

# Loewner's theorem for maps on operator domains\* †

森 迪也 ‡

## 概要

Peter Šemrl 氏 (University of Ljubljana) との共同研究 [8] について概説する。

Loewner の定理によると, 実区間上の作用素単調関数は上半平面上の正則関数により記述される. 本稿では, 作用素領域上の局所順序同型を作用素上半平面上の双正則写像により特徴づける. そのような写像の具体的な公式を与え, 「極大な」局所順序同型についての性質を明らかにする. また, 有限次元の場合は, 行列領域上の任意の順序埋め込みが, 行列領域への (全射な) 同相写像となることを説明する.

## 1 序

まず, Loewner の定理について思い出そう.  $f$  を実区間  $(a, b)$  上の実関数とする.  $f$  が次の条件を満たすとき,  $f$  は  $n$ -単調であるという: スペクトルが  $(a, b)$  に含まれる任意の  $n \times n$  エルミート行列  $X, Y$  について,  $X \leq Y \Rightarrow f(X) \leq f(Y)$  が成立.  $f$  が任意の正整数  $n$  について  $n$ -単調であるとき,  $f$  は作用素単調であるという. 作用素単調関数は明らかに (広義) 単調増加である.

C. Loewner<sup>1</sup> は [5] において, 作用素単調関数, すなわち作用素の順序を保つ写像のクラスが, ある正則関数のクラスに一致することを導いた.  $\Pi := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$  で複素上半平面を表す. Loewner の定理は, 関数  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  の作用素単調性が次の条件と同値である, というものである.

- ある複素数値連続写像  $\tilde{f}: \Pi \cup (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$  であって,  $f$  を拡張し (すなわち  $f(t) = \tilde{f}(t)$   $\forall t \in (a, b)$ ),  $f(\Pi) \subset \bar{\Pi}$  かつ  $\tilde{f}$  は  $\Pi$  上正則であるものが存在する.

鏡像の原理により, この写像は  $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \cup (a, b)$  上の正則写像に拡張することに注意. このような正則写像は Pick 関数と呼ばれ, より具体的には次のように表されることが知られている.

- $\mathbb{R} \setminus (a, b)$  上のある有限測度  $\mu$  と実数  $c \in \mathbb{R}, d \geq 0$  が存在して, 任意の  $x \in (a, b)$  に対し

$$f(x) = c + dx + \int_{\mathbb{R} \setminus (a, b)} \frac{1 + xy}{y - x} d\mu(y)$$

が成り立つ.

\*令和 2 年度作用素論・作用素環論研究会アブストラクト

†森の研究は数物フロンティア・リーディング大学院プログラム (FMSP), 科研費 19J14689 および日本学術振興会若手研究者海外研究プログラムからの助成を受けたものである.

‡〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学大学院数理科学研究科, mmori@ms.u-tokyo.ac.jp

<sup>1</sup>時代や文献によって英語式綴り Charles Loewner, ドイツ語式 Karl Löwner, チェコ語式 Karel Löwner が混在するが, 本稿では英語式に統一する.

Loewner の定理について詳しく学ぶには, [1], [11] を参照されたい.

Loewner の定理を, より一般的な視点から見直したい. そのために記号や用語を準備しておく.  $H$  を複素 Hilbert 空間とする.  $B(H)$  で  $H$  上の有界線形作用素全体,  $S(H)$  で有界自己共役線形作用素全体を表す.  $B(H)$  の単位元 ( $H$  上の恒等作用素) を  $I$  と表す. 本稿においては,  $S(H)$  の空でない (作用素ノルム位相に関する) 開連結集合を **作用素領域** と呼ぶ<sup>2</sup>.  $U, V$  を  $S(H)$  の部分集合とする. 写像  $\phi: U \rightarrow V$  が **順序を保つ** とは, 任意の  $X, Y \in U$  に対して  $X \leq Y \Rightarrow \phi(X) \leq \phi(Y)$  が成り立つことをいう. 任意の  $X, Y \in U$  に対して  $X \leq Y \iff \phi(X) \leq \phi(Y)$  が成り立つならば,  $\phi$  は **順序埋め込み** であるという. 順序埋め込みは単射である. 全単射な順序埋め込みを **順序同型** という. 作用素  $A, B \in S(H)$  に対して, 記号  $A < B$  で  $A \leq B$  かつ  $B - A$  は可逆であることを表す.  $A < B$  なる  $A, B \in S(H)$  に対して,  $(A, B) := \{X \in S(H) \mid A < X < B\}$ ,  $[A, B] := \{X \in S(H) \mid A \leq X \leq B\}$  と定める. このように表せる集合をそれぞれ作用素開区間, 作用素閉区間と呼ぶことにしよう.

単調増加関数  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  に対し, 次が互いに同値であることが確かめられる ([11, Chapter 2] を参照):

- $f$  は作用素単調である.
- 任意の Hilbert 空間  $H$  と, スペクトルが  $(a, b)$  に含まれる  $H$  上の任意の自己共役作用素  $X, Y$  に対して,  $X \leq Y \Rightarrow f(X) \leq f(Y)$  が成立.
- ある無限次元 Hilbert 空間  $H$  が存在して, スペクトルが  $(a, b)$  に含まれる  $H$  上の任意の自己共役作用素  $X, Y$  に対して,  $X \leq Y \Rightarrow f(X) \leq f(Y)$  が成立.

よって, Loewner の定理は, 次のような主張であると読み替えられる.  $\dim H = \infty$  とする. 作用素領域  $U = (aI, bI)$  から  $S(H)$  への写像  $f: U \rightarrow S(H)$  が順序を保ち, かつ functional calculus により表されるならば,  $f$  は適当な条件を満たす正則関数に拡張する. では, functional calculus で表されるとは限らない, 作用素領域上の順序を保つ一般の写像についても, Loewner の定理の類似が成り立つだろうか. 少し考察してみると, それは到底不可能であろう, ということがわかる. (たとえば,  $S(H)$  からそれ自身への順序を保つ写像をすべて記述するといったことは, 仮に写像が線形であると仮定しても, 有限次元の場合に限ってもとても難しい.) そこで, 順序を保つという仮定を強め, 順序同型について考えてみる. 我々は, Loewner の定理の類似として, 作用素領域の順序同型と作用素上半平面の双正則写像が対応することを発見した.

主定理の主張を述べるために, さらに準備を進める.  $U \subset S(H)$  を作用素領域とする.  $\phi: U \rightarrow S(H)$  が **局所順序同型** であるとは, 任意の  $X \in U$  に対して, ある作用素領域  $V, W$  で,  $X \in V \subset U, W \subset S(H), \phi(V) = W$  を満たし, かつ制限写像  $\phi: V \rightarrow W$  が順序同型になるものが存在することを意味する. 特に, 作用素領域ふたつのあいだの順序同型は局所順序同型である. **作用素上半平面**  $\Pi(H)$  とは, ある  $X \in S(H)$  と正可逆作用素  $Y \in S(H)$  により  $X + iY$  と表される作用素の全体である.  $U \subset B(H)$  を開集合とする. 写像  $\phi: U \rightarrow B(H)$  が **正則** (あるいは至るところ **Fréchet 微分可能**) であるとは, 任意の  $X \in U$  に対してある有界複素線形作用素  $D\phi(X): B(H) \rightarrow B(H)$  が存在して,

$$\frac{\|\phi(X + Y) - \phi(X) - (D\phi(X))(Y)\|}{\|Y\|} \rightarrow 0 \quad (\|Y\| \rightarrow 0)$$

が成り立つことを意味する.  $U, V \subset B(H)$  を開集合とする.  $\phi: U \rightarrow V$  が全単射正則写像で,  $\phi^{-1}$  も正則であるとき,  $\phi$  は **双正則写像** であるという.

<sup>2</sup> $B(H)$  の開連結集合は作用素領域と呼ばないことに注意.

**定理 1 (森–Šemrl)**  $\dim H \geq 2$  として,  $U \subset S(H)$  を作用素領域とする. 写像  $\phi: U \rightarrow S(H)$  に関する次の条件は互いに同値である.

- (a)  $\phi$  は局所順序同型である.
- (b) ある連続写像  $\tilde{\phi}: U \cup \Pi(H) \rightarrow B(H)$  であって,  $\phi$  を拡張し, かつ  $\Pi(H)$  をそれ自身に双正則に移すようなものが存在する.

ここで, (a) $\Rightarrow$ (b) において,  $\dim H \geq 2$  という仮定は必要である. たとえば,  $U = \mathbb{R}$  の場合を考えれば反例がたくさん見つかる. 以下では, 話を単純にするため, **Hilbert 空間は常に 2 次元以上のものを考える.**

$\dim H$  が有限である場合は, より多くのことが成り立つ.  $M_n$  で  $n \times n$  複素行列の全体,  $S_n$  で  $n \times n$  エルミート行列の全体を表す. 行列上半平面  $\Pi_n$  とは,  $n \times n$  複素行列で, 虚部が正可逆なもの全体である.

**定理 2 (森–Šemrl)**  $n \geq 2$  として,  $U \subset S_n$  を行列領域 (開連結集合) とする. 写像  $\phi: U \rightarrow S_n$  に関する次の条件は互いに同値である.

- $\phi$  は順序埋め込みである.
- ある連続写像  $\tilde{\phi}: U \cup \Pi_n \rightarrow M_n$  であって,  $\phi$  を拡張し, かつ  $\Pi_n$  をそれ自身に双正則に移すようなものが存在する.

この定理は特に, 行列領域の順序埋め込みの像が行列領域となることを示唆する. ここで有限次元性は極めて重要である. たとえば,  $H$  が数列空間  $\ell_2$  のとき,  $H$  の単位球面上稠密な列  $(h_n)_{n \geq 1}$  をとれば,  $X \mapsto \text{Diag}((Xh_n, h_n))_{n \geq 1}$  は  $S(H)$  からそれ自身への順序埋め込みだが, この像は開集合からは程遠い.

特筆すべき点として, 定理 1, 2 は  $\dim H = n$  に依らずに成り立つことが挙げられる. 一方,  $n$ -単調関数の特徴づけとして次の定理が知られている.

**定理 3 (Loewner)**  $2 \leq n < \infty$ ,  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  とする. 次は同値.

1.  $f$  は  $n$ -単調である. すなわち,  $f$  は *functional calculus* により  $(aI, bI) \subset S_n$  から  $S_n$  への順序を保つ写像を与える.
2.  $f \in C^1(a, b)$  であり, 任意の  $a < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < b$  に対し, *Loewner* 行列と呼ばれる行列  $(f^{[1]}(\lambda_i, \lambda_j))_{i, j} \in S_n$  が半正定値となる, 但し

$$f^{[1]}(\lambda_i, \lambda_j) = \begin{cases} \frac{f(\lambda_j) - f(\lambda_i)}{\lambda_j - \lambda_i} & \text{if } i \neq j \\ f'(\lambda_i) & \text{if } i = j. \end{cases}$$

一般に, 与えられた関数が  $n$ -単調かどうか判定することは簡単ではないと思われるが,  $n < m$  のとき,  $m$ -単調関数全体は  $n$ -単調関数全体より真に小さい集合であることが知られている [11, Chapter 7]. この事実は, 我々の定理と対照的である.

## 2 定理 1 の証明のあらまし

この節では, 定理 1 の証明を説明する. 簡単のため,  $0 \in U$ ,  $\phi(0) = 0$  を仮定しよう. この仮定の下で, 我々は定理 1 の条件 (a), (b) が次と同値であることを示す.

(c) ある  $A \in S(H)$  と有界線形全単射  $T \in B(H)$  が存在して、任意の  $X \in U$  に対し  $AX+I$  は可逆であり、 $f(X) = TX(AX+I)^{-1}T^* \forall X \in U$  または  $f(X)^t = TX(AX+I)^{-1}T^* \forall X \in U$  が成り立つ。

ここで、 $H$  にはあらかじめ正規直交基底が固定されているものとして、 $X \in B(H)$  に対して  $X^t$  はこの正規直交基底についての  $X$  の転置を表す。(c) の形で表される写像が、 $\Pi(H)$  上の双正則写像を与えることは計算により容易に示される。すなわち、(b) は (c) から導かれる。また、 $U$  の各点における Fréchet 微分を考えることで、微分積分的考察により (c) から (a) を導くことも難しくない<sup>3</sup>。以下では (a) $\Rightarrow$ (b) および (b) $\Rightarrow$ (c) の証明を考える。そのために、我々は二つの公式を用いる。一つは作用素単位区間  $[0, I] \subset S(H)$  上の自己順序同型の一般形を与える Šemrl の公式、もう一つが  $B(H)$  の単位開球上の自己双正則写像の一般形を与える Harris の公式である。それぞれについて詳しく見ていこう。

## 2.1 Šemrl の公式

Šemrl の公式について説明する前に、順序同型に関する Kadison と Molnár の結果を紹介しよう。Kadison は 1952 年、単位的  $C^*$  環の自己共役作用素全体のあいだの単位元を保つ線形な順序同型が Jordan  $*$ -同型<sup>4</sup>に拡張することを示した [4, Corollary 5]。Kadison の定理を  $B(H)$  に適用すると特に、 $S(H)$  上の線形自己順序同型は、ある  $H$  上の有界線形全単射  $T \in B(H)$  について  $X \mapsto TXT^*$  または  $X \mapsto (TXT^*)^t$  の形をしていることがわかる。Molnár は線形性の仮定を外した場合を考え、次の結果を与えた。

**定理 4 (Molnár, [6, Theorem 2])**  $\Phi: S(H) \rightarrow S(H)$  を順序同型とする。このとき、作用素  $B \in S(H)$  と有界線形全単射  $T \in B(H)$  が存在して、 $\Phi(X) = TXT^* + B$ ,  $X \in S(H)$  または  $\Phi(X)^t = TXT^* + B$ ,  $X \in S(H)$  が成り立つ。

すなわち、 $S(H)$  上の自己順序同型は自動的に affine (線形写像を平行移動したもの) になってしまう。

一方、Šemrl は量子力学的な動機をもとに、作用素単位区間  $[0, I] \subset S(H)$  上の自己順序同型について調べた。実数  $p < 1$  を固定する。閉区間  $[0, 1]$  上の関数

$$f_p(t) := \frac{t}{pt + 1 - p}, \quad t \in [0, 1]$$

を考える。これは  $[0, 1]$  上の同相写像である。functional calculus により  $[0, I]$  上の写像を  $X \mapsto f_p(X)$  で定めれば、これは  $[0, I]$  上の自己順序同型となることが示せる。Šemrl は以下の公式を与えた。

**定理 5 (Šemrl, [9, 10])**  $\phi: [0, I] \rightarrow [0, I]$  を順序同型とする。このとき、二つの実数  $0 < p < 1$ ,  $q < 0$  と  $H$  上の有界線形全単射  $T \in B(H)$  で  $\|T\| \leq 1$  を満たすものが存在して、

$$\phi(X) = f_q \left( (f_p(TT^*))^{-1/2} f_p(TXT^*) (f_p(TT^*))^{-1/2} \right), \quad X \in [0, I] \quad (1)$$

<sup>3</sup>詳細は [8, Section 2] を見よ。

<sup>4</sup> $C^*$  環  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  に対して、条件

$$J(X^*) = J(X)^*, \quad J(XY + YX) = J(X)J(Y) + J(Y)J(X), \quad \forall X, Y \in \mathcal{A}$$

を満たす複素線形全単射  $J: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  を **Jordan  $*$ -同型**と呼ぶ。Jordan  $*$ -同型は適当な意味で  $*$ -同型と  $*$ -反同型の直和であることが知られている。

または

$$\phi(X)^t = f_q \left( (f_p(TT^*))^{-1/2} f_p(TXT^*) (f_p(TT^*))^{-1/2} \right), \quad X \in [0, I]$$

が成り立つ.

少し計算すれば, (1) で表される写像は  $\Pi(H)$  上の双正則写像を定めることが示せる. また, 転置写像  $X \mapsto X^t$  は明らかに  $\Pi(H)$  上の双正則写像である. ゆえに, 作用素単位区間  $[0, I]$  上の任意の自己順序同型は  $\Pi(H)$  上の双正則写像に「解析接続」される. 任意の作用素閉区間は作用素単位区間  $[0, I]$  に affine 順序同型により移されることより, 次がわかる: 任意の作用素閉区間ふたつのあいだの順序同型は  $\Pi(H)$  上の双正則写像に解析接続される [8, Lemma 3.4].

さて, 条件 (a) から (b) を導く道順を説明しよう.  $\phi: U \rightarrow S(H)$  を局所順序同型とする. このとき, 各点  $X \in U$  に対して, ある作用素  $A, B \in U$  であって,  $A < X < B$ ,  $[A, B] \subset U$ ,  $\phi(A) < \phi(X) < \phi(B)$ ,  $[\phi(A), \phi(B)] \subset \phi(U)$ ,  $\phi([A, B]) = [\phi(A), \phi(B)]$  を満たし, かつ  $\phi$  が順序同型  $\phi_X: [A, B] \rightarrow [\phi(A), \phi(B)]$  に制限されるようなものが存在する [8, Lemma 3.2] ことが示せる. 前段落の考察より, 各順序同型  $\phi_X$  は  $\Pi(H)$  上の双正則写像を定めるが, 正則写像の一致の定理 [8, Proposition 3.1] および  $U$  の連結性より, この双正則写像は  $X$  の取り方に依らないことがわかり, (b) が導かれる.

## 2.2 Harris の公式

Harris の公式について説明する前に, 等距離写像に関する Kadison の結果を紹介しよう. Kadison は 1951 年, 単位的  $C^*$  環ふたつのあいだの単位元を保つ線形な等距離全単射が Jordan  $*$ -同型であることを示した [3]. Kadison の定理を  $B(H)$  に適用すると特に,  $B(H)$  からそれ自身への線形等距離全単射は, ある  $H$  上のユニタリ作用素  $u, v: H \rightarrow H$  について  $X \mapsto uXv$  または  $X \mapsto uX^t v$  の形をしていることがわかる ([7, Theorem A.9] も参照).

$B(H)_0$  で  $B(H)$  の単位開球  $\{X \in B(H) \mid \|X\| < 1\}$  を表す. Harris は一変数複素函数論の作用素論的な延長として, 次の定理を与えた<sup>5</sup>.

**定理 6 (Harris, [2, Theorem 3, Theorem 1])**  $\psi$  を  $B(H)_0$  上の自己双正則写像とする. このとき, ある線形等距離全単射  $\psi_0: B(H) \rightarrow B(H)$  と  $S \in B(H)_0$  が存在して, 任意の  $X \in B(H)_0$  に対し

$$\psi(X) = \psi_0 \left( (I - SS^*)^{-1/2} (X + S) (I + S^* X)^{-1} (I - S^* S)^{1/2} \right)$$

が成り立つ. 特に,  $\psi(0) = 0$  ならば,  $\psi$  は線形等距離全単射に拡張する.

他方, 写像  $X \mapsto (X - iI)(X + iI)^{-1}$  は  $\Pi(H)$  から  $B(H)_0$  への双正則写像であることが確かめられる [2, Theorem 12]<sup>6</sup>. これらの事実を組み合わせることで, (b) から (c) を導くことができる [8, Proposition 4.1]. (但し, これらの式から直ちに (c) の式を導くことは著者にはできなかったため, [8] ではやや間接的な議論も経由して証明がなされている.)

<sup>5</sup>Harris は  $J^*$ -algebra と呼ばれる  $C^*$  環を含むクラスの空間についてこの定理を示した. 後に発展する  $JB^*$ -triple などの理論は, Harris の定理を含む正則写像についての一連の研究に起源を持つと思われる.

<sup>6</sup>これは一次分数変換の類似である.

### 3 極大局所順序同型の性質

$A \in S(H)$  に対して, 写像  $\Phi_A: U_A \rightarrow S(H)$  を次で定める. まず,  $U_A$  を開集合

$$\{X \in S(H) \mid AX + I \text{ は可逆}\} = \{X \in S(H) \mid XA + I \text{ は可逆}\}$$

における 0 の連結成分として,  $X \in U_A$  に対し

$$\Phi_A(X) = X(AX + I)^{-1} = (XA + I)^{-1}(XAX + X)(AX + I)^{-1} = (XA + I)^{-1}X$$

とおく. (c) $\Rightarrow$ (a) より,  $\Phi_A$  は局所順序同型である. また, 簡単な計算により,  $\Phi_A$  は  $U_A$  から  $U_{-A}$  への全単射で, 逆写像は  $\Phi_{-A}$  であることがわかる. さらに, 列  $X_n \in U_A$  が  $S(H) \setminus U_A$  に属する作用素にノルム収束するとき,  $\|\Phi_A(X_n)\| \rightarrow \infty$  となる [8, Lemma 4.2] ことも容易にわかる. よって,  $\Phi_A$  は  $U_A$  より広い作用素領域上の局所順序同型に拡張し得ない, という意味において極大である. (a) $\Rightarrow$ (c) より, 局所順序同型の性質をより詳しく調べるためには結局, 写像  $\Phi_A: U_A \rightarrow U_{-A}$  について考えれば十分であろう. この節では, 局所順序同型の性質を 2 つ説明する.

定理 4 より,  $S(H)$  上の自己順序同型は affine であった. これらの順序同型を「自明なものである」ととらえれば, 局所順序同型全体の集合について次のような同値関係を与えることは自然だろう.  $U, U' \subset S(H)$  を作用素領域,  $\phi: U \rightarrow S(H)$ ,  $\phi': U' \rightarrow S(H)$  を局所順序同型とする. ある  $S(H)$  上の (affine) 自己順序同型  $\phi_1, \phi_2$  に対し  $\phi' = \phi_2 \circ \phi \circ \phi_1$  が成り立つとき,  $\phi$  と  $\phi'$  は同値であるということにする.

**命題 7 (森–Šemrl, [8, Propositions 5.1, 5.2, 5.5])** 上述の局所順序同型の同値関係について, 次が成り立つ.

1. 任意の局所順序同型  $\phi$  はある極大局所順序同型に一意的に拡張する.  $\phi$  が極大局所順序同型ならば, ある  $A \in S(H)$  が存在して  $\phi$  は  $\Phi_A$  と同値である.
2. 任意の  $A \in S(H)$  と線形または反線形な有界全単射  $T: H \rightarrow H$  について,  $\Phi_A$  と  $\Phi_{TAT^*}$  は同値である.
3.  $A, B \in S(H)$ ,  $U \subset U_A$ ,  $V \subset U_B$  を作用素領域とする. 制限写像  $\Phi_A|_U$  と  $\Phi_B|_V$  が互いに同値ならば, ある線形または反線形な有界全単射  $T: H \rightarrow H$  について  $B = TAT^*$  が成り立つ.

1 は既に述べたことから簡単にわかる (拡張の一意性は正則写像の一致の定理 [8, Proposition 3.1] で示せる). 2 は次より直ちに従う.  $S(H)$  上の自己順序同型  $\psi$  を  $\psi(X) = T^*XT$ ,  $X \in S(H)$  で定めれば,  $\Phi_{TAT^*} = \psi^{-1} \circ \Phi_A \circ \psi$  が成り立つ. これは簡単な計算により示される. 3 の証明には,  $\Phi_A$  の平行移動を, 別の極大局所順序同型  $\Phi_B$  を用いて表すための変換公式 [8, Proposition 5.4] を用いる. そのためにはやや複雑な計算が必要となるため, 詳細は省略する.

局所順序同型は定義域全体で順序を保つとは限らない. たとえば  $H$  が可分無限次元であるとして, 作用素領域  $\{X \in S(H) \mid X \text{ は可逆, } \text{rank } X_+ = \infty = \text{rank } X_-\}$  を  $U$  とおく. 写像  $\phi: U \rightarrow U$  を  $\phi(X) = -X^{-1}$  で定める. このとき, 条件 (b) が簡単に確かめられるため,  $\phi$  は (極大な) 局所順序同型である<sup>7</sup>. しかし, たとえば 0 でない階数  $\infty$  の射影作用素  $P_1, P_2, P_3$  が  $P_1 + P_2 + P_3 = I$  を満たせば,  $P_1 - P_2 - P_3 \leq P_1 + P_2 - P_3$  および  $\phi(P_1 - P_2 - P_3) \not\leq \phi(P_1 + P_2 - P_3)$  が成り立

<sup>7</sup>少し計算すると, 任意の  $A \in U$  に対しこの  $\phi$  は  $\Phi_A$  と同値であることも示せる. この事実を定理 8 と比較せよ.

つ. 一方で, 同じ形の写像  $A \mapsto -A^{-1}$  が正可逆作用素全体から負可逆作用素全体への順序同型を与える<sup>8</sup>ことは作用素論における基本的な事実である. では, 局所順序同型はいつ像への順序同型(順序埋め込み)になるだろうか. 我々は, 極大局所順序同型についてこの問いへの完全な解を与えた.

**定理 8 (森–Šemrl, [8, Theorem 5.9])**  $A \in S(H)$  に対し, 次は互いに同値である.

1.  $\Phi_A: U_A \rightarrow U_{-A}$  は順序同型である.
2. 二つの作用素  $A_+, A_-$  のうち, 少なくとも一方がコンパクト作用素である.

特に,  $\dim H < \infty$  であれば, 任意の局所順序同型が実は順序埋め込みであることがわかる.

定理 8 の証明のアイデアをごく簡単に述べよう.  $A_+, A_-$  がともにコンパクトでないとき  $\Phi_A$  が順序同型でないことは, 上記の  $P_1, P_2, P_3$  の取り方を適切に真似して, 順序を保たない組を具体的にを見つけることで示される.  $A_+, A_-$  の一方, たとえば  $A_+$  がコンパクトなときは, まず  $A_+$  を有限階数の作用素で近似する. もし  $A_+$  の階数  $m$  が有限である場合は, 第  $m$  固有値に着目することで min-max 原理などを用い,  $\Phi_A$  が順序を保つことが証明される.  $A_-$  がコンパクトのときも同様である. よって  $\Phi_A^{-1} = \Phi_{-A}$  も順序を保ち, したがって  $\Phi_A$  は順序同型となる.

## 4 有限次元の場合

定理 8 より,  $n = \dim H < \infty$  の場合, 局所順序同型は順序埋め込みになるのだった. ゆえに定理 1 より, 定理 2 の証明には, 行列領域  $U \subset S_n$  から  $S_n$  への順序埋め込み  $\phi$  の像が行列領域となることを示せば十分である. この証明においては, Wigner のユニタリ反ユニタリ定理として知られる次の定理を用いる (たとえば [7, Section 0.3] を見よ):  $M_n$  の階数 1 の射影全体を  $P_n^1$  と表す.  $f: P_n^1 \rightarrow P_n^1$  が作用素ノルム距離に関し等距離写像ならば<sup>9</sup>, あるユニタリまたは反ユニタリ  $u: H \rightarrow H$  が存在して  $f(P) = uPu^*$ ,  $P \in P_n^1$  が成り立つ.

$\phi: U \rightarrow S_n$  を行列領域  $U \subset S_n$  の順序埋め込みとする. まずはじめに,  $\phi$  が連続であるような  $X \in U$  がたくさんあることを示す. より具体的には,  $X \in U$  に対し,  $\mathbb{R}$  の 0 の近傍で定義される関数  $t \mapsto \operatorname{tr} \phi(X + tI) \in \mathbb{R}$  を考える. この単調増加関数が 0 で連続ならば,  $\phi$  が  $X$  で連続であることが簡単な計算でわかる [8, Lemma 6.2]. 実区間上の単調増加関数は可算個の点を除き連続であるため,  $\phi$  が連続な点はたくさんある.

$E_n$  で  $S_n$  の単位閉区間  $[0_n, I_n]$  を表そう.  $E_n$  が  $S_m$  への順序埋め込みを持つならば  $m \geq n$  であること [8, Lemma 6.3] が比較的容易に示せる. これより, 適当な正規化をすることで, 求める結論を得るには, 次を示せば十分であることがわかる. 順序埋め込み  $\phi: E_n \rightarrow E_n$  が,  $\phi(0) = 0$ ,  $\phi(I) = I$ ,  $\phi(I/2) = I/2$  を満たし, 3 点  $0, I/2, I$  で連続であるならば,  $\phi(E_n) = E_n$  が成り立つ. 以下, この条件を満たす写像  $\phi: E_n \rightarrow E_n$  を考えよう [8, Proof of Theorem 6.10, 第 2 段落以降].

すると, 各  $1 \leq k \leq n-1$  に対し,  $\phi$  は階数  $k$  の射影作用素を階数  $k$  の射影作用素に移すことがわかる. 丁寧に計算すると,  $\phi$  の  $P_n^1$  への制限は, 作用素ノルムに関し等距離写像であることが示せる. ゆえに Wigner の定理より  $\phi$  はあるユニタリまたは反ユニタリ  $u: H \rightarrow H$  について  $P_n^1$  上  $X \mapsto uXu^*$  という形をしている. 丁寧に計算をさらに重ねると, この式は  $E_n$  上でも成り立つことがわかり, 証明が完了する.

<sup>8</sup>任意の正可逆作用素  $A$  について, この順序同型は  $\Phi_A$  と同値であることも示せる. この事実を定理 8 と比較せよ.

<sup>9</sup>Brouwer の領域不変性 (invariance of domain) 定理より, ユークリッド空間  $\mathbb{R}^m$  の開集合から  $\mathbb{R}^m$  への連続単射の像は開集合になることを思い出す.  $P_n^1$  を  $2n-2$  次元のコンパクト・連結な位相多様体とみることで, この仮定と領域不変性より  $f$  は自動的に全射になる.

この節の後半では、 $n = \dim H < \infty$  の場合について、行列領域の順序埋め込み = 順序同型をブロック行列を用いて具体的にとらえたい。  $0 \leq p \leq n$  に対して、正の固有値を  $p$  個、負の固有値を  $n - p$  個持つ可逆な  $n \times n$  エルミート行列全体を  $S_n(p)$  で表す。但し、各固有値は重複度を込めて数えるものとする。非負整数  $m, p$  が  $p \leq m \leq n$  を満たすとする。  $X \in S_n$  をブロックに分ける：

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^* & X_{22} \end{bmatrix},$$

但し  $X_{11} \in S_m$ .

$$U(m, p) = \{X \in S_n \mid X_{11} \in S_m(p)\}$$

とおく。明らかに  $U(m, p)$  は  $S_n$  の行列領域である。写像  $\phi_{m,p} : U(m, p) \rightarrow U(m, m - p)$  を

$$\phi_{m,p}(X) = \begin{bmatrix} -X_{11}^{-1} & iX_{11}^{-1}X_{12} \\ -iX_{12}^*X_{11}^{-1} & X_{22} - X_{12}^*X_{11}^{-1}X_{12} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^* & X_{22} \end{bmatrix} \in U(m, p)$$

で定める。特に、 $m = p = 0$  ならば  $X = X_{22}$  であり、 $\phi_{0,0}$  は  $S_n$  上の恒等写像である。また、 $m = n$  ならば  $\phi_{n,p}$  は  $S_n(p)$  から  $S_n(n - p)$  への全単射  $X \mapsto -X^{-1}$  に他ならない。

簡単な計算から、任意の  $X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^* & X_{22} \end{bmatrix} \in U(m, p)$  に対し、

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & 0 \\ X_{12}^* & X_{22} & iI \\ 0 & -iI & 0 \end{bmatrix} \in S_{2n-m}(n+p-m) \subset M_{2n-m}$$

および  $M_{2n-m}$  で

$$-\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & 0 \\ X_{12}^* & X_{22} & iI \\ 0 & -iI & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -X_{11}^{-1} & 0 & iX_{11}^{-1}X_{12} \\ 0 & 0 & -iI \\ -iX_{12}^*X_{11}^{-1} & iI & X_{22} - X_{12}^*X_{11}^{-1}X_{12} \end{bmatrix} \quad (2)$$

が成り立つことがわかる。ここで、 $I$  は  $(n - m) \times (n - m)$  単位行列である。この式を使えば、 $\phi_{m,p}$  が  $U(m, p)$  から  $U(m, m - p)$  への極大順序同型であることが確かめられる [8, Lemma 6.12]。さらに、 $(n + 2)(n + 1)/2$  個の順序同型からなる族  $(\phi_{m,p})_{0 \leq p \leq m \leq n}$  は互いに非同値であることが、領域の形に関する考察より簡単に示せる。他方、命題 7 および Sylvester の慣性律より、 $S_n$  における極大 (局所) 順序同型の同値類の数は  $(n + 2)(n + 1)/2$  個である [8, Corollary 5.6]。よって  $(\phi_{m,p})_{0 \leq p \leq m \leq n}$  は  $S_n$  における極大 (局所) 順序同型の同値類をすべて尽くす<sup>10</sup>。以上をまとめると、次がわかる [8, Theorem 6.14]。  $\phi : U \rightarrow S_n$  を行列領域  $U \subset S_n$  の順序埋め込みとする。このとき、非負整数の組  $p, m$  で  $p \leq m \leq n$  を満たすものがただ一組存在して、 $\phi$  は  $\phi_{m,p}$  のある制限写像と同値である。

以上の議論からの興味深い帰結は、任意の順序埋め込みは次の意味で写像  $X \mapsto -X^{-1}$  の “corner” として実現できるという点である。  $0 \leq p \leq m \leq n$  として、affine 順序埋め込み  $\psi, \psi' : S_n \rightarrow S_{2n-m}$  を

$$\psi \left( \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^* & X_{22} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & 0 \\ X_{12}^* & X_{22} & iI \\ 0 & -iI & 0 \end{bmatrix}, \quad \psi' \left( \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^* & X_{22} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} X_{11} & 0 & X_{12} \\ 0 & 0 & -iI \\ X_{12}^* & iI & X_{22} \end{bmatrix}.$$

<sup>10</sup>実は、 $\text{rank } A_+ = p, \text{rank } A_- = m - p$  なる  $A \in S_n$  に対して、 $\Phi_A$  は  $\phi_{m,p}$  と同値である。



で定める. (2) より  $\phi_{m,p}(X) = \psi'^{-1}(-\psi(X)^{-1})$ ,  $X \in U(m,p)$  が成り立つ. ゆえに, 行列領域  $U \subset S_n$  の任意の順序埋め込み  $\phi : U \rightarrow S_n$  に対し, ある  $0 \leq m \leq n$  と affine 順序埋め込み  $\psi_1, \psi_2 : S_n \rightarrow S_{2n-m}$  が存在して  $\phi(X) = \psi_2^{-1}(-\psi_1(X)^{-1})$ ,  $X \in U$  を満たす.

## 5 応用

主定理を用いることで, たとえば Molnár の定理 (定理4) は瞬時に導くことができる [8, Theorem 4.6]. さらに, 作用素単位区間上の自己順序同型の一般形は, Šemrl の公式 (1) より単純な次の形で表せることがわかる<sup>11</sup>.

**定理 9 (森–Šemrl, [8, Theorem 7.3])**  $\phi : [0, I] \rightarrow [0, I]$  を順序同型とする. このとき, (絶対値 1 の複素数倍を除き唯一つの) 線形または反線形な有界全単射  $T : H \rightarrow H$  が存在して, 任意の  $X \in [0, I]$  について

$$\phi(X) = T\Phi_{T^*T-I}(X)T^* = T(X(T^*T - I) + I)^{-1}XT^*$$

を満たす.

その他の応用や考察, 仮定を外した場合の反例などについては [8, Section 7] にまとめた.

## 参考文献

- [1] W.F. Donoghue, Jr., *Monotone Matrix Functions and Analytic Continuation*, Grundlehren Math. Wissen. **207**, Springer, 1974.
- [2] L.A. Harris, Bounded symmetric homogeneous domains in infinite dimensional spaces, *Lecture Notes in Math.* **364** (1974), 13–40.
- [3] R.V. Kadison, Isometries of operator algebras, *Ann. of Math.* **54** (1951), 325–338.
- [4] R.V. Kadison, A generalized Schwarz inequality and algebraic invariants for operator algebras, *Ann. of Math.* **56** (1952), 494–503.
- [5] K.T. Löwner, Über monotone Matrixfunktionen, *Math. Z.* **38** (1934), 177–216.
- [6] L. Molnár, Order-automorphisms of the set of bounded observables, *J. Math. Phys.* **42** (2001), 5904–5909.
- [7] L. Molnár, *Selected preserver problems on algebraic structures of linear operators and on function spaces*, Lecture Notes in Mathematics **1895**, Springer-Verlag, 2007.
- [8] M. Mori and P. Šemrl, Loewner’s theorem for maps on operator domains, preprint, arXiv:2006.04488.
- [9] P. Šemrl, Comparability preserving maps on Hilbert space effect algebras, *Comm. Math. Phys.* **313** (2012), 375–384.
- [10] P. Šemrl, Order isomorphisms of operator intervals, *Integral Equations Operator Theory* **89** (2017), 1–42.
- [11] B. Simon, *Loewner’s theorem on monotone matrix functions*, Grundlehren Math. Wissen. **354**, Springer, 2019.

<sup>11</sup>但し, 主定理の証明には Šemrl の公式を用いていたことに注意.