2007 年 2 月 12 日現在
松尾 厚

中間試験講評

問題 1 正解は次の通りである。

(1) × (2) ○ (3) ○ (4) ○ (5) ○ (6) × (7) × (8) ×

内容に関しては，すべて授業で取り扱った事柄であるので，説明は省略する。

（講評） この問題は，授業で取り扱った内容のいくつかについて，記憶すべきことは正確に記憶し，理解すべきことは正確に理解できているかどうかを試すものである。

残念ながら，二つ以上の設問について誤答して零点となった答案が多くあったが，概念の理解の仕方が曖昧であるために，そのような結果に終わったものと思われる。該当者は，よく反省して，日頃から物事を正確に理解した上で，正しく記憶に留めるよう努めて頂きたい。

問題 2 求める範囲は，次の集合である。ここでは図は省略する。

$$\big\{(x,y)\in X \;\big|\; (x-1/2)^2+y^2>1\big\} \,\cup\, \big\{(x,y)\in X \;\big|\; (x+1/2)^2+y^2\le 1\big\}$$

（講評） 日常的にも『ならば』という言葉はよく使われるが，その用法はしばしば恣意的で曖昧である。しかし，数学においては『ならば』という言葉は厳格に運用されなければならない。この問題は，この言葉の意味を明確に認識できているかどうかを試すものである。

問題 3 (1) 求める論理式は，次の通りである。

$$\forall\varepsilon((\varepsilon\in\mathbb{R}\wedge 0<\varepsilon)\to\exists m(m\in\mathbb{N}\,\wedge\,\forall n((n\in\mathbb{N}\wedge m<n)\to(a-\varepsilon<x_n\wedge x_n<a+\varepsilon))))$$

(2) 求める論理式は，次の通りである。

$$\exists\varepsilon((\varepsilon\in\mathbb{R}\wedge 0<\varepsilon)\,\wedge\,\forall m(m\in\mathbb{N}\to\exists n((n\in\mathbb{N}\wedge m<n)\,\wedge\,(x_n\le a-\varepsilon\vee a+\varepsilon\le x_n))))$$

（講評） この問題は，記号を並べ替えるタイプの問題であるので，授業で説明した論理式の記述の規則を憶えてさえいれば，たとえ数列が収束することの形式的な定義を知らなかったとしても，慎重に考えることによって正解に到達できるであろう。

論理式を正確に書くことは，数学に現れる諸条件の構造を正確に把握し，それらを的確に運用するための有効な手段である。この問題は，論理式を通じて数学に現れる諸条件の構造を把握する能力を試すものである。

問題 4 各 $(a,b)\in X$ に対して次のようにおく。

$$\rho(a,b)=\min\left\{1-\sqrt{(a+1/2)^2+b^2},1-\sqrt{(a-1/2)^2+b^2}\right\}$$

この値は正である。そこで，板からなる集合族 $\mathscr{D}$ を次のように定める。

$$\mathscr{D}=\{D(a,b;r,r)\mid (a,b)\in X,\, r=\rho(a,b)/2\}$$

これに対して，包含関係 $X\subset\bigcup\mathscr{D}$ および $\bigcup\mathscr{D}\subset X$ を証明すればよい。

（注意 1） 上記の $\mathscr{D}$ の代わりに，例えば $\mathscr{D}=\{D(a,b;r,r)\mid (a,b)\in X,\, 0<r<\rho(a,b)/\sqrt{2}\}$ を考えても良いが，$\mathscr{D}=\{D(a,b;r,r)\mid (a,b)\in X,\, r=\rho(a,b)/\sqrt{2}\}$ では駄目である。実際，$(a,b)=(0,1/2)$，$r=\rho(a,b)/\sqrt{2}$ のとき，$r=1/\sqrt{2}-1/2$ となり，点 $(1/\sqrt{2}-1/2,1/\sqrt{2})$ は板 $D(a,b,r,r)$ に属するが集合 X には属さない。

（注意 2） 上記の $\mathscr{D}$ の代わりに，例えば $\mathscr{D}=\{D(0,0;|a|,|b|)\mid (a,b)\in X,\, a\neq 0,\, b\neq 0\}$ を考えても良いが，$x=0$ または $y=0$ のときに集合 $D(0,0;|x|,|y|)$ が板にならないため，包含関係 $X\subset\bigcup\mathscr{D}$ を示す際に，結局は不等式による評価が必要となる。

（講評） 集合 X は $\mathbb{R}^2$ の Euclid 位相に関する開集合である。すなわち，X の任意の点に対して，その点を中心とする開円盤であって，X に含まれるようなものが存在する。従って，X の各点に対して，それを中心とする板であって，上記のような開円盤に含まれるようなものを考え，そのような板の全体からなる族を取れば，X を板からなる集合族の和集合で表せるというわけである。ゆえに，この問題は，表面的には集合の問題ないしは図形の問題であるが，実質的には位相の問題であるといえる。

問題 5 問題文で問われた必要充分条件は (2) の条件『f は単射である』である。

（充分性の証明） 写像 $f : X \to Y$ が単射であると仮定し，任意の部分集合 $U \subset X$ を取る。

任意の $y \in f(U)$ を取る。このとき，$y \notin f(X \setminus U)$ を背理法で示すため，$y \in f(X \setminus U)$ であったと仮定する。まず $y \in f(U)$ であったから，$f(u) = y$ となる $u \in U$ が存在する。また，背理法の仮定により $y \in f(X \setminus U)$ でもあったから，$f(x) = y$ となる $x \in X \setminus U$ も存在する。このとき，特に $x \notin U$ である。すると，$f(u) = y = f(x)$ であり，f は単射であったから $u = x$ でなければならないが，これは $u \in U$ かつ $x \notin U$ に矛盾する。ゆえに，$y \notin f(X \setminus U)$ であることが示された。もとより $y \in Y$ であるから $y \in Y \setminus f(X \setminus U)$ である。

以上により，任意の部分集合 $U \subset X$ に対して $f(U) \subset Y \setminus f(X \setminus U)$ である。

（必要性の証明） 写像 $f : X \to Y$ に関して，任意の部分集合 $U \subset X$ に対して $f(U) \subset Y \setminus f(X \setminus U)$ が成立すると仮定する。

条件 $f(a) = f(b)$ を満たす任意の $a, b \in X$ を取り，$U = \{b\}$ とおくと，$f(a) = f(b) \in f(U)$ である。仮定により $f(U) \subset Y \setminus f(X \setminus U)$ が成立するので，$f(a) \in Y \setminus f(X \setminus U)$ である。特に $f(a) \notin f(X \setminus U)$ となるが，$a \in X \setminus U$ なら $f(a) \in f(X \setminus U)$ なのだから，$a \notin X \setminus U$ である。もとより $a \in X$ であるから $a \in U$ となり，$U = \{b\}$ であったから $a = b$ を得る。

以上により，写像 f は単射である。

（注意 1） 差集合の定義により，$x \in X \setminus U$ であるとは，$x \in X$ かつ $x \notin U$ となることである。特に $x \in X \setminus U$ ならば $x \notin U$ である。また，$x \notin X \setminus U$ ならば $x \notin X$ または $x \in U$ であるから，$x \notin X \setminus U$ かつ $x \in X$ ならば $x \in U$ である。

（注意 2） 写像 $f : X \to Y$ が単射であるとは，（任意の $a, b \in X$ に対して）$f(a) = f(b)$ ならば $a = b$ が成立することである。対偶を取って，$a \neq b$ ならば $f(a) \neq f(b)$ となることであると言ってもよい。また，任意の $y \in Y$ に対して $f(x) = y$ となる $x \in X$ が一意的であるとも言えるが，一意的であるとはどういうことかを考えてみると，それは結局 $f(a) = f(b) = y$ ならば $a = b$ であるということに他ならないので，振り出しに戻る。

（注意 3） 写像 f は，問題文で一つ与えられて固定されているものなので，証明中で無断で使用しても良い。しかし，部分集合 U は，問題文では『任意の部分集合 $U \subset X$ に対して』という形で現れており，変数 U の通用する範囲は限定されている（局所的である）から，証明で使用する際には再度『任意の部分集合 $U \subset X$ を取る』などと書くべきである。

（講評） この問題は，集合と写像に関する基本的な命題の証明を通じて，緻密な論理的考察が正確に遂行できるかどうか，また，それを整理して端麗な文章にまとめ上げることができるかどうかを試す問題である。

証明の叙述においては，仮定から結論に至る論理的因果関係が不足なく明記されていなければならない。また，文字の使用に際しては,『任意の』と『存在する』の違いが明確で，変数と定数の区別がきちんと付き，その通用する範囲が正確に読みとれるように書かれていなければならない。従って，たとえ証明方法や議論の流れが上記の解答と全く同じであっても，叙述の仕方によって減点されることが大いにあり得る。

数学に取り組むにあたっては，緻密な論理的考察が欠かせない。論理的考察は直感的洞察を裏付けるものであるので，論理的考察力を正しく向上させることができれば，同時に直感的洞察力も大いに力を増し，ひいては，より広い数学の世界に自由に飛び立つことができるようになるだろう。