_{\mathcal{B}(K_2)} - A_{21}A_{21}^*$ なので，Douglas の補題より，ある $C_2\in\mathcal{B}(K_2,H_2)$ に対し $\|C_2\|\le 1$ および $A_{22}^* = C_2(I_{\mathcal{B}(K_2)} - A_{21}A_{21}^*)^{1/2}$ が成り立つ．共役をとって $A_{22} = (I_{\mathcal{B}(K_2)} - A_{21}A_{21}^*)^{1/2}C_2^*$ を得る．

これらを用いて，

$$
\begin{aligned}
&\left\|\begin{pmatrix} A_{11} & -C_1A_{21}^*C_2^* \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\right\| \\
&= \left\|\begin{pmatrix} C_1(I_{\mathcal{B}(H_1)} - A_{21}^*A_{21})^{1/2} & -C_1A_{21}^*C_2^* \\ A_{21} & (I_{\mathcal{B}(K_2)} - A_{21}A_{21}^*)^{1/2}C_2^* \end{pmatrix}\right\| \\
&= \left\|\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{B}(K_2)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (I_{\mathcal{B}(H_1)} - A_{21}^*A_{21})^{1/2} & -A_{21}^* \\ A_{21} & (I_{\mathcal{B}(K_2)} - A_{21}A_{21}^*)^{1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{\mathcal{B}(H_1)} & 0 \\ 0 & C_2^* \end{pmatrix}\right\| \\
&\le \left\|\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{B}(K_2)} \end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix} (I_{\mathcal{B}(H_1)} - A_{21}^*A_{21})^{1/2} & -A_{21}^* \\ A_{21} & (I_{\mathcal{B}(K_2)} - A_{21}A_{21}^*)^{1/2} \end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix} I_{\mathcal{B}(H_1)} & 0 \\ 0 & C_2^* \end{pmatrix}\right\|
\end{aligned}
$$

を得る．ここで補題 2 より $\begin{pmatrix} (I_{\mathcal{B}(H_1)} - A_{21}^*A_{21})^{1/2} & -A_{21}^* \\ A_{21} & (I_{\mathcal{B}(K_2)} - A_{21}A_{21}^*)^{1/2} \end{pmatrix}$ はユニタリ，また $\|C_1\|, \|C_2\| \le 1$ だから，結局 $\left\|\begin{pmatrix} A_{11} & -C_1A_{21}^*C_2^* \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\right\| \le 1$ が成り立つ．以上から $B = -C_1A_{21}^*C_2^*$ とおけばよい．

$n \ge 3$ の場合は $n = 2$ の場合から容易に導かれる．詳細は読者に任せる． □

射影 $P \in \mathcal{P}(H)$ に対し，$P^\perp := I - P$ と定める．$\mathcal{P}_n$ の元からなる $n+1$ 個組 $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ で，$P_0 \le P_1 \le \cdots \le P_n$ および $P_k \in \mathcal{P}_{n,k}$（$0 \le k \le n$）を満たすものの全体を Π_n と表す．MacDonald [8] は次のタイプの命題の有用性を見出した．

命題 1. $A \in \mathcal{M}_n$ に対し次が成り立つ：

$$\nu(A) = \inf\{\max_{1\le k\le n} \|P_{k-1}^\perp AP_k\| \mid (P_0, P_1, \ldots, P_n) \in \Pi_n\}.$$

証明．$N \in \mathcal{M}_n$ がベキ零であるためには，ある正規直交基底 $e_1, e_2, \ldots, e_n$ に関し N が狭義上三角に表されることが必要十分である．正規直交基底 $e_1, e_2, \ldots, e_n$ に $\mathrm{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ への射影 P_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ が対応すると考えれば，定理 3 より等式が得られる． □

これ以下の議論が講演者によるアイデアである．

補題 3. $X, Y \in \mathcal{M}_n$ に対し，$\|XY\| = \|(X^*X)^{1/2}(YY^*)^{1/2}\|$ が成り立つ．

証明．X, Y の極分解 $X = V(X^*X)^{1/2}$, $Y = (YY^*)^{1/2}W$ を考えると，U, V は部分等距離作用素で，$XY = V(X^*X)^{1/2}(YY^*)^{1/2}W$, $(X^*X)^{1/2}(YY^*)^{1/2} = V^*XYW^*$ が成り立つ．$\|U\|, \|V\| \le 1$ より所望の等式を得る． □

$0 \le A \in \mathcal{M}_n$ に対し，$n\times n$ 行列の $n+1$ 個組 $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ で，$0 = A_0 \le A_1 \le \cdots \le A_n = A$ および $\mathrm{rank}\,(A_k - A_{k-1}) \le 1$（$1 \le k \le n$）を満たすものの全体を $\Pi(A)$ と表す．

補題 4. $0 \le A \in \mathcal{M}_n$ に対し次が成り立つ：

$$\nu(A) = \alpha := \inf\{\max_{1\le k\le n} \|(A - A_{k-1})^{1/2}A_k^{1/2}\| \mid (A_0, A_1, \ldots, A_n) \in \Pi(A)\}.$$

証明．$(P_0, P_1, \ldots, P_n) \in \Pi_n$ とする．各 k に対し，$A_k = A^{1/2}P_kA^{1/2}$ と定める．補題 3 で $X = P_{k-1}^\perp A^{1/2}$, $Y = A^{1/2}P_k$ とおいて，$\|P_{k-1}^\perp AP_k\| = \|(A - A_{k-1})^{1/2}A_k^{1/2}\|$ を得る．容易にわかるように $(A_0, A_1, \ldots, A_n) \in \Pi(A)$ であり，よって $\alpha \le \nu(A)$ である．

逆向きの不等式を示そう．$(A_0, A_1, \ldots, A_n) \in \Pi(A)$ とする．$\varepsilon > 0$ とする．各 k に対し，階数 1 の行列 $C_k \geq 0$ であって，$A_k - A_{k-1}$ と距離が近く，かつ $B = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$ が階数 n であるようなものをとる．(後者の条件を満たすためには，各 C_k の像に属する零でないベクトルをとってきたときに，それらが 1 次独立となればよい．これを満たす C_k の存在は容易にわかる．) C_k と $A_k - A_{k-1}$ の距離が十分近ければ，$B_0 = 0$, $B_k = C_1 + C_2 + \cdots + C_k$ ($k \in \{1, \ldots, n\}$) について $\|B - A\| < \varepsilon$ および $\|(B - B_{k-1})^{1/2} B_k^{1/2} - (A - A_{k-1})^{1/2} A_k^{1/2}\| < \varepsilon$ が成り立つ．ゆえに，$\|(A - A_{k-1})^{1/2} A_k^{1/2}\| > \|(B - B_{k-1})^{1/2} B_k^{1/2}\| - \varepsilon$ となる．B の階数は n であるから，特に $B^{1/2}$ は可逆である．各 k に対し $P_k := B^{-1/2} B_k B^{-1/2}$ と定める．このとき，$1 \leq k \leq n$ に対し $0 = P_0 \leq P_1 \leq \cdots \leq P_n = I$ および $\operatorname{rank}(P_k - P_{k-1}) \leq 1$ が成り立つ．したがって，$\operatorname{rank} P_k \leq k$ および $\operatorname{rank}(I - P_k) \leq n - k$ が成り立ち，これより $\operatorname{rank} P_k = k$, $(P_0, P_1, \ldots, P_n) \in \Pi_n$ となる．また，補題 3 より，$\|(B - B_{k-1})^{1/2} B_k^{1/2}\| = \|P_{k-1}^{\perp} B P_k\|$ が各 k について成り立つ．$|\nu(B) - \nu(A)| \leq \|B - A\| < \varepsilon$ であるから，

$$\max_{1 \leq k \leq n} \|(A - A_{k-1})^{1/2} A_k^{1/2}\| > \max_{1 \leq k \leq n} \|P_{k-1}^{\perp} B P_k\| - \varepsilon \geq \nu(B) - \varepsilon > \nu(A) - 2\varepsilon$$

を得る．$\varepsilon > 0$ は任意であるから，$\alpha \geq \nu(A)$ となる．[2] □

ほぼ同じ議論から次が従う．

補題 5. $0 \leq A \in \mathcal{M}_n$, $X \in \mathcal{M}_n$ とすると，次が成り立つ：

$$\nu(A^{1/2} X A^{1/2}) = \inf\{\max_{1 \leq k \leq n} \|(A - A_{k-1})^{1/2} (X A_k X^*)^{1/2}\| \mid (A_0, A_1, \ldots, A_n) \in \Pi(A)\}.$$

$Q \in \mathcal{P}_{n,1}$ を固定しておこう．MacDonald の結果 [8] より $\nu(Q) = (2 \cos \frac{\pi}{n+2})^{-1}$ である（次節参照）.

定理 *2* の証明. Q は階数 1 であるから，

$$\Pi(Q) = \{(c_0 Q, c_1 Q, \ldots, c_n Q) \mid 0 = c_0 \leq c_1 \leq \cdots \leq c_n = 1\}$$

である．ゆえに補題 4 より

$$\nu(Q) = \inf\{\max_{1 \leq k \leq n} \sqrt{c_k (1 - c_{k-1})} \mid 0 = c_0 \leq c_1 \leq \cdots \leq c_n = 1\} \tag{2}$$

を得る．

$(A_0, A_1, \ldots, A_n) \in \Pi(P)$ として，各 k に対し $a_k = \|A_k\|$ と定める．$0 = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_n = P$ より $0 = a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n = 1$ である．各 k に対し，

$$\begin{aligned}
\|(P - A_{k-1})^{1/2} (M A_k M^*)^{1/2}\|^2 &= \|(M A_k M^*)^{1/2} (P - A_{k-1}) (M A_k M^*)^{1/2}\| \\
&\geq \|(M A_k M^*)^{1/2} (1 - a_{k-1}) P (M A_k M^*)^{1/2}\| \\
&= (1 - a_{k-1}) \|M A_k M^*\|
\end{aligned}$$

が成り立つ．また，$M^* M \geq P$ より

$$\begin{aligned}
\|M A_k M^*\| &= \|(M A_k^{1/2})(M A_k^{1/2})^*\| = \|(M A_k^{1/2})^* (M A_k^{1/2})\| = \|A_k^{1/2} M^* M A_k^{1/2}\| \\
&\geq \|A_k^{1/2} P A_k^{1/2}\| = \|A_k\| = a_k
\end{aligned}$$

[2] A が可逆であれば，$B_k = A_k$ としてよいため，議論がかなり簡単になる．この証明では，可逆な場合による近似を一般の設定で考えている．

が成り立つ．ゆえに，

$$\max_{1\le k\le n}\|(P-A_{k-1})^{1/2}(MA_kM^*)^{1/2}\| \ge \max_{1\le k\le n}\sqrt{a_k(1-a_{k-1})}$$

である．補題 5 で $A=P$, $X=M$ とおけば，(2) より不等式 $\nu(M)=\nu(P^{1/2}MP^{1/2})\ge\nu(Q)$ が得られる． □

この証明において，$\operatorname{rank}P\,(=\operatorname{rank}M)=m$ のときを考えると，条件 $\operatorname{rank}(A_k-A_{k-1})\le 1$ より $a_{n-m+1}=1$ が成り立つ．ゆえに，$R\in\mathcal{P}_{n-m+1,1}$ とすれば，$\nu(M)\ge\nu(R)$，すなわち $\nu(M)\ge(2\cos\frac{\pi}{n-m+3})^{-1}$ が成り立つこともわかる．

3 $\nu(Q)=(2\cos\frac{\pi}{n+2})^{-1}$ の証明

最後に，自己完結性のため MacDonald の結果 $\nu(Q)=(2\cos\frac{\pi}{n+2})^{-1}$ を導く．そのためには，(2) の右辺 $\inf\{\max\limits_{1\le k\le n}\sqrt{c_k(1-c_{k-1})}\mid 0=c_0\le c_1\le\cdots\le c_n=1\}$ を計算すればよい．compact 性より，この下限を達成する $0=c_0\le c_1\le\cdots\le c_n=1$ の存在がわかる．また，大小比較を用いた簡単な考察から，$0=c_0\le c_1\le\cdots\le c_n=1$ がこの下限を達成するならば，$\sqrt{c_k(1-c_{k-1})}$ の値は $1\le k\le n$ によらないことがわかる．

したがって，$0<\alpha<1$ として，$1\le k\le n$ に対し $c_k(1-c_{k-1})=\alpha^2$ となるような $0=c_0\le c_1\le\cdots\le c_n=1$ を探してみよう．これは以下のように初等的に導ける．x を変数とする 2 次方程式 $x(1-x)=\alpha^2$ の解をひとつとり $x=c\in\mathbb{C}$ とおく．$\alpha>0$ より $c\notin\{0,1\}$ および $c_{n-1}<1$ が成り立つことに注意する．$1\le k\le n$ に対し

$$c_k-c=\frac{\alpha^2}{1-c_{k-1}}-\frac{\alpha^2}{1-c}=\frac{c(1-c)(1-c-1+c_{k-1})}{(1-c_{k-1})(1-c)}=c\cdot\frac{c_{k-1}-c}{1-c_{k-1}}$$

が成り立つ．$c_k=c$ なる k が存在すると仮定すると，この式から $c=c_k=c_{k+1}=\cdots=c_n$ となるが，それは仮定に反する．ゆえに逆数がとれて，

$$\frac{1}{c_k-c}=\frac{1}{c}\cdot\frac{1-c_{k-1}}{c_{k-1}-c}=\frac{1-c}{c}\cdot\frac{1}{c_{k-1}-c}-\frac{1}{c}$$

を得る．$d_k=\dfrac{1}{c_k-c}$ とおけば $d_k=\dfrac{1-c}{c}d_{k-1}-\dfrac{1}{c}$ であり，よって $c\neq\dfrac{1}{2}$ ならば

$$d_k+\frac{1}{2c-1}=\frac{1-c}{c}\left(d_{k-1}+\frac{1}{2c-1}\right)$$

となる．したがって，各 k に対し

$$d_k+\frac{1}{2c-1}=\left(\frac{1-c}{c}\right)^k\cdot\left(d_0+\frac{1}{2c-1}\right)=\left(\frac{1-c}{c}\right)^k\cdot\left(-\frac{1}{c}+\frac{1}{2c-1}\right)=\frac{1}{2c-1}\cdot\left(\frac{1-c}{c}\right)^{k+1}$$

を得る．$k=n$ のとき，

$$d_n+\frac{1}{2c-1}=\frac{1}{c_n-c}+\frac{1}{2c-1}=\frac{1}{1-c}+\frac{1}{2c-1}=\frac{c}{(1-c)(2c-1)}$$

なので，$\left(\dfrac{1-c}{c}\right)^{n+2}=1$ が成り立つ．よって，$\theta\coloneqq\dfrac{\pi}{n+2}$ とおけば，ある $j\in\{0,1,2,\cdots,n+1\}$ に対し $\dfrac{1-c}{c}=e^{2ij\theta}$ と表せる．このとき

$$c=\frac{1}{e^{2ij\theta}+1},\quad \alpha^2=c(1-c)=\frac{e^{2ij\theta}}{(e^{2ij\theta}+1)^2}=\frac{1}{(e^{ij\theta}+e^{-ij\theta})^2}=\frac{1}{(2\cos j\theta)^2}$$

が成り立つ．

$j=0$ とすると $\alpha=1/2$ となるが，$c_{k-1}\le 1/2 < c_k$ なる k に対し

$$\frac{1}{4}=\alpha^2=c_k(1-c_{k-1})>\frac{1}{4}$$

となり不適である．

$j\neq 0$ で $\alpha^2=(2\cos j\theta)^{-2}$ が最小となるのは $j=1,n+1$ のときである．$j=1$ のとき $c=(e^{2i\theta}+1)^{-1}$ であり，各 k に対し

$$\begin{aligned} c_k=\frac{1}{d_k}+c=(2c-1)\left(\left(\frac{1-c}{c}\right)^{k+1}-1\right)^{-1}+c &= \frac{-e^{2i\theta}+1}{e^{2i\theta}+1}\cdot\frac{1}{e^{2i(k+1)\theta}-1}+\frac{1}{e^{2i\theta}+1} \\ &= \frac{1}{e^{2i\theta}+1}\cdot\frac{e^{2i(k+1)\theta}-e^{2i\theta}}{e^{2i(k+1)\theta}-1} \\ &= \frac{1}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}\cdot\frac{e^{ik\theta}-e^{-ik\theta}}{e^{i(k+1)\theta}-e^{-i(k+1)\theta}} \\ &= \frac{1}{2\cos\theta}\cdot\frac{\sin k\theta}{\sin(k+1)\theta} \end{aligned}$$

となる．これより，簡単な計算から $0=c_0<c_1<\cdots<c_n=1$ が得られ，したがって条件に合致していることがわかる．以上より $\nu(Q)=(2\cos\frac{\pi}{n+2})^{-1}$ であることがわかった．

参考文献

[1] C. Apostol, C. Foiaș, and D. Voiculescu, On the norm-closure of nilpotents. II. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **19** (1974), 549–577.

[2] C. Apostol and N. Salinas, Nilpotent approximations and quasinilpotent operators. *Pacific J. Math.* **61**(1975), no. 2, 327–337.

[3] W. Arveson, Interpolation problems in nest algebras. *J. Funct. Anal.* **20** (1975), no. 3, 208–233.

[4] Z. Cramer, The Distance from a Rank $n-1$ Projection to the Nilpotent Operators on $\mathbb{C}^n$. *Canad. Math. Bull.* **64** (2021), no. 1, 54–74.

[5] P.R. Halmos, Ten problems in Hilbert space. *Bull. Amer. Math. Soc.* **76** (1970), no. 5, 887–933.

[6] J.H. Hedlund, Limits of nilpotent and quasinilpotent operators. *Michigan Math. J.* **19** (1972), 249–255.

[7] D.A. Herrero, Normal limits of nilpotent operators. *Indiana Univ. Math. J.* **23** (1973/74/1974), 1097–1108.

[8] G.W. MacDonald, Distance from projections to nilpotents. *Canad. J. Math.* **47** (1995), no. 4, 841–851.

[9] M. Mori, On the distance from a matrix to nilpotents. *Linear Algebra Appl.* **679** (2023), 99–103.

[10] S. Parrott, On a quotient norm and the Sz.-Nagy–Foiaș lifting theorem. *J. Funct. Anal.* **30** (1978), no. 3, 311–328.

[11] S.C. Power, The distance to upper triangular operators. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **88** (1980), no. 2, 327–329.