2. 接続と Riemann 計量

Riemann 計量

M を可微分多様体とする．切断の空間 $\Gamma(T^*M \otimes T^*M)$ の要素で，各点に定まる双線形形式

$$\langle\, ,\, \rangle : T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbf{R}$$

が対称かつ正定値であるものを Riemann 計量という．Riemann 計量の入った可微分多様体を Riemann 多様体という．局所座標を用いて Riemann 計量は

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

と表示される．ここで，

$$g_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle$$

とする．局所座標に関する Euclid 計量を 1 の分割ではり合わせることにより，一般に可微分多様体には Riemann 計量が入ることが示される．

対称な接続

アフィン接続が対称であるとは，Riemann-Christoffel 記号が，つねに

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

を満たすことである．これは M 上のベクトル場 X, Y に対して

$$T(X,Y) = \bigtriangledown_X Y - \bigtriangledown_Y X - [X,Y]$$

とおいたとき，つねに $T(X,Y) = 0$ となることと同値である．

Riemann 接続

M のアフィン接続が Riemann 計量と両立するとは，M 上の任意の滑らかな曲線 $\xi(t)$ とそれに沿ったベクトル場 $X(t), Y(t)$ に対して，共変微分が

$$\frac{d}{dt}\langle X, Y\rangle = \langle \frac{DX}{dt}, Y\rangle + \langle X, \frac{DY}{dt}\rangle$$

を満たすことである．これは，曲線$\xi(t)$ に沿った平行なベクトル場 $X(t), Y(t)$ に対して，$\langle X(t), Y(t)\rangle$ が t によらない定数であることと同値である．

定理　Riemann 多様体 M 上には，対称で Riemann 計量と両立するアフィン接続が存在して一意的である．

　このような接続を Riemann 接続または Levi-Civita 接続とよぶ．接続の構成はおよそ次のようになされる．接続が Riemann 計量と両立することから

$$\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} = \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \rangle + \langle \frac{\partial}{\partial x^j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^k} \rangle$$

が成り立つ．ここで

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{\ell} \Gamma_{ij}^{k} \frac{\partial}{\partial x^\ell}$$

とおいて

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \sum_{\ell} \left(\Gamma_{ij}^{\ell} g_{\ell k} + \Gamma_{ik}^{\ell} g_{\ell j} \right)$$

と表し，接続の対称性を用いると

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) = \sum_{\ell} \Gamma_{ij}^{\ell} g_{\ell k}$$

となる．したがって，

$$\Gamma_{ij}^{\ell} = \frac{1}{2} \sum_{k} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) g^{k\ell}$$

が得られる．これが，Riemann-Christoffel 記号の変換規則を満たしていることを示せばよい．