# Lattice isomorphisms between projection lattices of von Neumann algebras[*] [†]

森 迪也[‡]

**概 要**

von Neumann 環 $M$ に対し，その射影全体の集合 $\mathcal{P}(M)$ は束（lattice）をなすことが古くから知られている．二つの von Neumann 環 $M, N$ に対して，$\mathcal{P}(M)$ から $\mathcal{P}(N)$ への束同型の一般形を与える．

## 1 von Neumann 環と射影

複素 Hilbert 空間[1] $H$ に対し，$H$ 上の有界線形作用素全体のなす代数を $B(H)$ で表す．作用素 $x \in B(H)$ に対し，$\langle xh, g\rangle = \langle h, x^*g\rangle$, $h, g \in H$ を満たす作用素 $x^* \in B(H)$ （共役作用素）が定まることを思い出そう．$B(H)$ の部分 $*$ 代数とは，線形部分空間 $A \subset B(H)$ で，$x, y \in A$ ならば $x^*, xy \in A$ を満たすものを指す．**作用素環論**においては主として，$B(H)$ の部分 $*$ 代数で，適当な位相で閉集合となるものを考える．特に，**von Neumann 環**とは，$B(H)$ の部分 $*$ 代数で，恒等作用素 $1 \in B(H)$ を含み，強作用素位相[2]（SOT）で閉じたものを指す．

**例 1.**
- $B(H)$ は最も基本的な von Neumann 環である．
- 正の整数 $n$ に対し，$n \times n$ 複素行列の全体 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ は通常の方法で $B(\mathbb{C}^n)$ と同一視され，有限次元 von Neumann 環の例となる．
- $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を適当な有限性を満たす（たとえば $\sigma$ 有限な）測度空間とする．$f \in L^\infty(\mu)$ を，Hilbert 空間 $L^2(\mu)$ 上の有界線形作用素 $L^2(\mu) \ni g \mapsto fg \in L^2(\mu)$ と同一視することにより，$L^\infty(\mu) \subset B(L^2(\mu))$ と思うことができるが，この同一視の下で $L^\infty(\mu)$ は von Neumann 環の構造を持つ．$L^\infty(\mu)$ は可換な（積がつねに交換可能な）von Neumann 環である．実は，任意の可換な von Neumann 環はこの測度論的な方法で得られることが知られている．これをもとに，一般の von Neumann 環の研究は「非可換な測度論」のようなものである，ととらえられることがある[3]．

---

[*]第 61 回実函数論・函数解析学合同シンポジウム講演集原稿

[†]講演者は理化学研究所基礎化学特別研究員制度および科研費（課題番号 22K13934）による助成を受けている．

[‡]〒351-0198 和光市広沢 2-1 理化学研究所 数理創造プログラム（iTHEMS），michiya.mori@riken.jp

[1]本講演において，Hilbert 空間は可分とは限らない．

[2]有向点族 $(x_i)_{i\in I} \subset B(H)$ と $x \in B(H)$ に対し，$x_i \to x \iff \|x_ih - xh\| \to 0\ \forall h \in H$ により定まる位相．すなわち各点収束位相．

[3]**非可換**（noncommutative）という単語は作用素環論で頻出するキーワードの一つである．これは「可換と限らない」ということを指し，可換の場合を排除するのではなく，可換と限らない場合に一般化する，というニュアンスで用いられる．

集合 $S \subset B(H)$ に対し，$S' := \{x \in B(H) \mid xy = yx \ \forall y \in S\}$ を $S$ の可換子環（commutant），$S'' := (S')'$ を双可換子環（bicommutant または double commutant）という．von Neumann の双可換子環定理によれば，部分 $*$ 代数 $M \subset B(H)$ に対して，$M$ が von Neumann 環であることは $M'' = M$ が成り立つことと同値である．これは，位相的な条件と代数的な条件の同値性であり，von Neumann 環の研究において関数解析的なアプローチと代数的なアプローチがどちらも強力であることを示唆している．

von Neumann 環 $M$ であって，その中心 $M \cap M'$ が 1 次元である（すなわち恒等作用素の張る部分空間に等しい）ものを**因子環**（factor）とよぶ．一般の von Neumann 環は，適当な条件のもとで因子環の直積分（「連続的な直和」のようなもの）で表されることが知られているため，von Neumann 環の研究においては，初めから考察の対象を因子環に限ることがよくある．本講演の内容については因子環に限らなくとも議論ができるのだが，簡単のため，因子環の場合に限って説明する場面がある．

von Neumann 環の構造の研究は，von Neumann の Murray との共著論文 [13] に始まる．この論文では，因子環が 5 種類に分類できることが示された．これを説明しよう．

**射影**（projection, あるいは直交射影 orthogonal projection）とは，$B(H)$ の元 $p$ であって $p = p^2 = p^*$ を満たすものをいう[4]．よく知られているように，射影 $p \in B(H)$ に対しその像 $pH \subset H$ は $H$ の閉部分空間であり，また $H$ の閉部分空間に対し，それを像とする射影が唯一つ存在する．これより，射影全体の集合は $H$ の閉部分空間全体の集合と同一視される．この同一視により，射影の集合に半順序 $p \leq q \iff pH \subset qH$ が定まる[5]．

von Neumann 環 $M \subset B(H)$ に対し，$M$ に属する射影の全体を $\mathcal{P}(M)$ と表す．$\mathcal{P}(M) := \{p \in M \mid p = p^2 = p^*\}$．このとき，$\mathcal{P}(M)$ は束[6]（lattice）をなす．実際，$p, q \in \mathcal{P}(M)$ に対し，$pH + qH$ の閉包への射影，$pH \cap qH$ への射影がともに $M$ の元であり，それぞれ $p$ と $q$ の上限 $p \vee q$, 下限 $p \wedge q$ となることが確かめられる[7]．このことから，$\mathcal{P}(M)$ を $M$ の**射影束**（projection lattice）とよぶ．$M$ が可換の場合，$M$ はある測度空間に対する $L^\infty$ 空間と同一視され，ゆえに各射影はある可測集合の特性関数に対応する.（ただし，ほとんど至るところ等しい関数は同じものとして扱うことに注意が必要.）それゆえ，射影束は可測集合のなす束と思うことができる．したがって，一般の von Neumann 環の射影束は，いわば「非可換な可測集合のなす束」のようなものだといえるだろう[8]．

$\mathcal{P}(M)$ には，いくつかの二項関係が定まる．ひとつは，すでに述べた束構造を定める半順序関係である．また，直交関係 $p \perp q \iff pH \perp qH$ も重要である．以上に加え，次のようにして定まる $\mathcal{P}(M)$ 上の同値関係が，Murray–von Neumann により導入された [13]．von Neumann 環 $M$ の射影 $p, q \in \mathcal{P}(M)$ に対し，ある（部分等距離）作用素 $v \in M$ が存在し $vv^* = p$, $v^*v = q$ が成り立つとき，$p \sim q$ と書く．これは同値関係であることがわかる．射影 $p \in \mathcal{P}(M)$ が条件

$$q \in \mathcal{P}(M),\ p \sim q \leq p \Longrightarrow p = q$$

を満たすとき $p \in \mathcal{P}(M)$ は**有限**（finite）な射影であるという．von Neumann 環 $M$ の恒等作用素 $1 \in \mathcal{P}(M)$ が有限な射影であるとき，$M$ は**有限型**であるという．

---

[4]文献によっては，$p = p^2$ を満たす作用素を射影とよぶ場合もあるので注意．本講演では登場しないが，講演者は $p = p^2$ を満たす作用素をベキ等元（idempotent）とよぶ．

[5]これは有界自己共役作用素の順序（$a \leq b \iff \langle ah, h\rangle \leq \langle bh, h\rangle \ \forall h \in H$）を射影に制限したものにも一致する．

[6]半順序集合 $(L, \leq)$ の任意の 2 元 $a, b$ が上限 $a \vee b = \min\{c \in L \mid a \leq c, b \leq c\}$ と下限 $a \wedge b = \max\{c \in L \mid c \leq a, c \leq b\}$ をもつとき，$L$ は**束**をなすという．

[7]より一般に，$\mathcal{P}(M)$ の任意の部分集合は上限と下限をもつ．つまり $\mathcal{P}(M)$ は完備束である．

[8]「非可換な測度代数」というほうが適切かもしれない．

$M$ を因子環とする．写像 $D\colon \mathcal{P}(M) \to [0,\infty] := [0,\infty)\cup\{\infty\}$ が**相対次元関数**（relative dimension function）であるとは，$D$ が次の条件を満たすことをいう：

1. $D(0) = 0$.
2. $0 \neq p \in \mathcal{P}(M)$ が有限な射影ならば $0 < D(p) < \infty$，有限でなければ $D(p) = \infty$.
3. $p, q \in \mathcal{P}(M)$, $p \sim q$ ならば $D(p) = D(q)$ .
4. $p, q \in \mathcal{P}(M)$, $p \perp q$ ならば $D(p+q) = D(p) + D(q)$.

以下の Murray–von Neumann の定理では，$\mathcal{P}(M)$ が支配的な役割を果たしている．

**定理 1** (Murray–von Neumann [13])**.** 因子環 $M$ に対し，次のいずれかの条件を満たす相対次元関数 $D$ が唯一つ存在する．

- ある正の整数 $n$ に対し，$D(\mathcal{P}(M)) = \{0,1,2,\dots,n\}$. このような $D$ をもつ $M$ を $\mathbf{I}_n$ **型**因子環という．
- $D(\mathcal{P}(M)) = \{0,1,2,\dots\}\cup\{\infty\}$. このような $D$ をもつ $M$ を $\mathbf{I}_\infty$ **型**因子環という．
- $D(\mathcal{P}(M)) = [0,1]$. このような $D$ をもつ $M$ を $\mathbf{II}_1$ **型**因子環という．
- $D(\mathcal{P}(M)) = [0,\infty]$. このような $D$ をもつ $M$ を $\mathbf{II}_\infty$ **型**因子環という．
- $D(\mathcal{P}(M)) = \{0,\infty\}$. このような $D$ をもつ $M$ を **III 型**因子環という．

因子環のうち，有限型であるものは $\mathrm{I}_n$ 型環および $\mathrm{II}_1$ 型環である．

**例 2.** 正の整数 $n$ に対し，$n \times n$ 行列環 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ は $\mathrm{I}_n$ 型因子環である．無限次元 Hilbert 空間 $H$ に対し，$B(H)$ は $\mathrm{I}_\infty$ 型因子環である．実は，I 型（$\mathrm{I}_n$ と $\mathrm{I}_\infty$）因子環はこのようなものしか存在しない．

これらの例において，$D$ は射影の階数を与える写像にほかならない．射影を閉部分空間と同一視すれば，$D$ は部分空間に対し次元を与える写像であると思うことができる．

ゆえに，一般の因子環の $D$ は「部分空間の次元を与える写像」を一般化したものだと考えられる．II 型（$\mathrm{II}_1$ と $\mathrm{II}_\infty$）および III 型の因子環は，存在することですら自明ではない．Murray–von Neumann の最初の論文 [13] では，II 型因子環が構成された．II 型環の相対次元関数は連続的な値をとる．ゆえに，II 型環を考えることで，連続的な次元の概念が考えられる．これに動機づけられ，von Neumann は**連続幾何学**（continuous geometry）という分野を開拓した [16].

論文 [13] では，III 型環が存在するかどうかは未解決であった．最初の III 型環は数年後に von Neumann が発見し [15]，それ以来，II 型および III 型環の理論が von Neumann 環論の中心的話題として発展していくのだが，その説明はここではしない．作用素環論では，具体例を一つも知らないとしても抽象的な理論展開が可能である場面が多くある．講演者は作用素環のそのような側面を好んでいるため，ここでもあえて，I 型以外の具体例には触れずに，抽象的に議論を進める．

因子環と限らない一般の von Neumann 環は，5 つのタイプ（$\mathrm{I}_n$, $\mathrm{I}_\infty$, $\mathrm{II}_1$, $\mathrm{II}_\infty$, III）の von Neumann 環の直和で表されることが知られている[9].

[9] 詳しくは，作用素環論の標準的な教科書，たとえば [7, Chapter 6] を見るとよい．

# 2　射影束の束同型

本講演では，次の問題を考える．

**問題.** $M, N$ を von Neumann 環とするとき，$\mathcal{P}(M)$ から $\mathcal{P}(N)$ への束同型の一般形は何か．

ここで，**束同型**とは，束のあいだの全単射 $\phi\colon L_1 \to L_2$ で，すべての $a, b \in L_1$ に対し等式 $\phi(a \vee b) = \phi(a) \vee \phi(b)$, $\phi(a \wedge b) = \phi(a) \wedge \phi(b)$ を満たすものである．束構造と半順序構造の対応から，この条件は $\phi$ が**順序同型**であること，すなわちすべての $a, b \in L_1$ に対し $a \leq b \iff \phi(a) \leq \phi(b)$ が成り立つことと同値である．

2.1 節から 2.3 節で先行研究について紹介し，2.4 節において本研究の主結果のひとつを与える．

## 2.1　I 型因子環の場合

$M = N = \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, $1 \leq n < \infty$（$\mathrm{I}_n$ 型因子環）のとき，射影を部分空間と同一視すれば，我々の問題は $\mathbb{C}^n$ の部分空間全体のなす束（これを $\mathcal{C}(\mathbb{C}^n)$ と表そう）に対する問題となる．この場合，$n \leq 2$ であれば面白い結論は得られないが，$n \geq 3$ の場合は**射影幾何学の基本定理**（fundamental theorem of projective geometry）が適応できる．

**定理 2** (射影幾何学の基本定理[10])**.** $n \geq 3$ とする．$\Phi\colon \mathcal{C}(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{C}(\mathbb{C}^n)$ を束同型とする．このとき，ある半線形全単射 $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ が存在して，$\Phi(V) = f(V)$, $V \in \mathcal{C}(\mathbb{C}^n)$ が成り立つ[11]．

複素ベクトル空間 $V, W$ のあいだの写像 $f\colon V \to W$ が**半線形** (semilinear) であるとは，ある環同型（積と和を保つ全単射）$\alpha\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が存在して，$f(c_1v_1 + c_2v_2) = \alpha(c_1)f(v_1) + \alpha(c_2)f(v_2)$ $\forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $v_1, v_2 \in V$ が成り立つことをいう．$\alpha$ が恒等写像のとき $f$ は複素線形，$\alpha$ が複素共役をとる写像のとき $f$ は共役線形（conjugate-linear）となる．$\mathbb{C}$ 上の自己環同型は，連続なものは恒等写像と複素共役をとる写像に限られるが，不連続なものがほかにたくさんあることが知られている．

射影幾何学の基本定理は，束構造が環構造（環同型 $\alpha$ に対応）と関係していることを示唆する．なぜそのようなことが起こるか理解するため，射影幾何学の基本定理の証明の概略を与えてみよう．

簡単のため，$n = 3$ の場合のみ考える．まず，各 $0 \leq k \leq n$ に対し，$k$ 次元部分空間の $\Phi$ による行き先が $k$ 次元部分空間となることは簡単にわかる．適当な線形変換により，$\Phi$ は $\mathbb{C}^3$ の 5 つの 1 次元部分空間

$$\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \mathbb{C}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \mathbb{C}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \mathbb{C}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

をいずれも固定すると仮定してもよいことがわかる．このとき，各 $c \in \mathbb{C}$ に対し，

$$\Phi\left(\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\c\\0\end{pmatrix}\right) = \mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\\alpha(c)\\0\end{pmatrix}$$

[10] 複素数以外の体を考えてもよい．射影幾何学の基本定理は，ここに述べるものとは異なる定式化で述べられることも多いが，定理の主張の大意は変わらない．

[11] $\Phi(V)$ は元 $V$ の行き先，$f(V)$ は部分集合 $V \subset \mathbb{C}^n$ の像を表していることに注意．

となる $\alpha(c)\in\mathbb{C}$ が定まり，$\alpha\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ は全単射となる．同様に，

$$\Phi\left(\mathbb{C}\begin{pmatrix}0\\1\\c\end{pmatrix}\right)=\mathbb{C}\begin{pmatrix}0\\1\\\beta(c)\end{pmatrix},\ \Phi\left(\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\0\\c\end{pmatrix}\right)=\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\0\\\gamma(c)\end{pmatrix}$$

が任意の $c\in\mathbb{C}$ について成り立つような全単射 $\beta,\gamma\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ が存在する．ここで，$\alpha(-1)=-1=\beta(-1)$ となることに注意しておく．

簡単な計算により，任意の $c_1,c_2\in\mathbb{C}$ に対し，等式

$$\left[\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\c_1\\0\end{pmatrix}\vee\mathbb{C}\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix}\right]\wedge\left[\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\vee\mathbb{C}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]=\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\0\\-c_1c_2\end{pmatrix}$$

が示せる．両辺の $\Phi$ による送り先を考えると，$\Phi$ に関する仮定より，

$$\left[\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\\alpha(c_1)\\0\end{pmatrix}\vee\mathbb{C}\begin{pmatrix}0\\1\\\beta(c_2)\end{pmatrix}\right]\wedge\left[\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\vee\mathbb{C}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]=\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\0\\\gamma(-c_1c_2)\end{pmatrix}$$

が成り立つことがわかる．左辺は $\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\0\\-\alpha(c_1)\beta(c_2)\end{pmatrix}$ に等しいので，$-\alpha(c_1)\beta(c_2)=\gamma(-c_1c_2)$ となる．$\alpha(-1)=-1=\beta(-1)$ であることを使えば，$\alpha=\beta=\gamma$ であり，しかも $\alpha$ が乗法的である，つまり $\alpha(c_1)\alpha(c_2)=\alpha(c_1c_2)$ が任意の $c_1,c_2\in\mathbb{C}$ に対し成り立つことが簡単に示せる．

いっぽう，任意の $c_1,c_2\in\mathbb{C}$ に対し等式

$$\left[\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\c_1\\0\end{pmatrix}\vee\mathbb{C}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]\wedge\left[\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\0\\c_2\end{pmatrix}\vee\mathbb{C}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]=\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\c_1\\c_2\end{pmatrix}$$

および

$$\left[\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\c_1\\c_2\end{pmatrix}\vee\mathbb{C}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right]\wedge\left[\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\vee\mathbb{C}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]=\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\0\\c_1+c_2\end{pmatrix}$$

が成り立つことが簡単に示せる．これらを用いると，$\alpha$ が加法的である，すなわち $\alpha(c_1+c_2)=\alpha(c_1)+\alpha(c_2)$ が任意の $c_1,c_2\in\mathbb{C}$ について成り立つことがわかる．

よって，

$$f\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}\alpha(c_1)\\\alpha(c_2)\\\alpha(c_3)\end{pmatrix}$$

により定まる写像 $f\colon\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$ は半線形全単射となる．これが定理の条件を満たすことは比較的容易に示せ，証明が完結する．

次に，$\mathrm{I}_\infty$ 型因子環の場合を考えてみよう．$\mathcal{P}(B(H))$ は $H$ の閉部分空間全体のなす束と同一視できるのだった．一般に，複素ノルム空間 $X$ に対して，$X$ の閉部分空間全体は包含関係を順序として束をなす．これを $\mathcal{C}(X)$ と表そう．

**定理 3** (Fillmore–Longstaff [5]). $X, Y$ を無限次元複素ノルム空間，$\Phi\colon \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$ を束同型とする．このとき，ある複素線形または共役線形な同相写像 $f\colon X \to Y$ が存在し，$\Phi(V) = f(V)$, $V \in \mathcal{C}(X)$ が成り立つ．

ゆえに，$\mathrm{I}_\infty$ 型因子環の射影束の束同型はすべて連続であり，$\mathrm{I}_n$ 型の場合とは様子が異なる．講演者にとって，以上の 2.1 節の定理を知ったことが今回の研究を始める契機となった．

## 2.2 von Neumann の理論

von Neumann は，連続幾何学の理論と関連して，(von Neumann) 正則環という環のクラスと，可補 modular 束という束のクラスを導入し，これらのあいだに良い対応があることを示した．この理論 [16, Part 2] を簡単に説明しよう．

**定義 1.** 単位元を持つ環 $R$ の任意の元 $x$ に対してある元 $y$ が存在して $xyx = x$ が成り立つとき，$R$ は（von Neumann）**正則**（regular）であるという[12]．

**例 3.** $n \geq 1$ に対し，$n \times n$ 複素行列全体 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ は正則環である[13]．

**定義 2.** 最大元 1 と最小元 0 をもつ束 $L$ が**可補**（complemented）であるとは，各元 $a \in L$ に対しある元 $b \in L$ が存在して，$a \vee b = 1$, $a \wedge b = 0$ が成り立つことを指す．束 $L$ が **modular** であるとは，$a \leq c$ を満たす任意の三つ組 $a, b, c \in L$ が等式 $(a \vee b) \wedge c = a \vee (b \wedge c)$ を満たすことを意味する．

3 点集合 $\{1, 2, 3\}$ の部分集合族 $N_5 := \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ に包含関係で半順序を与えると束をなすが， modular でない： $(\{2\} \vee \{1\}) \wedge \{2, 3\} = \{2, 3\} \neq \{2\} = \{2\} \vee (\{1\} \wedge \{2, 3\})$. 実は，束が modular であることは，この $N_5$ を部分束として含まないことと同値である．

**例 4.** 有限次元複素ベクトル空間 $X$ に対し，その線形部分空間全体 $\mathcal{C}(X)$ は包含関係を順序として可補 modular 束をなす．

**定理 4** (von Neumann). $R$ を正則環とする．$R$ の単項右イデアル（すなわち，ある $x \in R$ に対し $xR$ と表される $R$ の右イデアル）全体の集合 $L$ に，包含関係で半順序を与える．このとき，$L$ は可補 modular 束となる．

**定義 3.** $L$ を可補 modular 束とする．ふたつの元 $a, b \in L$ が **perspective** であるとは，ある $c \in L$ が存在して $a \vee c = 1 = b \vee c$, $a \wedge c = 0 = b \wedge c$ が成り立つことを意味する．$n$ を 2 以上の整数とする．$L$ が **order** $n$ をもつとは，どのふたつも perspective であるような $a_1, a_2, \ldots, a_n \in L$ が存在して，$a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n = 1$, かつすべての部分集合 $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し $\left(\bigvee_{i \in I} a_i\right) \wedge \left(\bigvee_{j \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus I} a_j\right) = 0$ が成り立つことを指す．

$n$ を正の整数とする．$R$ が正則環のとき，$R$ の元を成分とする $n \times n$ 行列全体 $\mathbb{M}_n(R)$ に通常の環構造を与えたものはまた正則環となる．与えられた正則環の単項右イデアル全体のなす可補 modular 束 $L$ が order $n$ をもつことは，その正則環が $\mathbb{M}_n(R)$ の形で表せることと同値である．

**定理 5** (von Neumann). $R_1, R_2$ を正則環として，それぞれの単項右イデアル全体のなす可補 modular 束を $L_1, L_2$ とする．$L_1$ が 3 以上のある order を持つとする．$\Phi\colon L_1 \to L_2$ を束同型とする．このとき，環同型 $\Psi\colon R_1 \to R_2$ が唯一つ存在して，$\Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{a} \in L_1$ が成り立つ．

---

[12] von Neumann 正則環と von Neumann 環は名前が似ていて紛らわしいが，前者は抽象的な環（ring），後者は $B(H)$ の部分 $*$ 代数であり，明確に異なることに注意されたい．ただし，$\mathrm{I}_n$ 型因子環 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ については双方の例となっている．

[13] 複素数以外の体を考えてもよい．例 4, 5 についても同様．

**例 5.** $n \geq 1$ に対し，正則環 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ の単項右イデアル全体のなす可補 modular 束は，$\mathcal{C}(\mathbb{C}^n)$ と同一視できる．実際，$\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ が通常の方法で $\mathbb{C}^n$ に作用するとみなせば，$\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ の単項右イデアルは，ある部分空間 $V \in \mathcal{C}(\mathbb{C}^n)$ に対し，像が $V$ に含まれる行列の全体に等しいことがわかる．

これを用いると，射影幾何学の基本定理は von Neumann の理論の帰結として得られる．実は，定理 5 の証明は，上述の射影幾何学の基本定理の証明と似た方法でできてしまう．

von Neumann はさらに，次の定理を与えた．

**定理 6** (von Neumann)**.** $L$ を order $n \geq 4$ の可補 modular 束とする．このとき，ある正則環 $R$ であって，その単項右イデアル全体のなす束が $L$ と束として同型となるものが存在する．

von Neumann 環 $M$ に対し，射影束 $\mathcal{P}(M)$ は常に可補束である．また，$\mathcal{P}(M)$ が modular となることは，$M$ が有限型（$\mathrm{I}_n$ または $\mathrm{II}_1$）であることと同値であることが知られている．

$M$ が 有限型 von Neumann 環のとき，可補 modular 束 $\mathcal{P}(M)$ に対応する正則環は何だろうか．von Neumann 環 $M \subset B(H)$ と $H$ 上稠密に定まった閉作用素 $x$ に対し，$x$ が $M$ に**付属する**（$x$ is affiliated with $M$）とは，$M$ の可換子環 $M' = \{y \in B(H) \mid xy = yx \, \forall x \in M\}$ に属する任意の $y$ に対し $yx \subset xy$ が成り立つことを指す．$M$ に付属する作用素の全体を $A(M)$ で表す．有限型 von Neumann 環 $M$ に対しては，付属作用素の全体 $A(M)$ が $*$ 代数の構造（$*$ 構造&線形構造&積構造）を持つ [13]．具体的には，$x, y \in A(M)$ と $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ に対し，$x^*, \overline{c_1x + c_2y}, \overline{xy} \in A(M)$ が成り立ち，これらを $*$ 代数の演算とするような構造が入ることがわかる．この事実は，$M$ が有限型でない場合には全く成り立たない[14]ため，驚くべき事実であるといってよいだろう．実は，$M$ が有限型のとき，$A(M)$ は正則環となり，これが可補 modular 束 $\mathcal{P}(M)$ に対応する正則環にほかならないことが示せる．実際，正則環 $A(M)$ の単項右イデアルは，ある射影 $p \in \mathcal{P}(M)$ に対し $\{x \in A(M) \mid px = x\}$ という形をしていることが確かめられる．

$M$ の付属作用素 $x$ に対し，$l(x)$ で $x$ の像の閉包への射影を表す．これは $M$ の元である．von Neumann の理論から，特に次の定理が従う．

**定理 7** (von Neumann [16])**.** $M, N$ を $\mathrm{I}_1$ 型でも $\mathrm{I}_2$ 型でもない有限型因子環とする．このとき，任意の束同型 $\Phi\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(N)$ に対し，環同型 $\Psi\colon A(M) \to A(N)$ が唯一つ存在して，$\Phi(p) = l(\Psi(p))$, $p \in \mathcal{P}(M)$ が成り立つ．逆に，任意の環同型 $\Psi\colon A(M) \to A(N)$ に対し，束同型 $\Phi\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(N)$ が等式 $\Phi(p) = l(\Psi(p)), p \in \mathcal{P}(M)$ により定まる．

## 2.3 直交性を保つ場合

定理 7 の変形として，Feldman [4] と Dye [3] は，一般の von Neumann 環の設定で，直交性を保つという追加の仮定のもとで射影束の束同型を考えた．彼らの定理を因子環の場合に限定して紹介する．

二つの von Neumann 環のあいだの全単射 $\psi\colon M \to N$ が，複素線形で，積を保ち，$\psi(x^*) = \psi(x)^*$, $x \in M$ を満たすとき，$\psi$ を $*$ **同型**という．$*$ 同型は自動的に von Neumann 環の基本的な構造（たとえば距離構造，適当な位相構造，順序構造...）を保つので，作用素環論において最もよく登場する同型写像の概念である[15]．以下の定理では，共役線形で，積を保ち，$\psi(x^*) = \psi(x)^*, x \in M$ を満たす全単射 $\psi\colon M \to N$ が登場する．これを**共役線形 $*$ 同型**とよぼう．共役線形 $*$ 同型は，複素線形構造は保たないが，von Neumann 環の構造の多く（特に射影束とその束構造）を保つ．

[14] $\mathrm{I}_\infty$ 型因子環の場合はたとえば von Neumann の [14] を参照．
[15] それゆえ，文献によっては $*$ 同型を単に同型とよぶ場合も多い．

**例 6.** $\mathrm{I}_n$ 型因子環 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ において，すべての成分の複素共役をとる写像 $(x_{ij})_{1\le i,j\le n} \mapsto (\overline{x_{ij}})_{1\le i,j\le n}$ は共役線形 $*$ 同型である．

**定理 8** (Feldman [4], Dye [3])**.** $M$, $N$ を $\mathrm{I}_2$ 型でない因子環とする．束同型 $\Phi\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(N)$ が，次の条件を満たすとする：$p, q \in \mathcal{P}(M)$ に対し，$p \perp q \iff \Phi(p) \perp \Phi(q)$. このとき，$*$ 同型または共役線形 $*$ 同型 $\Psi\colon M \to N$ が唯一つ存在して，$\Phi(p) = \Psi(p)$, $p \in \mathcal{P}(M)$ が成り立つ．逆に，任意の $*$ 同型または共役線形 $*$ 同型 $\Psi\colon M \to N$ に対し，束同型 $\Phi\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(N)$ が等式 $\Phi(p) = \Psi(p)$, $p \in \mathcal{P}(M)$ により定まる．

## 2.4 射影束の束同型と可測作用素環の環同型の対応

有限型でない von Neumann 環 $M \subset B(H)$ に対しては，付属作用素の全体 $A(M)$ は環構造を持ちえないのだった．講演者は，$A(M)$ の代わりに可測作用素のなす代数を考えることで，定理 7 の拡張を得た．von Neumann 環 $M$ に付属する作用素 $x$ が**可測**（measurable）であるとは，ある $c > 0$ が存在して，スペクトル射影 $p = \chi_{[c,\infty)}(|x|)$ （これは実は $M$ の元である）が有限な射影となることである．$M$ に付属する可測作用素の全体を $S(M)$ と表す．これは $*$ 代数の構造を持つことが知られている [19].

**例 7.**
- $M$ が I 型または III 型の因子環ならば，$S(M) = M$ である．
- $M$ が有限型環のとき，$S(M) = A(M)$ である．

**定理 A** (森 [11])**.** $M$, $N$ を $\mathrm{I}_1$ 型でも $\mathrm{I}_2$ 型でもない因子環とする．このとき，任意の束同型 $\Phi\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(N)$ に対し，環同型 $\Psi\colon S(M) \to S(N)$ が唯一つ存在して，$\Phi(p) = l(\Psi(p))$, $p \in \mathcal{P}(M)$ が成り立つ．逆に，任意の環同型 $\Psi\colon S(M) \to S(N)$ に対し，束同型 $\Phi\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(N)$ が等式 $\Phi(p) = l(\Psi(p))$, $p \in \mathcal{P}(M)$ により定まる．

環の同型から束の同型が定まることの証明はそれほど難しくない．束の同型から環の同型を構成する方法は詳しくは述べないが，前述の射影幾何学の基本定理の証明におけるからくりと似たことが使える．なぜ可測作用素が登場するのか，という部分について説明しよう．

一般に，射影 3 つ以上の集まりを同時に考えることはきわめて難しいとされている[16] [20]．しかし，2 つの射影であれば同時に考えることがいつでも，比較的容易にできることが知られている[17]．ここでは，von Neumann 環の 2 つの射影を考えよう．

$M \subset B(H)$ を von Neumann 環とする．射影 $p \in \mathcal{P}(M)$ に対し，$p^\perp := 1 - p \in \mathcal{P}(M)$ と定める．$p, q \in \mathcal{P}(M)$ とする．$e_1 := p \wedge q^\perp$, $e_2 := p \wedge q$, $e_3 := p^\perp \wedge q$, $e_4 := p^\perp \wedge q^\perp$, $e_5 := 1 - e_1 - e_2 - e_3 - e_4$ とおく．このとき，Hilbert 空間 $H$ の直交分解 $H = e_1 H \oplus e_2 H \oplus e_3 H \oplus e_4 H \oplus e_5 H$ に対応して，$p$ と $q$ を

$$p = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus p_0, \quad q = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus q_0$$

という形に分解することができる．実は，von Neumann 環 $e_5 M e_5 \subset B(e_5 H)$ は，ある von Neumann 環 $M_{p,q}$ の元を成分とする $2 \times 2$ 行列全体のなす von Neumann 環 $\mathbb{M}_2(M_{p,q})$ と同一視できて，$\mathbb{M}_2(M_{p,q})$ において $p_0$ と $q_0$ がそれぞれ

$$p_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \, q_0 = \begin{pmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{pmatrix}$$

[16] 本講演とはあまり関係がないが，不思議なふるまいをする 3 つの射影の例として，[9], [10, Section 5] が興味深い．
[17] 歴史的背景を含めた，2 つの射影の理論については [2] が詳しい．

という形で表される．ここで，$c, s \in M_{p,q}$ は単射かつ半正定値な作用素で，$c^2 + s^2 = 1$ を満たす[18]．

**命題 1** ([11, Lemma 3.6])**.** $M$ を因子環として，$p, q \in \mathcal{P}(M)$ は $p \wedge q = 0$ を満たすとする．上述のような von Neumann 環 $M_{p,q}$ と作用素 $c, s \in M_{p,q}$ をとる．このとき，次は同値．

- 作用素 $s$ は，$S(M_{p,q})$ において可逆である．
- $p_1 \in \mathcal{P}(M)$ が $p_1 \leq p$, $p_1 \vee q = p \vee q$ を満たすとき，$p_1 = p$ が成り立つ．

第一の条件では可測作用素が登場するが，第二の条件は束構造のみが関係していることに注意されたい．これをうまく用いることにより，束同型から可測作用素環の環同型が構成できるのである．

## 3　可測作用素環の環同型

では，環同型 $\Psi\colon S(M) \to S(N)$ は一般にどのような形をしているか．有限次元（つまり $\mathrm{I}_n$ 型）因子環の場合については，射影幾何学の基本定理から束同型の一般形がわかるので，説明を省略する．ほかの場合を考えよう．改めて思い出すと，環同型とは，加法と乗法を保つ全単射であり，一般には実線形と限らないのであった．ところが，次の定理が成り立つ．

**定理 B** (森 [11, 12]; Ayupov–Kudaybergenov [1])**.** $M$, $N$ を無限次元の因子環とする．このとき，任意の環同型 $\Psi\colon S(M) \to S(N)$ に対し，ある $*$ 同型または共役線形 $*$ 同型 $\psi\colon M \to N$ と可逆元 $y \in S(N)$ が存在し，$\Psi(x) = y\psi(x)y^{-1}$, $x \in S(M)$ が成り立つ[19]．

**系 1.** $M$, $N$ を無限次元の因子環とする．このとき，任意の束同型 $\Phi\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(N)$ に対し，ある $*$ 同型または共役線形 $*$ 同型 $\psi\colon M \to N$ と可逆元 $y \in S(N)$ が存在し，$\Phi(p) = l(y\psi(p))$, $p \in \mathcal{P}(M)$ が成り立つ．逆に，任意の $*$ 同型または共役線形 $*$ 同型 $\psi\colon M \to N$ と可逆元 $y \in S(N)$ に対し，束同型 $\Phi\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(N)$ が等式 $\Phi(p) = l(y\psi(p))$, $p \in \mathcal{P}(M)$ により定まる．

無限次元因子環に対し，系 1 が定理 8 の真の拡張となっていることは簡単に確かめられる．

定理 B の証明についてコメントしよう．特に，$M$ と $N$ が $\mathrm{I}_\infty$ 型または III 型の因子環である場合を考える．このとき，$S(M) = M$, $S(N) = N$ である．この場合の定理 B は，次の二つの定理の帰結である．

**定理 9** (Kaplansky [8])**.** $X, Y$ を半単純 Banach 環[20]，$\psi\colon X \to Y$ を環同型とする．このとき，Banach 環としての分解 $X \cong X_1 \oplus X_2 \oplus X_3$, $Y \cong Y_1 \oplus Y_2 \oplus Y_3$ と環同型 $\psi_i\colon X_i \to Y_i$, $i = 1, 2, 3$ であって，$\psi \cong \psi_1 \oplus \psi_2 \oplus \psi_3$ かつ，$X_1$ と $Y_1$ は有限次元，$\psi_2$ は複素線形，$\psi_3$ は共役線形であるものが存在する[21]．

**定理 10** (Okayasu [17], see also [6], [18, Section 4.1])**.** $M, N$ を von Neumann 環，$\Psi\colon M \to N$ を複素線形な環同型とする．このとき，ある $*$ 同型 $\psi\colon M \to N$ と可逆元 $y \in N$ が存在し，$\Psi(x) = y\psi(x)y^{-1}$, $x \in M$ が成り立つ．

[18] 文字 $s, c$ はそれぞれ sin, cos の頭文字である．2 つの射影を考える際はこれらの文字を用いることが好まれる．

[19] $\psi$ は $S(M)$ から $S(N)$ への全単射に自然に拡張する．

[20] von Neumann 環はすべて半単純 Banach 環である．

[21] $X$ と $Y$ が無限次元因子環の場合に限ると，この定理の証明は次のように簡単にできる：環同型は中心を保つので，$\psi$ は中心のあいだの環同型 $\psi_0\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ に制限される．$\psi_0$ が複素線形でも共役線形でもない場合，ある有界閉集合 $F \subset \mathbb{C}$ で，$\psi_0(F)$ が非有界となるものがとれる．スペクトルが $F$ を含む作用素 $x \in X$ をとると，$\psi(x)$ のスペクトルは非有界集合 $\psi_0(F)$ を含むことになるが，これは不合理である．ゆえに $\psi_0$ は複素線形または共役線形となり，$\psi$ も然り．

定理 A および B に関し，因子環と限らない一般の von Neumann 環を考える場合には，可測作用素のかわりに**局所可測**（locally measurable）作用素,「$*$ 同型または共役線形 $*$ 同型」のかわりに「$*$ 同型と共役線形 $*$ 同型の直和」（**実 $*$ 同型**）というものを考える必要がある．これらの正確な定義についてはここでは述べないため，原論文 [11] を参照されたい．定理 B は，一般の von Neumann 環の設定で，$\mathrm{I}_\infty$ 型および III 型の場合が [11] で，$\mathrm{II}_1$ 型の場合が [1] で与えられた．これらの証明においては，適当なクラスの多元環に対して環同型が自動的にある種の連続性や線形性を持つ場合があるという考え方を応用し，定理 10 を適用できる形に落とし込む，というような議論がなされる．$\mathrm{II}_\infty$ 型の場合については，位相構造をうまく使うことに難があり，未解決で残されていたが，[12] において証明が得られた．その方針は，$\mathrm{II}_1$ 型環の場合の結果を局所的に用いることで，具体的に（共役線形）$*$ 同型 $\psi$ と非有界作用素 $y$ を構成し，$y \in S(N)$ かつ $y$ は可逆であることを示す，といったものである．以上の研究から，有限 I 型直和成分を持たない von Neumann 環に対し，射影束の束同型を作用素環の道具のみを用いて完全に記述できることがわかった[22]．

最後に，定理 B の $\psi$ と $y$ の一意性に関して述べる．$y \in S(N)$ の極分解 $y = u|y| = |y^*|u$ を考える．$|y^*| \in S(N)$ は正作用素[23]であり，$y$ の可逆性から $u \in N$ はユニタリ作用素となる．ゆえに，組 $(\psi, y)$ は $(u\psi(\cdot)u^*, |y^*|)$ ととりかえられることがわかる．そこで，定理 B において，$y$ が正であるような $(\psi, y)$ の取り方がどれだけあるか考えることが本質となる．これは次の命題により完全に理解できる．

**命題 2** ([12])**.** $M, N$ は因子環，$\psi_1, \psi_2\colon M \to N$ はそれぞれ $*$ 同型または共役線形 $*$ 同型であるとする．また $y_1, y_2 \in S(N)$ は正かつ可逆な作用素であるとする．もし $y_1\psi_1(x)y_1^{-1} = y_2\psi_2(x)y_2^{-1}$ が任意の $x \in S(M)$ について成り立つならば，$\psi_1 = \psi_2$ であり，ある正の実数 $\lambda > 0$ に対し $y_2 = \lambda y_1$ が成り立つ．

## 参考文献


[1] S. Ayupov and K. Kudaybergenov, Ring isomorphisms of Murray–von Neumann algebras. *J. Funct. Anal.* **280** (2021), no. 5, Paper No. 108891, 28 pp.

[2] A. Böttcher and I.M. Spitkovsky, A gentle guide to the basics of two projections theory. *Linear Algebra Appl.* **432** (2010), no. 6, 1412–1459.

[3] H.A. Dye, On the geometry of projections in certain operator algebras. *Ann. of Math.* (2) **61** (1955), 73–89.

[4] J. Feldman, Isomorphisms of finite type II rings of operators. *Ann. of Math.* (2) **63** (1956), 565–571.

[5] P.A. Fillmore and W.E. Longstaff, On isomorphisms of lattices of closed subspaces. *Canad. J. Math.* **36** (1984), no. 5, 820–829.

[6] L.T. Gardner, On isomorphisms of $\mathrm{C}^*$-algebras. *Amer. J. Math.* **87** (1965), 384–396.

[7] R.V. Kadison and J.R. Ringrose, “Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. II”, Academic Press, Inc., Orlando, FL (1986).

[8] I. Kaplansky, Ring isomorphisms of Banach algebras. *Canad. J. Math.* **6** (1954), 374–381.

[9] E. Kopecká and A. Paszkiewicz, Strange products of projections. *Israel J. Math.* **219** (2017), no. 1, 271–286.


[22] なお，$\mathrm{I}_n$ 型 von Neumann 環については，局所可測作用素のなす環の環同型がその中心の環同型で記述できる．しかし，それは実線形と限らず，ワイルドなふるまいをする例が存在する．詳しくは [11, Proposition 4.2] の前後を参照されたい．

[23] $S(N)$ の作用素 $a$ は，ある $b \in S(N)$ について $a = b^*b$ と表されるとき**正**であるという．実は，可測作用素を考える限りは，一般の非有界作用素を考える際に現れる面倒（たとえば対称作用素と自己共役作用素の違いなど）は生じないことが多い．

[10] V.I. Lomonosov and V.S. Shulman, Halmos problems and related results in the theory of invariant subspaces. *Uspekhi Mat. Nauk* **73** (2018), no. 1(439), 35–98; translation in *Russian Math. Surveys* **73** (2018), no. 1, 31–90.

[11] M. Mori, Lattice isomorphisms between projection lattices of von Neumann algebras. *Forum Math. Sigma* **8** (2020), Paper No. e49, 19 pp.

[12] M. Mori, Ring isomorphisms of type $\mathrm{II}_\infty$ locally measurable operator algebras. Preprint, arXiv:2206.00875.

[13] F.J. Murray and J. von Neumann, On rings of operators. *Ann. of Math.* (2) **37** (1936), no. 1, 116–229.

[14] J. von Neumann, Zur Theorie der unbeschränkten Matrizen. *J. Reine Angew. Math.* **161** (1929), 208–236.

[15] J. von Neumann, On rings of operators. III. *Ann. of Math.* (2) **41** (1940), 94–161.

[16] J. von Neumann, "Continuous geometry", Foreword by Israel Halperin, Princeton Mathematical Series, No. 25 Princeton University Press, Princeton, N.J. (1960).

[17] T. Okayasu, A structure theorem of automorphisms of von Neumann algebras. *Tohoku Math. J.* (2) **20** (1968), 199–206.

[18] S. Sakai, "$\mathrm{C}^*$-algebras and $\mathrm{W}^*$-algebras", Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 60. Springer-Verlag, New York-Heidelberg (1971).

[19] I.E. Segal, A non-commutative extension of abstract integration. *Ann. of Math.* (2) **57** (1953), 401–457.

[20] 綿谷 安男，ヒルベルト空間の部分空間の配置と箙のヒルベルト表現．第 58 回実函数論・函数解析学合同シンポジウム講演集 (2019), 52–63.