2005 年度　集合と位相　　　　　　　　　　　　　　　　2006 年 5 月 3 日
改訂版　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　松尾　厚

期末試験採点講評

今回の期末試験では，小問 A から F までの計 6 問を課しましたが，その採点結果および中間試験の結果と平常点を総合して最終的な成績を付けました。

その結果，期末試験単独で『優』の評価を得たものが４名，総合判定で『優』を得たものが５名,『良』のものが 15 名,『可』のものが 16 名となりました。残念ながら不合格となった人は，反省してよく勉強し，追試験に備えてください。

小問 A の略解と講評

真のものを○，偽のものを×とすると，正解は

(1) ○　(2) ×　(3) ○　(4) ×　(5) ×　(6) ○　(7) ○　(8) ×　(9) ×　(10) ×

となります。この問題の出題内容はすべて授業で説明したことですので，これ以上の解説はしません。

全問正解者が３名，９問正解者が８名，８問正解者が６名でした。なお，６問以上不正解であった場合には部分点を与えずに零点としました。

小問 B の略解と講評

誤りの箇所は『閉区間 $[a, b]$ は弧状連結であるから連結である』の部分である。誤りである理由は，弧状連結ならば連結であることを示すのに区間が連結であることを使うので，この文章の述べ方では区間の連結性を示したことにならないからである。

区間が連結であることの証明と中間値の定理の証明については，授業で詳しく説明しました。その内容が理解できていれば，問題文にある文章と比較することにより，誤りの箇所が見つかるでしょう。正解者は８名でした。

小問 C の略解と講評

一般に，閉包の定義から，位相空間 X の部分集合 A が X の閉集合であるための必要十分条件は $\bar{A} = A$ であることに注意する。ここで $A \subseteq \bar{A}$ は常に成立しているので，上の条件は $\bar{A} \subseteq A$ とも同値である。

さて，位相空間 Y の任意の開集合 U をとり，U の Y における補集合を A とすると，$U = Y \setminus A$ である。このとき，A は閉集合であり，よって 上で述べたことから $\bar{A} = A$ が成立する。ここで，仮定から $\overline{f^{-1}(A)} \subseteq f^{-1}(\bar{A})$ であるが，$\bar{A} = A$ であるので，$\overline{f^{-1}(A)} \subseteq f^{-1}(A)$ である。よって，再び上で述べたことから $f^{-1}(A)$ は X の閉集合である。ところが，$f^{-1}(U) = f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$ であるから $f^{-1}(U)$ は閉集合 $f^{-1}(A)$ の X における補集合であり，よって X の開集合である。以上により，写像 f が連続であることが証明された。

この問題は，定義に基づいて丁寧に議論すれば解答が得られる易しい問題ですが，きちんと論証ができているかどうかが採点のポイントです。この問題は位相の問題ですが，その実質は集合と写像の問題であると言えます。正解者は 19 名でした。

小問Dの略解と講評

位相空間 X の部分集合 K がコンパクトであるとは，K の任意の開被覆が有限部分被覆を持つことである。ここで，K の開被覆とは，位相空間 X の開集合からなる族 $\mathcal{U}$ であって $K \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ となるもののことである。また，K の開被覆 $\mathcal{U}$ の有限部分被覆とは，有限部分集合 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ であって，$K \subseteq \bigcup \mathcal{V}$ となるもののことである。

次に $-1 \leq t \leq 1$ を満たす実数 t および $i = 1, 2, 3, 4$ に対して，次のようにおく。

$$X_1(t) = \left\{(x, -1) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -1 \leq x \leq t\right\}, \quad X_2(t) = \left\{(x, 1) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -1 \leq x \leq t\right\}$$
$$X_3(t) = \left\{(-1, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -1 \leq y \leq t\right\}, \quad X_4(t) = \left\{(1, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -1 \leq y \leq t\right\}$$

このとき，$A \cup B = X_1(1) \cup X_2(1) \cup X_3(1) \cup X_4(1)$ である。

さて，集合 $K = A \cup B$ の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ をとる。このとき，$\mathcal{U}$ は各 $X_i(1)$ の開被覆でもある。そこで， $X_i(1)$ の開被覆 $\mathcal{U}$ が有限部分被覆を持てば，$i = 1, 2, 3, 4$ に対するそれらの合併をとることによって K の開被覆 $\mathcal{U}$ の有限部分被覆が得られ，K がコンパクトであることが示される。

あとは，集合 $X_i(t)$ が $\mathcal{U}$ に属する有限個の開集合で覆われるような実数 t の集合 T_i を考え，実数の連続性を利用して，$T_i = [-1, 1]$ であることを証明すれば良い。

上に述べた方針の他にも，いろいろなやり方が考えられますが，この問題では，位相空間の部分集合に対するコンパクト性の定義に基づいて証明することが求められていますので，例えばユークリッド空間の有界な閉集合だからコンパクトであるという議論を証明なしで用いたのでは不正解です。正解者は６名，ほぼ正解の者が４名でした。

小問Eの略解と講評

集合 X の任意の元 x, y をとる。このとき，非負整数 n が条件 $(x \cup y) \cap [n] \subseteq x \cap y$ を満たすならば，$x \cap [n] \subseteq y$ かつ $y \cap [n] \subseteq x$ であるから，$x \cap [n] = y \cap [n]$ が成立する。逆に，$x \cap [n] = y \cap [n]$ が成立するならば $(x \cup y) \cap [n] \subseteq x \cap y$ である。よって，$x = y$ のときには $N(x, y) = \mathbb{N}$ であり，$x \neq y$ のときには $|N(x, y)|$ は条件 $x \cap [n] = y \cap [n]$ を満たすような非負整数 n の最大値に等しい。

以上の考察に基づき，(1) は距離の定義に従って確かめれば良い。(2) は，例えば $p_n = [n]$ によって定められた点列 (p_n) を考え，この点列が Cauchy 列であることと極限点を持たないことを示せばよい。

集合 X の各元 x は $\mathbb{N}$ の有限部分集合ですから，これに $f(x) = \sum_{i \in x} 1/2^i$ なる有理数を対応させることができます。このとき，異なる二点 $x, y \in X$ の距離 $d(x, y)$ は，対応する有理数 $f(x)$ と $f(y)$ の二進小数表示がちょうど小数第 n 位まで一致しているときに，$1/2^n$ に等しいというわけです。なお，(1) のみ正解の場合は，部分点を与えず零点としました。正解者は５名でした。

小問Fの試験結果

残念ながら正解者はありませんでした。