On the action of the Weil group on the ℓ-adic cohomology of rigid spaces over local fields

東京大学大学院数理科学研究科　三枝 洋一 (Yoichi Mieda)
Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

0　はじめに

講演では，局所体上のリジッド空間の ℓ 進コホモロジーに現れる Galois 表現についての結果を報告した．詳細は次の通りである．

K を非アルキメデス局所体，すなわち剰余体 F が有限体 $\mathbb{F}_q$ であるような完備離散付値体とし，ℓ を q と互いに素な素数とする．K, F の分離閉包をそれぞれ $\overline{K}, \overline{F}$ と書く．$\mathrm{Fr}_q \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ を F の幾何学的 Frobenius 元（q 乗写像の逆写像）とし，Fr_q で生成される部分群 $\langle \mathrm{Fr}_q \rangle \subset \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ の自然な全射 $\varphi\colon \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ による逆像を W_K とおく．W_K は K の Weil 群と呼ばれる．さらに，$\sigma \in W_K$ に対し $n(\sigma) \in \mathbb{Z}$ を $\varphi(\sigma) = \mathrm{Fr}_q^{n(\sigma)}$ となるよう定め，$W_K^+ = \{\sigma \in W_K \mid n(\sigma) \geq 0\}$ と定義する．

X を K 上準コンパクトかつ分離的なリジッド空間とするとき，X のコンパクト台エタールコホモロジー $H_c^i(\mathsf{X} \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell)$ は自然に $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ の表現になり，したがって W_K の表現になる．この表現について次が成り立つ：

定理 0.1

次の 2 条件のうちのいずれかを仮定する：

- X は K 上滑らかである．
- K の標数は 0 である．

このとき，任意の $\sigma \in W_K^+$ に対して次が成立する：

i) ([M1, Theorem 1.1]) σ の $H_c^i(\mathsf{X} \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell)$ への作用 σ_* の固有値は代数的整数である．さらに，各固有値 α に対して非負整数 m が存在して，任意の体同型 $\iota\colon \overline{\mathbb{Q}}_\ell \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ に対して $|\iota(\alpha)| = q^{m/2}$ となる．

ii) ([M2, Theorem 1.1]) σ_* の跡の交代和 $\sum_{i=0}^{2\dim \mathsf{X}} (-1)^i \operatorname{Tr}(\sigma_*; H_c^i(\mathsf{X} \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell))$ は ℓ に依存しない整数である．

i) は有限体上のスキームに対する Weil 予想の類似であり，実際それに帰着することで証明される．ii) は ℓ 独立性と呼ばれる性質である．なお，非アルキメデス局所体

上のスキームに対するこれらの性質は落合氏により得られている（[Oc, Proposition 2.1, Theorem 2.4]．この場合滑らかさおよび K の標数に対する仮定は不要である）．

この定理の証明において本質的な部分は X が滑らかな場合である．滑らかな場合の証明は大まかに次のようなステップからなっている：

(a) 滑らかなリジッド空間は局所的に代数化可能であることを示し，それを利用して定理をスキームに対する主張（隣接サイクルコホモロジーの ℓ 独立性）に帰着する．

(b) 強準安定な開スキームに対するウェイトスペクトル系列の類似を導入し，その関手性を証明することで隣接サイクルコホモロジーの ℓ 独立性を示す．

(a) の「帰着」の部分，(b)，および X が滑らかとは限らない場合の証明については既に [M3] で紹介した．そこで，本稿では

滑らかなリジッド空間は局所的に代数化可能である

という部分を詳しく述べたいと思う．この部分は既に Huber 等によって証明されており筆者の結果ではないが，簡明な証明が書かれた文献を見つけることができなかったため，この機会に書いておこうと考えた次第である．未だ紹介文献の少ない adic 空間の理論も簡単に概観することにした．この分野の入門にもなれば幸いである．

1　リジッド幾何の復習

リジッド幾何にはいくつかの枠組みがあるが，本稿では Huber（[Hu1], [Hu2], [Hu3]）による adic 空間の理論を用いることにする．本節ではその概要を紹介する．

1.1　位相環についての諸定義

adic 空間の理論の特徴の 1 つに，ノルム環ではなく位相環を使う点が挙げられる．まず，位相環について必要な定義を列挙する．

定義 1.1

A を位相環とし，I をそのイデアルとする．I が A の定義イデアルであるとは，$\{I^n\}$ が 0 の基本近傍系となることをいう．定義イデアルを持つ位相環を adic であるという．

定義 1.2
位相環 A の部分環 B が A の定義環であるとは，B が A の開部分環であり，かつ有限生成な定義イデアルを持つことをいう．定義環を持つ位相環を f-adic であるという．

定義 1.3
f-adic な位相環 A の部分集合 S が有界であるとは，0 の任意の開近傍 U に対して 0 の開近傍 V が存在して，$S \cdot V \subset U$ となることをいう．ここで $S \cdot V$ は $\{sv \mid s \in S, v \in V\}$ で生成される A の部分アーベル群である．

$a \in A$ が冪有界であるとは，$\{a^n \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$ が有界であることをいう．冪有界な元全体を A° と書く．これは A の部分環になる．

$a \in A$ が位相的冪零であるとは，任意の 0 の近傍 U に対して自然数 N が存在して，$n \geq N$ ならば $a^n \in U$ となることをいう．位相的冪零な元全体を $A^{\circ\circ}$ と書く．これは A° のイデアルになる．

定義 1.4
f-adic な位相環が Tate であるとは，位相的冪零な可逆元を持つことをいう．

例 1.5
完備離散付値体 K は Tate 環である．実際，その付値環 K^+ が定義環であり，素元 $\pi \in K$ が位相的冪零な可逆元である．

命題 1.6
Tate 環 A の定義環を B とすると，B に属する位相的冪零な可逆元 π が存在する．このような π に対し，$A \cong B_\pi$ である．ここで，B_π は B の π による分数化に $\{\pi^n B_\pi\}$ を 0 の基本近傍系とする位相を入れて得られる位相環を表す．特に，πB は B の定義イデアルである．

証明　まず，B に属する位相的冪零な可逆元 π が存在することを示す．$s \in A$ を位相的冪零な可逆元とすると，B は 0 の開近傍であるから，$s^n \in B$ となる自然数 n が存在する．$\pi = s^n$ とすればよい．

次に自然な準同型 $\varphi\colon B_\pi \longrightarrow A$ が全単射であることを示す．単射性は明らかである．π は位相的冪零元であり，B は $0 \in A$ の開近傍であるから，任意の $a \in A$ に対して自然数 n が存在して $a\pi^n \in B$ となる．したがって $a = \varphi\left(\dfrac{a\pi^n}{\pi^n}\right)$ となり φ が全射であることが分かる．

πB が B の定義イデアルであることを示す．$\pi^n B$ が $0 \in B$ の開近傍であることは π 倍が同相であることから明らか．また，B の定義イデアルを I とすると，任意の自然数 m に対してある自然数 n が存在して $\pi^n \in I^m$ となるから，$\pi^n B \subset I^m$ である．よって πB は B の定義イデアルである．このことから，φ が連続開写像であることが分かり，位相環の同型であることが従う． ∎

例 1.7

完備 Tate 環 A に対し，

$$A\langle T_1, \ldots, T_n \rangle = \left\{ \sum_{i_1,\ldots,i_n \geq 0} a_{i_1,\ldots,i_n} T_1^{i_1} \cdots T_n^{i_n} \in A[[T_1, \ldots, T_n]] \;\middle|\; a_{i_1,\ldots,i_n} \text{ は } 0 \text{ に収束} \right\}$$

とおく．さらに，A の部分集合 U に対して

$$U\langle T_1, \ldots, T_n \rangle = \left\{ \sum_{i_1,\ldots,i_n \geq 0} a_{i_1,\ldots,i_n} T_1^{i_1} \cdots T_n^{i_n} \in A\langle T_1, \ldots, T_n \rangle \;\middle|\; a_{i_1,\ldots,i_n} \in U \right\}$$

とおき，$\bigl\{ U\langle T_1, \ldots, T_n \rangle \bigm| U \text{ は } 0 \in A \text{ の開近傍} \bigr\}$ を $0 \in A\langle T_1, \ldots, T_n \rangle$ の基本近傍系とする位相を入れる．このとき，$A\langle T_1, \ldots, T_n \rangle$ はまた完備 Tate 環になる．実際，A の定義環を B，B に属する位相的冪零な可逆元を π とすると，$A\langle T_1, \ldots, T_n \rangle$ は $B[T_1, \ldots, T_n]$ の π 進完備化 $B\langle T_1, \ldots, T_n \rangle$ を定義環に持つ．

定義 1.8

完備 Tate 環 A が強 Noether 環であるとは，任意の n に対して $A\langle T_1, \ldots, T_n \rangle$ が Noether 環であることをいう．

1.2 付値論からの補足

スキームにおいては環の素イデアルを点とみなしたが，adic 空間では環の付値（のうち特別なもの）を点とみなす．ここでは必要になる付値論について簡単にまとめる．

定義 1.9

環 A の付値とは, 全順序アーベル群 Γ（乗法的に書く）および写像 $v\colon A \longrightarrow \Gamma \cup \{0\}$ の組 (Γ, v) であって，次の条件を満たすもののことである：

- $v(ab) = v(a)v(b)$.
- $v(a+b) \leq \max\bigl\{v(a), v(b)\bigr\}$.
- $v(0) = 0$, $v(1) = 1$.

ただし，$\Gamma \cup \{0\}$ には Γ の積・順序を $0 \cdot \gamma = 0$, $0 \leq \gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$ によって拡張しておく．

A の付値 (Γ, v) に対し，A のイデアル $v^{-1}(0)$ をその台という．台は素イデアルである．

付値 (Γ, v) に対し，$v(A) \setminus \{0\} \subset \Gamma$ で生成される Γ の部分群を Γ' で表す．A の 2 つの付値 (Γ_1, v), (Γ_2, v_2) が同値であるとは，順序を保つ同型 $f \colon \Gamma_1' \xrightarrow{\sim} \Gamma_2'$ であって $v_2 = f \circ v_1$ を満たすものが存在することをいう．

以下では，誤解の恐れがないときには付値は単に v で表すこともある．

定義 1.10

A を環とするとき，A の付値の同値類全体の集合を $\operatorname{Spv} A$ と書く．$\operatorname{Spv} A$ には

$$\left\{ v \in \operatorname{Spv} A \;\middle|\; v(a) \leq v(b) \neq 0 \right\} \quad (a, b \in A)$$

を準基とする位相（これらの有限交叉を開基とする位相）を入れる．

注意 1.11

以下では $\operatorname{Spv} A$ を空間と，A をその上の関数環とみなしたいため，$\operatorname{Spv} A$ の元は v ではなく x で表し，$a \in A$ に対して $v(a)$ と書くところを $\left|a(x)\right|$ で表すことが多い．

定義 1.12

A を位相環とし，(Γ, v) を A の付値とする．v が連続であるとは，任意の $\gamma \in \Gamma'$ について，

$$v^{-1}\bigl(\{\delta \in \Gamma \cup \{0\} \mid \delta < \gamma\}\bigr)$$

が A の開集合になることをいう．

1.3　adic 空間

スキームの圏は局所環付き空間の圏の部分圏であるが，adic 空間の圏は次で定義する圏 $\mathscr{V}$ の部分圏として構成される：

定義 1.13

圏 $\mathscr{V}$ を次のように定める：対象は

- 位相空間 X,
- 位相環の層 $\mathcal{O}_X$,

- 各 $x \in X$ に対し $\mathcal{O}_{X,x}$ の付値の同値類 v_x を集めたもの $\{v_x \mid x \in X\}$

からなる 3 つ組 $\bigl(X, \mathcal{O}_X, \{v_x \mid x \in X\}\bigr)$ である．$\bigl(X, \mathcal{O}_X, \{v_x\}\bigr)$ から $\bigl(Y, \mathcal{O}_Y, \{v'_y\}\bigr)$ への射は付値と両立する環付き空間の射，すなわち連続写像 $f\colon X \longrightarrow Y$ と環の層の射 $\varphi\colon \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X$ の組で任意の $x \in X$ に対し $v'_{f(x)} = v_x \circ \varphi_x$ となるものとする．

定義 1.14

A を f-adic な位相環とする．A の部分環 B が A の ring of integral elements であるとは，次の 3 条件を満たすことをいう：

- B は A の開部分環である．
- B は A の中で整閉である．
- $B \subset A^\circ$ である．

f-adic な位相環 $A^\triangleright$ とその ring of integral elements A^+ の組 $A = (A^\triangleright, A^+)$ をアフィノイド環という．

アフィノイド環の射 $(A^\triangleright, A^+) \longrightarrow (B^\triangleright, B^+)$ とは，連続準同型 $A^\triangleright \longrightarrow B^\triangleright$ で A^+ を B^+ にうつすものとする．

以下では，アフィノイド環 $A = (A^\triangleright, A^+)$ に対して圏 $\mathscr{V}$ の対象 $\operatorname{Spa} A$ を対応させる関手を構成する．まず，底空間は次の通りである：

定義 1.15

アフィノイド環 $A = (A^\triangleright, A^+)$ に対し，$\operatorname{Spv} A$ の部分集合 $\operatorname{Spa} A$ を

$$\operatorname{Spa} A = \Bigl\{x \in \operatorname{Spv} A \Bigm| x：連続，\ \bigl|a(x)\bigr| \le 1\ (a \in A^+)\Bigr\}$$

で定め，$\operatorname{Spv} A$ からの誘導位相を入れる．

注意 1.16

$\operatorname{Spa} A$ の位相は，通常の p 進位相とはかなり異なったものである．例えば完備離散付値体 K 上の半径 1 の境界付き円板 $\mathbb{D}^1_K$ に対応するものは $\operatorname{Spa}\bigl(K\langle T\rangle, K^+\langle T\rangle\bigr)$ であるが，これは連結である．なお，$a \in \mathbb{D}^1_K$ に対して付値 $v_a\colon K\langle T\rangle \longrightarrow \mathbb{R};\ v_a(f) = \bigl|f(a)\bigr|$ を考えると $v_a \in \operatorname{Spa} A$ となるので，単射 $\mathbb{D}^1_K \longrightarrow \operatorname{Spa}\bigl(K\langle T\rangle, K^+\langle T\rangle\bigr)$ がある．容易に分かるようにこれは連続である．

次に構造層 $\mathcal{O}_{\operatorname{Spa} A}$ を定義しよう．

定義 1.17

$A=(A^\triangleright, A^+)$ をアフィノイド環とする．$T_1,\ldots,T_n \subset A^\triangleright$ を有限集合で $T_i\cdot A^\triangleright$ が開集合となるものとし，$s_1,\ldots,s_n\in A^\triangleright$ とする．このとき，

$$R\left(\frac{T_1}{s_1},\ldots,\frac{T_n}{s_n}\right)=\bigcap_{i=1}^{n}\left\{x\in\operatorname{Spa}A \;\middle|\; \text{任意の } t\in T_i \text{ に対し } |t(x)|\leqq|s_i(x)|\right\}$$

と定める．このような形をした $\operatorname{Spa}A$ の部分集合を有理部分集合という．

有理部分集合全体は $\operatorname{Spa}A$ の開基となる．また，任意の有理部分集合はある $T\subset A^\triangleright$（有限部分集合，$T\cdot A^\triangleright$ は開集合）および $s\in A^\triangleright$ を用いて $R\left(\dfrac{T}{s}\right)$ と表すことができることも分かる．[Hu1, Theorem 3.5] 参照.

注意 1.18

$A^\triangleright$ が Tate 環の場合は，$T_i\cdot A^\triangleright$ が開集合であるという条件は $T_i\cdot A^\triangleright=A^\triangleright$ と同値である．

定義 1.19

A を f-adic な位相環とし, A_0 をその定義環, I を A_0 の有限生成な定義イデアルとする．$T_1,\ldots,T_n\subset A$ を有限集合で $T_i\cdot A$ が開集合となるものとし，$s_1,\ldots,s_n\in A$ とする．このとき，

$$A_{s_1,\ldots,s_n}=A\left[\frac{1}{s_1},\ldots,\frac{1}{s_n}\right],\quad B=A_0\left[\frac{t}{s_i}\;\middle|\; t\in T_i, i=1,\ldots,n\right]$$

と定め，$A_{s_1,\ldots,s_n}$ に $\{I^nB\}$ を 0 の基本近傍系とする位相を入れたものを $A\left(\dfrac{T_1}{s_1},\ldots,\dfrac{T_n}{s_n}\right)$ と書く．これは A_0, I のとり方に依らない.

$A\left(\dfrac{T_1}{s_1},\ldots,\dfrac{T_n}{s_n}\right)$ の完備化を $A\left\langle\dfrac{T_1}{s_1},\ldots,\dfrac{T_n}{s_n}\right\rangle$ と書く.

定義 1.20

$A=(A^\triangleright,A^+)$ をアフィノイド環とし，$T_1,\ldots,T_n\subset A^\triangleright$ を有限集合で $T_i\cdot A^\triangleright$ が開集合となるものとし，$s_1,\ldots,s_n\in A^\triangleright$ とする．$B=A^\triangleright\left(\dfrac{T_1}{s_1},\ldots,\dfrac{T_n}{s_n}\right)$ とおき，$A^+\left[\dfrac{t}{s_i}\;\middle|\; t\in T_i, i=1,\ldots,n\right]$ の B 内での整閉包を C とおく．このとき，(B,C) はアフィノイド環となる．これを $A\left(\dfrac{T_1}{s_1},\ldots,\dfrac{T_n}{s_n}\right)$ と書く．また，その完

備化 $(B^{\wedge}, C^{\wedge})$ を $A\left\langle\dfrac{T_1}{s_1},\dots,\dfrac{T_n}{s_n}\right\rangle$ と書く．

$\operatorname{Spa} A$ の有理部分集合 $U = R\left(\dfrac{T_1}{s_1},\dots,\dfrac{T_n}{s_n}\right)$ に対してアフィノイド環 $A\left\langle\dfrac{T_1}{s_1},\dots,\dfrac{T_n}{s_n}\right\rangle$ を考えると，これは U のみに依存し T_i, s_i のとり方に依らないことが証明できる ([Hu2, Proposition 1.3])．このことを強調するため，$F_A(U) = A\left\langle\dfrac{T_1}{s_1},\dots,\dfrac{T_n}{s_n}\right\rangle$ と書くことにする．

定義 1.21

$\operatorname{Spa} A$ の開集合 V に対し，$\mathcal{O}_{\operatorname{Spa} A}(V) = \varprojlim_{\substack{U\subset V\\ \text{有理部分集合}}} F_A(U)^{\triangleright}$ と定める．$\mathcal{O}_{\operatorname{Spa} A}$ は $\operatorname{Spa} A$ 上の完備位相環の前層である．

U が有理部分集合であるとき，$\mathcal{O}_{\operatorname{Spa} A}(U) = F_A(U)^{\triangleright}$ となる．このことから，$x \in \operatorname{Spa} A$ に対し，$\mathcal{O}_{\operatorname{Spa} A,x} = \varinjlim_{\substack{U\ni x\\ \text{有理部分集合}}} F_A(U)^{\triangleright}$ となる．また U を有理部分集合とすると，$F_A(U)^{\triangleright}$ の構成から，$x \in U$ ならば A の連続付値 $x\colon A \longrightarrow \Gamma_x \cup \{0\}$ は一意的に $F_A(U)^{\triangleright}$ の連続付値 $F_A(U)^{\triangleright} \longrightarrow \Gamma_x \cup \{0\}$ に延長される．したがって，$x \in \operatorname{Spa} A$ に対し付値 $x\colon \mathcal{O}_{\operatorname{Spa} A,x} \longrightarrow \Gamma_x \cup \{0\}$ が定まる．よって，$\mathcal{O}_{\operatorname{Spa} A}$ が完備位相環の層になるならば，$\bigl(\operatorname{Spa} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spa} A}, \{v_x\}\bigr)$ は $\mathscr{V}$ の対象となる．これを単に $\operatorname{Spa} A$ で表す．

定義 1.22

上記の $\operatorname{Spa} A$ と同型な $\mathscr{V}$ の対象をアフィノイド adic 空間という．また，局所的にアフィノイド adic 空間と同型な $\mathscr{V}$ の対象を adic 空間という．adic 空間 X に対し，アフィノイド adic 空間と同型な開部分空間をアフィノイド開集合という．

adic 空間 X に対し，X 上の層 $\mathcal{O}_X^+$ を

$$\mathcal{O}_X^+(U) = \bigl\{ s \in \mathcal{O}_X(U) \bigm| v_x(s) \le 1 \ (x \in U) \bigr\}$$

で定める．このとき，

$$\Gamma(\operatorname{Spa} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spa} A}) = (A^{\triangleright})^{\wedge}, \qquad \Gamma(\operatorname{Spa} A, \mathcal{O}^+_{\operatorname{Spa} A}) = (A^+)^{\wedge}$$

となる ([Hu2, Proposition 1.6 (iv)])．すなわち，$\mathscr{V}$ の対象 $\operatorname{Spa} A$ から $A^{\triangleright}$, A^+ は完備化を除いて復元される．

また，A を完備なアフィノイド環とし，$B = (B^{\triangleright}, B^+)$ を（完備とは限らない）もう 1 つのアフィノイド環とするとき，射 $\operatorname{Spa} A \longrightarrow \operatorname{Spa} B$ はアフィノイド環の射 $B \longrightarrow A$ と一対一に対応する ([Hu2, Proposition 2.1 (i)])．

$\mathcal{O}_{\mathrm{Spa}\,A}$ が完備位相環の層になるための十分条件としては次が知られている：

定理 1.23 （[Hu2, Theorem 2.2]）

アフィノイド環 $A = (A^\triangleright, A^+)$ に対し，次の条件のいずれかを仮定する：

- A は強 Noether な Tate 環である．
- A は Noether な定義環を持つ．

このとき，$\mathcal{O}_{\mathrm{Spa}\,A}$ は $\mathrm{Spa}\,A$ 上の完備位相環の層になる．

1.4　非アルキメデス体上のリジッド空間

完備位相体 K が非アルキメデス体であるとは，ある付値 $K \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{0\}$ が存在してそれによって定まる K の位相がもとの位相と一致することをいう．非アルキメデス体 K に対し，K° は上記の付値による付値環 K^+ と一致する．ここでは adic 空間の枠組みを用いて K 上のリジッド空間の圏を定義する．

定義 1.24

A を完備 Tate 環とする．A 上の完備位相環 B が位相的有限型であるとは，ある自然数 n に対して全射連続開準同型 $A\langle T_1, \ldots, T_n\rangle \longrightarrow B$ が存在することをいう．

$A^\triangleright$ が完備 Tate 環であるようなアフィノイド環 $(A^\triangleright, A^+)$ に対し，$A^\triangleright\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$ における $A^+\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$ の整閉包を C_n とおき，$A\langle T_1, \ldots, T_n\rangle = \big(A^\triangleright\langle T_1, \ldots, T_n\rangle, C_n\big)$ と定める．A 上の完備アフィノイド環 B が位相的有限型であるとは，A 上の全射連続開準同型 $f\colon A\langle T_1, \ldots, T_n\rangle \longrightarrow B$ で $f(C_n)$ の $B^\triangleright$ における整閉包が B^+ に一致するようなものが存在することをいう．

注意 1.25

A が完備 Tate とは限らない一般の位相環の場合にも位相的有限型の概念が定義できるが ([Hu2, §3])，やや複雑なので省略する．

adic 空間 X が解析的であるとは，任意の $x \in X$ に対して $\mathcal{O}_X(U)$ が Tate 環になるような x の開近傍 U が存在することをいう．詳しくは 1.6 節で扱う．

定義 1.26

X を解析的 adic 空間とする．adic 空間の射 $f\colon Y \longrightarrow X$ が局所有限型であるとは，任意の $y \in Y$ に対して $f(y)$ のアフィノイド開近傍 U と y のアフィノイド開近傍 V が存在して次を満たすことをいう：

- $\mathcal{O}_X(U)$ は Tate 環.

- $f(V) \subset U$.
- $\bigl(\mathcal{O}_Y(V), \mathcal{O}_Y^+(V)\bigr)$ は $\bigl(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X^+(U)\bigr)$ 上位相的有限型.

以下では K を非アルキメデス体とする.

定義 1.27
$\mathrm{Spa}(K, K^+)$ 上局所有限型な adic 空間を K 上のリジッド空間という.

命題 1.28 ([Hu2, Lemma 4.4])
A を K 上位相的有限型な完備位相環とし，A^+ をその ring of integral elements とする．このとき，(A, A^+) が (K, K^+) 上位相的有限型であるための必要十分条件は $A^+ = A^\circ$ である.

定義 1.29
A を K 上位相的有限型な完備位相環とするとき，$\mathrm{Sp}\, A = \mathrm{Spa}(A, A^\circ)$ とおく（K は強 Noether 環である ([BGR, 5.2.6/Theorem 1]) から，A も強 Noether 環となることに注意).

1.5 滑らかな射

adic 空間の間の射が滑らかであることの定義はスキームの射の場合とほぼ同様である.

定義 1.30
$A = (A^\triangleright, A^+)$ をアフィノイド環とし，$I \subset A^\triangleright$ をイデアルとする．$A^+/A^+ \cap I$ の $A^\triangleright/I$ における整閉包を $(A^+/A^+ \cap I)^c$ と書き，アフィノイド環 A/I を

$$A/I = \bigl(A^\triangleright/I, (A^+/A^+ \cap I)^c\bigr)$$

と定める．ただし $A^\triangleright/I$ には $A^\triangleright$ の商位相を入れるものとする.

定義 1.31
解析的 adic 空間の射 $f\colon X \longrightarrow Y$ が滑らかであるとは，f が局所有限型で次の条件を満たすことをいう：

任意のアフィノイド adic 空間 $\mathrm{Spa}\, A$ および $I^2 = 0$ となる $A^\triangleright$ のイデ

アル I に対し，自然な写像 $\mathrm{Hom}_Y(\mathrm{Spa}\,A, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_Y(\mathrm{Spa}\,A/I, X)$ は全射である．

スキームのときと類似した方法によって，比較的簡単に次の命題を示すことができる：

命題 1.32
A を強 Noether な完備 Tate 環とする．局所有限型な adic 空間の射 $f\colon X \longrightarrow \mathrm{Spa}\,A$ に対し次は同値である：

i) f は滑らかである．

ii) 任意の $x \in X$ に対して x のアフィノイド開近傍 $\mathrm{Spa}\,B$，$f_1, \ldots, f_m \in A\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$ $(m \leq n)$ が存在し，次が成り立つ：

- A 上のアフィノイド環として $B \cong A\langle T_1, \ldots, T_n\rangle/(f_1, \ldots, f_m)$.
- $\det\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial T_j}\right)_{1\leq i,j\leq m}$ の $A^{\triangleright}\langle T_1, \ldots, T_n\rangle/(f_1, \ldots, f_m)$ での像は可逆.

1.6 Raynaud 一般ファイバー

K を完備離散付値体とし，K^+ をその付値環とする．Raynaud は，K^+ 上位相的有限型な形式スキーム $\mathcal{X}$ に対して K 上のリジッド空間 $\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}$ を対応させる関手を構成し，

$$\begin{aligned}&(K^+ \text{ 上位相的有限型な形式スキームの圏})/(\text{認容ブローアップ})\\ &\quad \xrightarrow{\sim} (K \text{ 上準コンパクトかつ準分離的なリジッド空間の圏})\end{aligned}$$

という圏同値があることを証明した．$\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}$ は Raynaud 一般ファイバーと呼ばれる．これを adic 空間の枠組みで解釈したい．

そのためにまず，K^+ 上位相的有限型な形式スキームに対して adic 空間を対応させる関手を構成する．

命題 1.33 （[Hu2, Proposition 4.1]）
K^+ 上位相的有限型な形式スキームの圏を $\mathbf{Fsch}_{/K^+}$ で，$\mathrm{Spa}(K^+, K^+)$ 上の adic 空間の圏を $\mathbf{adic}_{/K^+}$ で表すことにする．このとき，次で特徴付けられる関手 $t\colon \mathbf{Fsch}_{/K^+} \longrightarrow \mathbf{adic}_{/K^+}$ が存在する：

$Z \in \mathbf{adic}_{/K^+}$ に対し，

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{adic}_{/K^+}}\bigl(Z, t(X)\bigr) \cong \mathrm{Hom}\bigl((Z, \mathcal{O}_Z^+), (X, \mathcal{O}_X)\bigr).$$

ここで右辺の Hom は $\mathrm{Spf}\, K^+$ 上の局所位相環付き空間の圏における射の集合を表す．

さらに，t は忠実充満関手である．

例 1.34

$\mathcal{X} = \mathrm{Spf}\, A$ であるとき，$t(\mathcal{X}) = \mathrm{Spa}(A, A)$ である．一般の場合はこれを貼り合わせることで構成できる．

次に，解析的点という概念を導入する：

定義 1.35

X を adic 空間とする．$x \in X$ が解析的点であるとは，x のある開近傍 U が存在して $\mathcal{O}_X(U)$ が Tate 環となることをいう．X の解析的点全体は X の開集合となり，したがってまた adic 空間になる．これを X_{a} と書く．

任意の点が解析的点である adic 空間を解析的 adic 空間という．

例 1.36

X がアフィノイド adic 空間 $\mathrm{Spa}\, A$ であるとき，$x \in \mathrm{Spa}\, A$ が解析的点であることは $\mathrm{Supp}\, x \subset A^{\triangleright}$ が開集合でないことと同値である．

証明　$\mathrm{Supp}\, x \subset A^{\triangleright}$ が開集合であるとする．x を含む有理部分集合 U に対して $\mathcal{O}_X(U)$ が位相的冪零な可逆元を持たないことを示せばよい．x は自然に $\mathcal{O}_X(U)$ の連続付値 $\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \Gamma_x \cup \{0\}$ に延長される．これの台を $\mathfrak{p}$ とおくと，$\mathrm{Supp}\, x$ が開集合であることから $\mathfrak{p}$ も開集合であることが分かる．したがって $\mathcal{O}_X(U)$ の位相的冪零元は $\mathfrak{p}$ に属する．一方，明らかに可逆元は $\mathfrak{p}$ に属さない．したがって $\mathcal{O}_X(U)$ は位相的冪零な可逆元を持たない．

次に $\mathrm{Supp}\, x \subset A^{\triangleright}$ が開集合でないとする．$A^{\triangleright}$ の定義環を B，B の定義イデアルを I とおくと，$I \not\subset \mathrm{Supp}\, x$ である．$a \in I \setminus \mathrm{Supp}\, x$ とすると，$a \in A^{\circ\circ}$ かつ $\bigl|a(x)\bigr| \neq 0$ である．$U = R\left(\dfrac{a}{a}\right)$ とおくと，U は x の開近傍であり，$a \in A\left\langle \dfrac{a}{a} \right\rangle$ は位相的冪零な可逆元である．■

注意 1.37
$f\colon X \longrightarrow Y$ が有限型射であるとき，$X_{\mathrm{a}} = f^{-1}(Y_{\mathrm{a}})$ である．特に Y が解析的ならば X も解析的である．

定義 1.38
K^+ 上位相的有限型な形式スキーム $\mathcal{X}$ に対して，$\mathcal{X}^{\mathrm{rig}} = t(\mathcal{X})_{\mathrm{a}}$ と定め，$\mathcal{X}$ の Raynaud 一般ファイバーと呼ぶ.

例 1.39
$\pi \in K^+$ を極大イデアルの生成元とする．B を K^+ 上位相的有限型な位相環とし，$A = B_\pi = B \otimes_{K^+} K$ とする．また，$B' = \mathrm{Im}(B \longrightarrow A)$ とおく．このとき，$\mathcal{X} = \mathrm{Spf}\, B$ に対し $\mathcal{X}^{\mathrm{rig}} = \mathrm{Spa}(A, B') = \mathrm{Spa}(A, A^\circ)$ である．特に，$\mathcal{X} = \mathrm{Spf}\, K^+\langle T_1, \ldots, T_n\rangle/(f_1, \ldots, f_m)$ のとき，$\mathcal{X}^{\mathrm{rig}} = \mathrm{Sp}\, K\langle T_1, \ldots, T_n\rangle/(f_1, \ldots, f_m)$ である.

証明　まず，$x \in \mathrm{Spa}(B, B)$ が解析的点であるための必要十分条件は $\bigl|\pi(x)\bigr| \neq 0$ であることを証明する．x が解析的点でないとすると，x の台は B の開集合であるから，ある n が存在して $\bigl|\pi^n(x)\bigr| = 0$ となる．したがって $\bigl|\pi(x)\bigr| = 0$ を得る．一方 $\bigl|\pi(x)\bigr| = 0$ とすると，πB は x の台に含まれ，したがって x の台は開集合になる.

これより，$\mathrm{Spa}(B, B)_{\mathrm{a}}$ は $\mathrm{Spa}(B, B)$ の有理部分集合 $R\left(\dfrac{\pi}{\pi}\right)$ に一致する．したがって $\mathrm{Spa}(B, B)_{\mathrm{a}} = \mathrm{Spa}\, B\left\langle\dfrac{\pi}{\pi}\right\rangle = \mathrm{Spa}\, B\left(\dfrac{\pi}{\pi}\right)$ である．ここで，定義より明らかにアフィノイド環の同型 $B\left(\dfrac{\pi}{\pi}\right) \cong (B_\pi, B')$ がある（B' が B の中で整閉であることもすぐに分かる）．したがって $\mathrm{Spa}(B, B)_{\mathrm{a}} \cong \mathrm{Spa}(A, B')$ を得る.

最後に等式 $\mathrm{Spa}(A, B') = \mathrm{Spa}(A, A^\circ)$ を示す．B は K^+ 上位相的有限型であるから，全射連続開準同型 $K^+\langle T_1, \ldots, T_n\rangle \longrightarrow B$ がある．これよりアフィノイド環の射 $\bigl(K\langle T_1, \ldots, T_n\rangle, K^+\langle T_1, \ldots, T_n\rangle\bigr) \longrightarrow (A, B')$ が得られ，定義 1.24 の条件を満たす．したがって (A, B') は (K, K^+) 上位相的有限型となり，命題 1.28 より $B' = A^\circ$ が得られる. ∎

上記の例から，$\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}$ は $\mathrm{Spa}(K, K^+) = \mathrm{Spa}(K^+, K^+)_{\mathrm{a}}$ 上有限型（局所有限型かつ準コンパクト）な adic 空間，つまり K 上の準コンパクトなリジッド空間になることが分かる.

2　滑らかなリジッド空間の代数化

K を完備離散付値体とし[注1]，K^+ をその付値環とする．本節の目標は次の定理の証明である：

定理 2.1
X を K 上滑らかなリジッド空間とするとき，任意の $x \in \mathsf{X}$ に対して，x の開近傍 U および K^+ 上有限型なスキーム X が存在して次を満たす：

i) K 上のリジッド空間としての同型 $(X^{\wedge})^{\mathrm{rig}} \cong \mathsf{U}$ がある．

ii) X の一般ファイバーは滑らかである．

この定理は Elkik の代数化定理 ([El, III, Theorem 7]) を用いると直ちに従うが，その証明は複雑である．また，[Hu3, Proposition 1.7.1] に初等的な証明があるが，Tate 環以外の場合も扱っているせいかかなり長い．以下に述べる証明は，これらの文献を参考にして簡略化を行ったものである．

まず，上記の定理は次の定理から導かれることに注意しよう：

定理 2.2
A を Noether な定義環を持つ完備 Tate 環とし，$f_1, \ldots, f_n \in A\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$ が次の条件を満たすと仮定する：

$\det\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial T_j}\right)$ の $B = A\langle T_1, \ldots, T_n\rangle/(f_1, \ldots, f_n)$ における像は可逆である．

このとき，$0 \in A\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$ の開近傍 U が存在して，任意の $g_i \in f_i + U$ $(i = 1, \ldots, n)$ は次を満たす：

i) A 上の位相環として $B \cong B' = A\langle T_1, \ldots, T_n\rangle/(g_1, \ldots, g_n)$ である．

ii) $\det\left(\dfrac{\partial g_i}{\partial T_j}\right)$ の B' における像は可逆である．

この定理は，（ヤコビアンが可逆という条件のもとで）定義方程式を少し動かしてもリジッド空間は同型であることを主張している．

[注1] 非アルキメデス体 K に対しても定理 2.1 は成立するが，簡単のためこう仮定する．

定理 2.2 が定理 2.1 を導くことの証明　X は K 上滑らかであるから，任意の $x \in \mathsf{X}$ に対して x の開近傍 U が存在して

$$\mathsf{U} \cong \operatorname{Sp} K\langle T_1, \ldots, T_n\rangle/(f_1, \ldots, f_m) \quad (m \leq n),$$
$$\Delta = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial T_j}\right)_{1 \leq i,j \leq m} \text{ は } K\langle T_1, \ldots, T_n\rangle/(f_1, \ldots, f_m) \text{ で可逆}$$

となる．$A = K\langle T_{m+1}, \ldots, T_n\rangle$ とおくと，A は Noether な定義環 $K^+\langle T_{m+1}, \ldots, T_n\rangle$ を持つ完備 Tate 環で，

$$K\langle T_1, \ldots, T_n\rangle/(f_1, \ldots, f_m) = A\langle T_1, \ldots, T_m\rangle/(f_1, \ldots, f_m)$$

であり，Δ は $A\langle T_1, \ldots, T_m\rangle/(f_1, \ldots, f_m)$ で可逆である．よって定理 2.3 より，$0 \in A\langle T_1, \ldots, T_m\rangle$ の開近傍 U が存在して，$g_i \in f_i + U$ ならば

i) $A\langle T_1, \ldots, T_m\rangle/(f_1, \ldots, f_m) \cong A\langle T_1, \ldots, T_m\rangle/(g_1, \ldots, g_m)$(位相環の A 同型),

ii) $\Delta' = \det\left(\dfrac{\partial g_i}{\partial T_j}\right)_{1 \leq i,j \leq m}$ は $A\langle T_1, \ldots, T_m\rangle/(g_1, \ldots, g_m)$ で可逆

となる．$K[T_1, \ldots, T_n]$ は $K\langle T_1, \ldots, T_n\rangle = A\langle T_1, \ldots, T_m\rangle$ の稠密部分集合であるから，$g_i \in K[T_1, \ldots, T_n]$ かつ $g_i \in f_i + U$ となる $g_1, \ldots, g_m$ が存在し，これに対して

i) $K\langle T_1, \ldots, T_n\rangle/(f_1, \ldots, f_m) \cong K\langle T_1, \ldots, T_n\rangle/(g_1, \ldots, g_m)$,

ii) Δ' は $K\langle T_1, \ldots, T_n\rangle/(g_1, \ldots, g_m)$ で可逆

が成立する．分母を払って $g_i \in K^+[T_1, \ldots, T_n]$ としてよい．

さて，Δ' の可逆性と $\pi \in K\langle T_1, \ldots, T_n\rangle/(g_1, \ldots, g_m)$ が位相的冪零元であることから，ある自然数 l が存在して $\dfrac{\pi^l}{\Delta'} \in K^+\langle T_1, \ldots, T_n\rangle/(g_1, \ldots, g_m)$ となる．これより

$$K\langle T_1, \ldots, T_n, T_{n+1}\rangle/(g_1, \ldots, g_m, \Delta' T_{n+1} - \pi^l) \xrightarrow{\sim} K\langle T_1, \ldots, T_n\rangle/(g_1, \ldots, g_m)$$

(T_{n+1} を $\dfrac{\pi^l}{\Delta'}$ にうつす．冪有界元でないと収束冪級数に代入できないことに注意) となるから，$B = K^+[T_1, \ldots, T_n, T_{n+1}]/(g_1, \ldots, g_m, \Delta' T_{n+1} - \pi^l)$, $X = \operatorname{Spec} B$ とおくと，

$$\begin{aligned} B^\wedge \otimes_{K^+} K &\cong K\langle T_1, \ldots, T_n, T_{n+1}\rangle/(g_1, \ldots, g_m, \Delta' T_{n+1} - \pi^l) \\ &\cong K\langle T_1, \ldots, T_n\rangle/(g_1, \ldots, g_m) \cong K\langle T_1, \ldots, T_n\rangle/(f_1, \ldots, f_m) \end{aligned}$$

すなわち $(X^\wedge)^{\mathrm{rig}} \cong \mathsf{U}$ となる．X の一般ファイバーは明らかに K 上滑らかであるから，これが求めるものである．∎

定理 2.2 を証明するためにはいくつか準備が必要である．次の命題は Elkik の定理 ([El, I, Theorem 1]) の変種であるが，証明は易しい：

命題 2.3
A を環とし，$\pi \in A$ とする．A は π 進完備かつ π-torsion free であると仮定する．$f_1, \dots, f_n \in A\langle T_1, \dots, T_n \rangle$ とし，$\Delta = \det\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial T_j}\right)$ とおく．h を自然数とするとき，任意の $N > 2h$ に対して次が成り立つ：

> $\mathbf{a} \in A^n$ が $f_i(\mathbf{a}) \in \pi^N A$ $(i = 1, \dots, n)$ および $\pi^h \in \Delta(\mathbf{a})A$ を満たすならば，$\mathbf{a}' \equiv \mathbf{a} \pmod{\pi^{N-h}}$ かつ $f_i(\mathbf{a}') = 0$ $(i = 1, \dots, n)$ となる $\mathbf{a}' \in A^n$ が存在する．

つまり，$f_i(\mathbf{a})$ が 0 に十分近く，さらに「$\pi^h \in \Delta(\mathbf{a})A$」という条件を満たすならば，$\mathbf{a}$ のすぐ近くに $f_1 = \cdots = f_n = 0$ の解を見つけることができるということである．

証明　命題の仮定のもとで，次を満たす $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in A^n$ が存在することを証明すれば十分である：

$$y_i \in \pi^{N-h}A, \qquad f_i(\mathbf{a} - \mathbf{y}) \in \pi^{2N-2h}A.$$

実際，$N_1 = 2N - 2h$ とおくと $N_1 > N + 2h - 2h = N$，$f_i(\mathbf{a} - \mathbf{y}) \in \pi^{N_1}A$，$\pi^h \in \Delta(\mathbf{a} - \mathbf{y})A$ である（最後の包含関係は $\Delta(\mathbf{a} - \mathbf{y}) \in \Delta(\mathbf{a}) + \pi^{N-h}A$ と $N - h > h$ から従う）から，再度上記の性質を適用することで $y_i' \in \pi^{N_1-h}A$, $f_i(\mathbf{a} - \mathbf{y} - \mathbf{y}') \in \pi^{2N_1-2h}A$ となる $\mathbf{y}' \in A^n$ を見つけることができる．以下これを繰り返すことで $\mathbf{y}'', \mathbf{y}''', \dots$ を定め，$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{y} - \mathbf{y}' - \mathbf{y}'' + \cdots$ とすればよい．

$M = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial T_j}\right)$ とおくと，簡単な計算により $y_1, \dots, y_n \in \pi^{N-h}A$ ならば

$$\begin{pmatrix} f_1(\mathbf{a} - \mathbf{y}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{a} - \mathbf{y}) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{a}) \end{pmatrix} - M(\mathbf{a}) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \pmod{\pi^{2N-2h}}$$

となることが分かる．したがって，

$$\begin{pmatrix} f_1(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{a}) \end{pmatrix} = M(\mathbf{a}) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

を満たす $y_i \in \pi^{N-h}A$ を見つければよい．

さて，M の余因子行列を N とおき，$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = N(\mathbf{a}) \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$ によって $z_1, \ldots, z_n$ を定める．上式の両辺に $M(\mathbf{a})$ をかけることで，

$$M(\mathbf{a}) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \Delta(\mathbf{a}) \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

が得られる．

ここで，$f_i(\mathbf{a}) \in \pi^N A$ より $z_i \in \pi^N A$ であるから，$z_i = \pi^N z_i'$ となる $z_i' \in A$ が存在する．また，$\pi^h \in \Delta(\mathbf{a})A$ より，$\pi^h = \Delta(\mathbf{a})\delta$ となる $\delta \in A$ が存在する．これらを代入することで

$$\pi^h M(\mathbf{a}) \begin{pmatrix} \delta\pi^{N-h} z_1' \\ \vdots \\ \delta\pi^{N-h} z_n' \end{pmatrix} = \pi^h \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

を得る．A は π-torsion free であったから $M(\mathbf{a}) \begin{pmatrix} \delta\pi^{N-h} z_1' \\ \vdots \\ \delta\pi^{N-h} z_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$ となるので，$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta\pi^{N-h} z_1' \\ \vdots \\ \delta\pi^{N-h} z_n' \end{pmatrix}$ とおけばよい． ∎

注意 2.4

A が π-torsion free ではないが Noether 環である場合，

$$A_{\pi\text{-tors}} = \left\{ a \in A \;\middle|\; \pi^m a = 0 \text{ となる自然数 } m \text{ が存在する} \right\}$$

とおくと，Artin-Rees の補題により $A_{\pi\text{-tors}} \cap \pi^k A = 0$ となる自然数 k が存在する．このとき，$N \geq \max\{2h+1, h+k\}$ なる N に対して命題 2.3 と同様の主張が成立する．また，I が A のイデアルで A が I 進完備である場合にも類似の結果を証明することができる．

補題 2.5

A を環とし，$\pi \in A$ とする．A は π 進完備であると仮定する．B を A 上位相的有限型な完備位相環とし，$b_1, \ldots, b_n \in B$ を位相的生成元（全射連続開準同型

$A\langle T_1,\dots,T_n\rangle \longrightarrow B$ による $T_1,\dots,T_n$ の像）とする．連続準同型 $\varphi\colon B \longrightarrow B$ に対し $\varphi(b_i) \in b_i + \pi B$ が成立するならば，φ は全単射である．

証明　B は A 上位相的有限型であるから，その位相は π 進位相である．したがって B は π 進完備なので，$\overline{\varphi}\colon \pi^n B/\pi^{n+1}B \longrightarrow \pi^n B/\pi^{n+1}B$ が全単射であることを示せばよい．

$\varphi(\pi^n b_i) = \pi^n \varphi(b_i) \in \pi^n b_i + \pi^{n+1}B$ であるから，$\overline{\varphi} = \mathrm{id}$ となる．特に $\overline{\varphi}$ は全単射である．∎

以下，環 A および $\pi \in A$ に対し，$A_{\pi\text{-tf}} = A/A_{\pi\text{-tors}}$ とおく（“torsion free” の略）．

命題 2.6

A を Noether 環とし，$\pi \in A$ とする．A は π 進完備であると仮定する．

$f_1,\dots,f_n \in A\langle T_1,\dots,T_n\rangle$ に対し，$\Delta = \det\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial T_j}\right) \in A\langle T_1,\dots,T_n\rangle$, $B = \bigl(A\langle T_1,\dots,T_n\rangle/(f_1,\dots,f_n)\bigr)_{\pi\text{-tf}}$ とおく．

ある自然数 m に対して $\pi^m \in (\Delta, f_1,\dots,f_n)$ であるとき，$g_i \in f_i + I^{2m+1}A\langle T_1,\dots,T_n\rangle$ となる任意の $g_1,\dots,g_n$ に対して次が成り立つ：

$$\Delta' = \det\left(\frac{\partial g_i}{\partial T_j}\right),\ B' = \bigl(A\langle T_1,\dots,T_n\rangle/(g_1,\dots,g_n)\bigr)_{\pi\text{-tf}} \text{ とおくとき，}$$

- A 上の位相環として $B \cong B'$．
- $\pi^m \in (\Delta', g_1,\dots,g_n)$．

証明　A は π 進完備な Noether 環であり B, B' は $A\langle T_1,\dots,T_n\rangle$ の剰余環であるから，B, B' も π 進完備であることに注意する．T_i の B, B' における像をそれぞれ a_i, b_i と書き，$\mathbf{a} = (a_1,\dots,a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1,\dots,b_n)$ とおく．

まず，連続準同型 $\varphi\colon B \longrightarrow B'$ を構成する．$\pi^m \in (\Delta, f_1,\dots,f_n)$ および $g_i \in f_i + I^{2m+1}A\langle T_1,\dots,T_n\rangle$ から $\pi^m \in (\Delta, g_1,\dots,g_n)$ となる．これより $\pi^m \in \Delta(\mathbf{b})B'$ であることが分かる．一方 $g_i(\mathbf{b}) = 0$ であるから，$f_i(\mathbf{b}) \in I^{2m+1}$ である．よって命題 2.3 より，$\mathbf{b}' \equiv \mathbf{b} \pmod{\pi^{m+1}}$ および $f_i(\mathbf{b}') = 0$ を満たす $\mathbf{b}' \in B'^n$ が存在する．T_i を b'_i にうつすことで連続準同型 $A\langle T_1,\dots,T_n\rangle/(f_1,\dots,f_n) \longrightarrow B'$ が得られる．B' は π-torsion free であるから，これは連続準同型 $\varphi\colon B \longrightarrow B'$ を誘導する．

次に，連続準同型 $\psi\colon B' \longrightarrow B$ を構成する．$\Delta' \equiv \Delta \pmod{\pi^{2m+1}}$ であるから，$\pi^m \in (\Delta', f_1,\dots,f_n)$ となり，これより $\pi^m \in \Delta'(\mathbf{a})B$ であることが分かる．一方 $f_i(\mathbf{a}) = 0$ であるから，$g_i(\mathbf{a}) \in I^{2m+1}$ である．よって命題 2.3 より，$\mathbf{a}' \equiv \mathbf{a} \pmod{\pi^{m+1}}$ および $g_i(\mathbf{a}') = 0$ を満たす $\mathbf{a}' \in B^n$ が存在する．T_i を a_i にうつすことで連続準同型 $A\langle T_1,\dots,T_n\rangle/(g_1,\dots,g_n) \longrightarrow B$ が得られ，これは連続準同型

$\psi\colon B' \longrightarrow B$ を誘導する．

このとき，$\psi(\varphi(a_i)) = \psi(b'_i) \equiv \psi(b_i) = a'_i \equiv a_i \pmod{\pi^{m+1}}$ であるから，$\psi(\varphi(a_i)) \in a_i + \pi B$ である．よって補題 2.5 から $\psi \circ \varphi$ は全単射である．同様にして $\varphi \circ \psi$ も全単射であることが分かるので，φ は全単射連続準同型である．さらに $\varphi(\pi^n B) = \pi^n \varphi(B) = \pi^n B'$ より φ は開写像である．以上より φ は位相環の同型を与えることが分かる．

$\pi^m \in (\Delta', g_1, \ldots, g_n)$ は $f_i \equiv g_i, \Delta \equiv \Delta' \pmod{\pi^{2m+1}}$ より明らかである． ∎

注意 2.7

藤原氏による剛性定理 ([Fu, Proposition 2.1.1]) を用いると，m が十分大きいとき，上で構成した φ と ψ は互いに逆写像になることが分かる．

定理 2.2 の証明　A_0 を A の定義環とし，π を A_0 に属する位相的冪零な可逆元とする．A_0 は π 進完備である．π を何回かかけることで $f_1, \ldots, f_n \in A_0\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$ としてよい．$\Delta = \det\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial T_j}\right)$ の $A\langle T_1, \ldots, T_n\rangle/(f_1, \ldots, f_n)$ での像は可逆であるから，$A\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$ のイデアル $(\Delta, f_1, \ldots, f_n)$ は 1 を含む．したがって，$A_0\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$ のイデアル $(\Delta, f_1, \ldots, f_n)$ はある π の冪 π^m を含む．$U = I^{2m+1}A_0\langle T_1, \ldots, T_n\rangle \subset A_0\langle T_1, \ldots, T_n\rangle \subset A\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$ とすると，これは 0 の開近傍であり，$g_i \in f_i + U$ なる $g_1, \ldots, g_n$ に対して

- $\big(A_0\langle T_1, \ldots, T_n\rangle/(f_1, \ldots, f_n)\big)_{\pi\text{-tf}} \cong \big(A_0\langle T_1, \ldots, T_n\rangle/(g_1, \ldots, g_n)\big)_{\pi\text{-tf}}$
- $\pi^m \in (\Delta', g_1, \ldots, g_n)$

が成立する（命題 2.6）．命題 1.6 より $A \cong (A_0)_\pi$ であるから，

$$\begin{aligned}
A\langle T_1, \ldots, T_n\rangle/(f_1, \ldots, f_n) &= \big(A_0\langle T_1, \ldots, T_n\rangle/(f_1, \ldots, f_n)\big)_\pi \\
&= \Big(\big(A_0\langle T_1, \ldots, T_n\rangle/(f_1, \ldots, f_n)\big)_{\pi\text{-tf}}\Big)_\pi \\
&\cong \Big(\big(A_0\langle T_1, \ldots, T_n\rangle/(g_1, \ldots, g_n)\big)_{\pi\text{-tf}}\Big)_\pi \\
&= \big(A_0\langle T_1, \ldots, T_n\rangle/(g_1, \ldots, g_n)\big)_\pi \\
&= A\langle T_1, \ldots, T_n\rangle/(g_1, \ldots, g_n)
\end{aligned}$$

となるので $A\langle T_1, \ldots, T_n\rangle/(f_1, \ldots, f_n) \cong A\langle T_1, \ldots, T_n\rangle/(g_1, \ldots, g_n)$ である．また，$\pi^m \in (\Delta', g_1, \ldots, g_n)$ より，Δ' の $A\langle T_1, \ldots, T_n\rangle/(g_1, \ldots, g_n)$ での像は可逆元である． ∎

参考文献

[BGR] S. Bosch, U. Guntzer, R. Remmert, *Non-Archimedean analysis*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 261. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[El] R. Elkik, *Solutions d'équations a coefficients dans un anneau hensélien*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 6 (1973), 553–603.

[Fu] K. Fujiwara, *Theory of tubular neighborhood in étale topology*, Duke Math. J. 80 (1995), no. 1, 15–57.

[Hu1] R. Huber, *Continuous valuations*, Math. Z. 212 (1993), no. 3, 455–477.

[Hu2] R. Huber, *A generalization of formal schemes and rigid analytic varieties*, Math. Z. 217 (1994), no. 4, 513–551.

[Hu3] R. Huber, *Étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces*, Aspects of Mathematics, E30. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1996.

[M1] Y. Mieda, *On the action of the Weil group on the ℓ-adic cohomology of rigid spaces over local fields*, Int. Math. Res. Not. 2006, Art. ID 16429.

[M2] Y. Mieda, *On ℓ-independence for the étale cohomology of rigid spaces over local fields*, to appear in Compositio Math.

[M3] 三枝 洋一，局所体上のリジッド空間の ℓ 進コホモロジーへの Weil 群の作用について，京都大学数理解析研究所講究録「代数的整数論とその周辺 (2005)」.

[Oc] T. Ochiai, *ℓ-independence of the trace of monodromy*, Math. Ann. 315 (1999), no. 2, 321–340.