

集合と位相 中間試験 講評

問題 1 (解答例) (1) $f(S) = \{y \in Y \mid \exists x(x \in S \wedge y = f(x))\}$

(2) 部分集合 $A, B \subset X$ が $A \subset B$ を満たすと仮定する。任意の元 $y \in f(A)$ を取る。像 $f(A)$ の定義により、ある $x \in A$ が存在して $y = f(x)$ となるので、そのような元 x を一つ取る。このとき、 $x \in A$ であるから、包含 $A \subset B$ の定義により ($x \in A$ ならば $x \in B$ であるから) $x \in B$ となる。元 x の取り方から $y = f(x)$ であるので、像 $f(B)$ の定義により ($x \in B$ かつ $y = f(x)$ であるから) $y \in f(B)$ となる。任意の $y \in f(A)$ に対して $y \in f(B)$ であることが示されたので、 $f(A) \subset f(B)$ である。

(採点) 各 10 点満点で採点した。(2) の必須の文言のうち『元 x の取り方から』は、元 x を取った箇所から離れたところで書くことを想定していたが、あまり本質的ではないので、減点対象とはしなかった。そのほか、文章がおかしいものについては、程度に応じて減点した。

(講評) 集合と論理に関する基本事項が理解できているかどうかを試す問題である。

(1) では \exists と \forall を取り違えたものや、 \wedge と \rightarrow を取り違えたものがかかりあった。 \exists と \forall を取り違えたものは、これらの記号の意味が理解できていないか、あるいは集合の内包的記法の意味が理解できていないと思われる。また、正しく \exists を正しく書いておきながら、 \wedge と \rightarrow を取り違えたものについては『ならば』の意味が理解できていないと思われる。

(2) では、出題の都合により、過剰に丁寧を書くことを要求しているが、通常は次のように書けばよいだろう。『 $A \subset B \subset X$ と仮定する。 $y \in f(A)$ とすると、 $y = f(x)$ となる元 $x \in A$ が存在するが、そのような x について、 $A \subset B$ により $x \in B$ となり、また $y = f(x)$ であるから、 $y \in f(B)$ となる。以上により、 $f(A) \subset f(B)$ であることが示された』

論理記号は数学を記述する文章では用いないのが原則であるが、だからといって学ぶ必要がないということにはならない。論理的な文章で正確に数学を記述するには、命題の論理的な構造を正確に把握する必要があり、そのために、命題の内容を論理記号を用いて表すことができなければならない。

問題 2 (解答例) (1) 任意の正数 ε を取る。 $\delta = \varepsilon$ とおくと、これは正数である。 $|x - 0| < \delta$ となる任意の実数 x を取る。 $x \neq 0$ のときは $|f(x) - f(0)| = |x \sin(1/x) - 0| = |x| |\sin(1/x)| \leq |x| < \delta = \varepsilon$ であり、 $x = 0$ のときは $|f(x) - f(0)| = |0| < \varepsilon$ であるから、いずれの場合も $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ となる。(以上により $f(x)$ は原点 0 で連続であることが示された。)

(2) 任意の正数 ε を取る。(アルキメデスの原理により) $1/(2\pi\varepsilon) - 3/4 < n$ となる自然数 n が存在するので、そのような n を一つ取る。このとき、 $0 < 1/\varepsilon < 2\pi n + 3\pi/2$ である。そこで、 $x = 1/(2\pi n + 3\pi/2)$ とおくと、 $0 < x < \varepsilon$ であって、 $f(x) = x \sin(1/x) = x \sin(2\pi n + 3\pi/2) = -x < 0$ となる。(以上により $f(x)$ は原点 0 で極小値をとらないことが示された。)

(採点) 各 10 点満点で採点した。授業で説明した通り、函数の連続性はいわゆる $\varepsilon\delta$ 論法によって定義される。これに厳密に基づいて示せというのが (1) の意図するところであるので、それ以外の答え方をした答えは、たとえ書いてあることが正しくても、不正解である。ただし、点列の極限を用いて連続性を定義したものについては、想定外であったが、きちんとできていれば正解とした。(2) では、適当な (都合の良い) 自然数 n の存在を明確に示していないものが多かった。そのような答えは程度に応じて減点した。そのほか、記述が論理的におかしいものについても程度に応じて減点した。

(講評) 大学 1 年までに学ぶ内容について、集合と位相の立場にたったきちんとした取り扱いができるかどうかを試す問題であったが、残念ながらできは悪かった。(1) では、はさみうちの原理を用いて証明するというスタイルの答えがかなり見られたが、その場合は、はさみうちの原理を函数の連続性の定義に基づいて証明してから用いるべきである。もちろん、そんなことをすれば字数オーバーなので、うまくない。(2) では『任意の正数 δ に対して、 $|x| < \delta$ となる実数 x であって、 $f(x) \leq f(0)$ となるものが存在すれば、 $f(x)$ は $x = 0$ で極小値を取らない』とする間違いも散見された。正しくは『任意の正数 δ に対して、 $|x| < \delta$ となる実数 x であって、 $f(x) < f(0)$ となるものが存在すれば、 $f(x)$ は $x = 0$ で極小値を取らない』あるいは『任意の正数 δ に対して、 $0 < |x| < \delta$ となる実数 x であって、 $f(x) \leq f(0)$ となるものが存在すれば、 $f(x)$ は $x = 0$ で極小値を取らない』である。

問題 3 (解答例) (1) 任意の $y \in Y$ を取る。 $x = g(y)$ とおくと、 Δ は g のグラフだから $(y, x) \in \Delta$ となり、 Δ° の定め方から $(x, y) \in \Delta^\circ$ である。 仮定により $\Delta^\circ \subset \Gamma$ であるから $(x, y) \in \Gamma$ となり、 Γ は写像 f のグラフだから、 $y = f(x)$ を得る。 以上により、 f は全射であることが示された。

(2) 元 $y', y'' \in Y$ が $g(y') = g(y'')$ を満たすと仮定し、その値を x とおく。 Δ は g のグラフだから、 $(y', x), (y'', x) \in \Delta$ となり、 Δ° の定め方から $(x, y'), (x, y'') \in \Delta^\circ$ である。 仮定により $\Delta^\circ \subset \Gamma$ であるから $(x, y'), (x, y'') \in \Gamma$ となり、 Γ は写像 f のグラフだから、 $y' = f(x) = y''$ を得る。 以上により、 g は単射であることが示された。

(採点) 各 10 点満点で採点した。 この問題では、 集合に関する命題の証明の原則にのっとった証明がきちんと書けるかどうか採点のポイントである。 従って、 次のような答案については、 たとえ書いてあることが正しくても、 程度に応じて減点した。

(1) 証明の原則を逸脱しているもの (2) 議論が飛躍しているもの
特に逸脱や飛躍が著しいものは 0 点とした。

(講評) 集合と写像に関する基本的な概念について、 正しく理解して的確に運用できるかどうかを試す問題である。 条件 $\Delta^\circ \subset \Gamma$ は $f \circ g = 1_Y$ を写像のグラフの言葉で言い換えたものになっている。 概ねできていたが、 例えば (2) で『任意の $(y', x), (y'', x) \in \Delta$ を取る』と書き始めるなどの不適切な答案が散見された。 示すべき結論の論理的な構造にあわせて証明がなされていなければおかしい。

なお『ある x が存在して $x = g(y)$ となる』と書くのは間違いではないが、 $g(y)$ という記法を用いている時点で、 各 $y \in Y$ に対して値 $g(y)$ がただ一つ存在することを前提としているので、 わざわざ『ある x が存在して $x = g(y)$ となる』と書くのは不自然な感じがする。

問題 4 (解答例) 『 $a \preceq b$ かつ $b \preceq a$ ならば $a \sim b$ である』が求める必要充分条件であることを示す。 まず \leq が Q 上の順序であったと仮定し、 元 $a, b \in X$ が $a \preceq b$ かつ $b \preceq a$ を満たしたとする。 元 a, b の同値類をそれぞれ α, β とすれば (\leq の定義により) $\alpha \leq \beta$ かつ $\beta \leq \alpha$ となるので (\leq の反対称律から) $\alpha = \beta$ となり (Q が同値関係 \sim に関する商集合であることから) $a \sim b$ を得る。 ゆえに条件が成立する。

逆に、 \sim と \preceq が上記の条件を満たしたとする。

(反射律) 任意の $\alpha \in Q$ を取ると (商集合の定義から) ある代表元 $a \in \alpha$ が存在するが (\sim が同値関係であることにより) これは $a \sim a$ を満たすから (\sim と \preceq の関係により) $a \preceq a$ となり、 よって (\leq の定義により) $\alpha \leq \alpha$ である。

(推移律) $\alpha \leq \beta$ かつ $\beta \leq \gamma$ と仮定すると、 (\leq の定義により) $a \preceq b, b' \preceq c$ となる代表元 $a \in \alpha, b, b' \in \beta, c \in \gamma$ が存在する。 $b \sim b'$ であるから (\sim と \preceq についての仮定により) $b \preceq b'$ となり ($a \preceq b \preceq b' \preceq c$ だから、 \preceq の推移律により) $a \preceq c$ を得る。 よって $\alpha \leq \gamma$ である。

(反対称律) $\alpha \leq \beta$ かつ $\beta \leq \alpha$ と仮定すると (\leq の定義により) $a \preceq b, b' \preceq a'$ となる代表元 $a, a' \in \alpha, b, b' \in \beta$ が存在する。 $b \sim b'$ かつ $a' \sim a$ であるから (\sim と \preceq についての仮定により) $b \preceq b'$ かつ $a' \preceq a$ となり ($b \preceq b' \preceq a' \preceq a$ だから、 \preceq の推移律により) $b \preceq a$ を得る。 $a \preceq b$ かつ $b \preceq a$ であるから、 条件により、 $a \sim b$ となり、 $\alpha = \beta$ である。

以上により \leq は Q 上の順序であることが示された。

(採点) 20 点満点で採点した。 上の解答例で括弧書きにした部分は省略されていても減点していない。 しかし、 ステップが省略されている場合は、 論理の飛躍と見て減点した。

(注意) 元 $\alpha, \beta \in Q$ が $\alpha \leq \beta$ を満たすとする。 関係 \leq の定義により、 ある代表元 $a \in \alpha, b \in \beta$ が存在して $a \preceq b$ となる。 しかし、 これだけからは、 代表元 $a \in \alpha, b \in \beta$ をどのように取っても必ず $a \preceq b$ となるかどうかは分からない。

ところが、 $a \sim b$ ならば $a \preceq b$ であるという仮定と \preceq が推移的であるという仮定を用いれば、 $\alpha \leq \beta$ であるとき、 任意の代表元 $a \in \alpha, b \in \beta$ に対して $a \preceq b$ となることが証明される。 実際、 仮定から、 ある代表元 $a \in \alpha, b \in \beta$ が存在して $a \preceq b$ となるので、 そのような代表元 a, b を一つずつ取り、 それぞれ a_0, b_0 とする。 そこで、 任意の $a \in \alpha, b \in \beta$ を取ると、 $a \sim a_0$ および $b \sim b_0$ が成り立つので、 上の仮定から $a \preceq a_0$ および $b_0 \preceq b$ が成り立つ。 よって、 $a \preceq a_0 \preceq b_0 \preceq b$ となって、 関係 \preceq の推移律により $a \preceq b$ を得る。

(講評) 集合に関するやや進んだ話題である関係と商集合について、正しく理解して的確に運用できるかどうかを試す問題であったが、非常にできが悪く、10点以上のものがわずかに8名であった。

関係 \leq の推移律を示す際に、いきなり『 $\alpha \leq \beta$ かつ $\beta \leq \gamma$ とすると $a \preceq b, b \preceq c$ となる代表元 $a \in \alpha, b \in \beta, c \in \gamma$ が存在する』とした答案が多くあったが、これは関係 \leq の定義だけでは導かれないことである。反対称律についても同様である。上の(注意)を参照せよ。

全般的に \forall と \exists に相当する文言の使い分けがきちんとできていない答案が多かった。『任意の a に対して...』という言い方は、条件の成立が a の値の取り方に依存していないことは言っているが、条件を満たすような a の値が存在するかどうかについては、何も言っていないことになる。一方、『ある a が存在して...』という言い方では、条件を満たす a の値が少なくとも一つあれば良く、どのように取っても必ず条件を満たすとは言っていない。

例えば、反射律の証明では『任意の代表元 $a, a' \in \alpha$ に対して、 $a \sim a'$ であるから $a \preceq a'$ となり、よって $\alpha \leq \alpha$ である』とするのは誤りである。

全体の講評 きちんとした論理的考察ができていない学生が多い印象である。良い得点が得られなかった者は、示すべき結論の論理的な構造にあわせて証明を構築すること、飛躍せずに一つ一つのステップを踏むこと、『任意の』と『存在する』を正しく認識して使い分けること、などの基本がしっかりと身につくように努力する必要がある。

こういった点については、これまでの学習ではあまり意識にのぼらなかったかも知れない。実際には、これまでの学習でも意識して学ぶべきことであったのだが、過去のことを悔やんでも仕方がないので、期末試験までには正確な取り扱いができるようになって頂きたい。

なお、図を用いて考えを整理するのも有効である。この試験では、解答欄や下書き欄に図を描いても評価の対象とならないが、だからといって図を軽視するのは愚かである。下書き用紙に的確な図を描いて考えを整理し、それを答案の文章に反映させるのが良いやり方であろう。例えば、問題4では、下のような図を描いて考えるのはどうだろうか。図の描き方を工夫するのも学習のうちである。

成績評価について 成績評価は期末試験で行うので、期末試験で高得点を取得すれば中間試験の得点は成績評価に影響しない。ただし、期末試験の結果が芳しくないものについては、中間試験の結果を加味して評価を行う。中間試験は80点満点で採点したが、これは暫定的なものであって、これがそのまま成績評価になるわけではない。

成績優秀者 78点のものが2名、74点のものが1名あった。良くできました。

