宇宙のかたち – 数学からのチャレンジ

河野俊丈

東京大学大学院数理科学研究科，Kavli IPMU

2015年5月22日

高校のための金曜特別講座

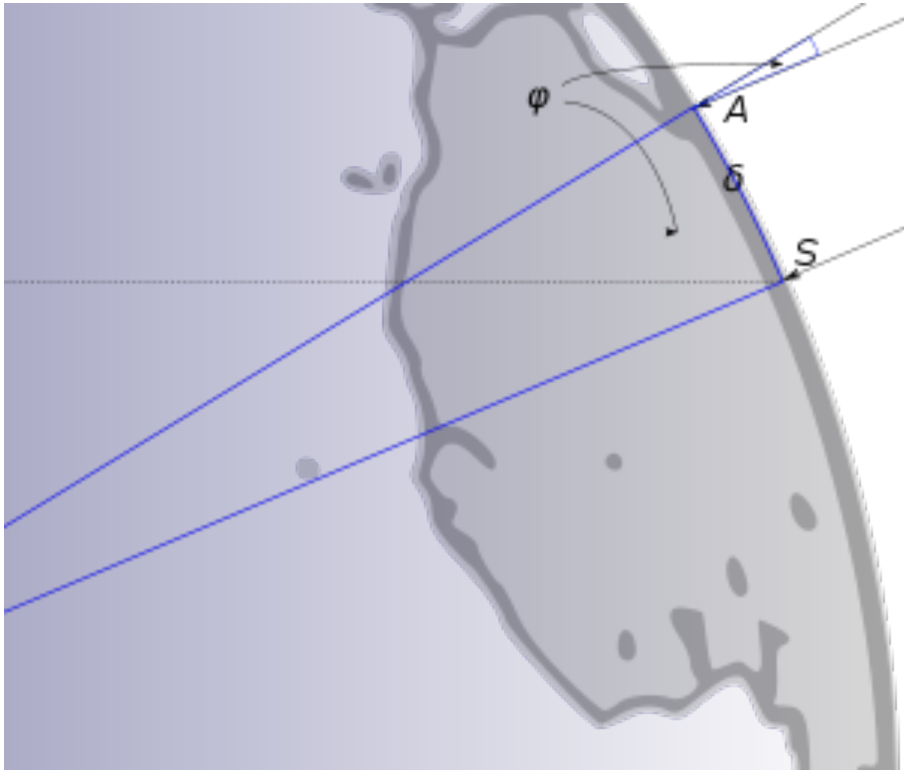
この講義のテーマ

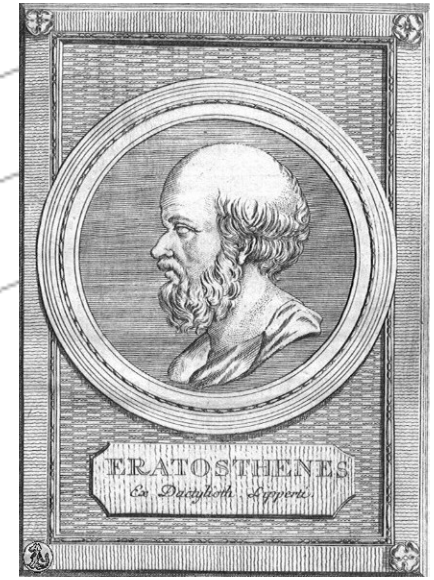
(1) 私たちがすんでいる空間は平坦なのか，曲がっているのか？

(2) 空間が曲がっているとはどういうことか．それは空間の中にいても認識できるのか？

(3) 一様に広がった空間は全体として，どのようなかたちになりうるのか？　最新の幾何学の成果から何が分かるか．

エラトステネスによる地球の大きさの測定

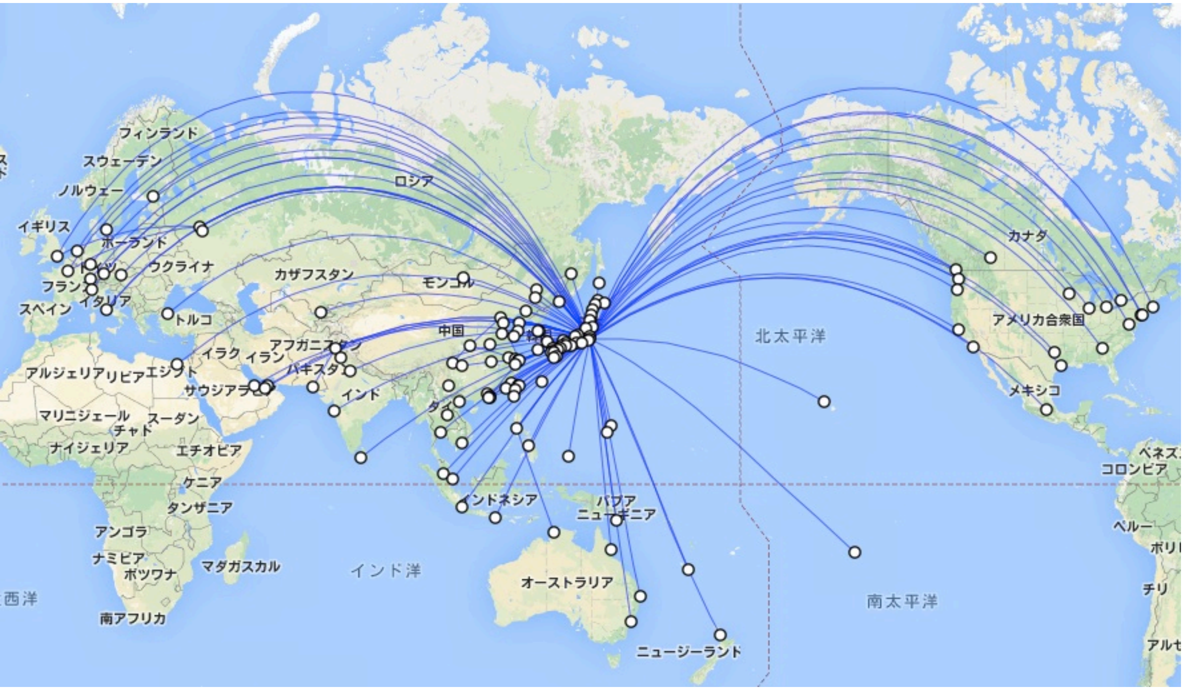




Eratosthenes, BC275-BC194

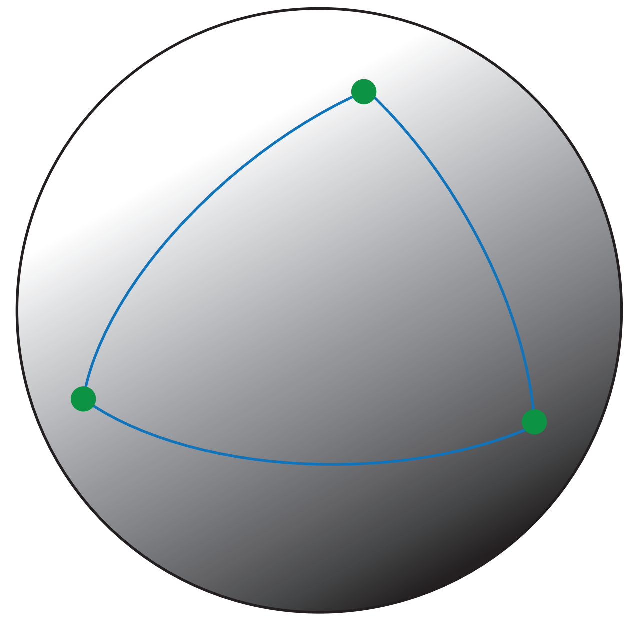
アレクサンドリアとその南にあるシエネでの南中時の太陽の高度差から地球の大きさを求めた.

地球の外からの視点を使わないで地球が球形であることをどのように認識できるか？



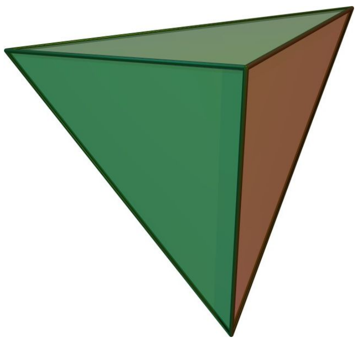
飛行機の航路は球の大円　（測地線）

大円で囲まれた三角形（測地三角形）の内角の和は180度よりも大きい.

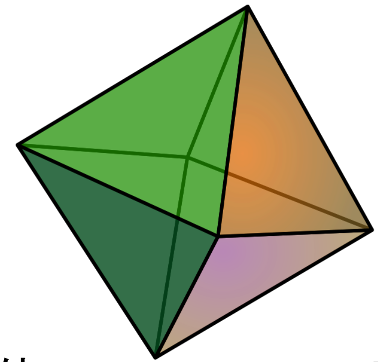


地球上で距離を測るためには，地図に表したときの縮尺
（それぞれの点で縦方向，横方向の縮小率と両者の角度の3つの情報が必要）
これを「計量」とよぶ.

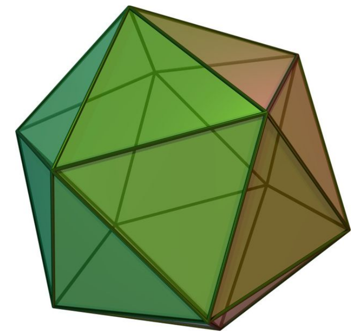
3次元空間の正多面体



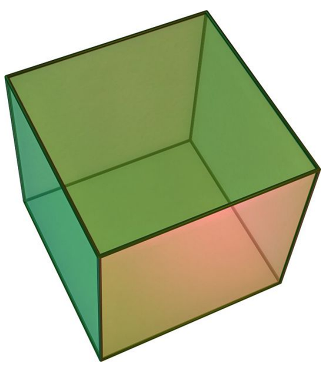
正4面体



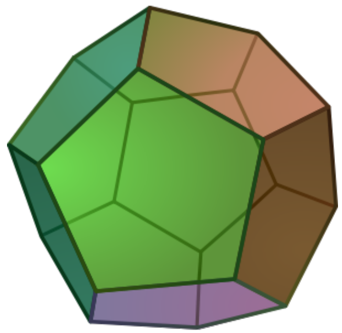
正8面体



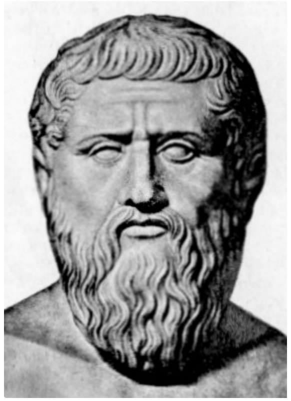
正20面体



立方体



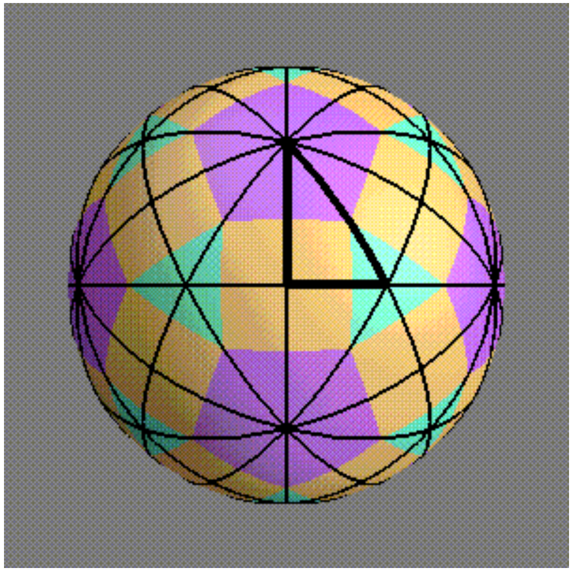
正12面体

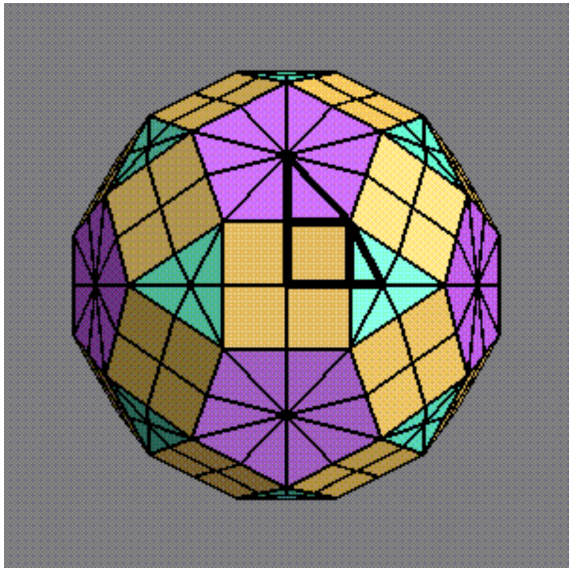


Plato

球面の正則分割

合同な正多角形が各頂点のまわりに同じ個数集まっている.

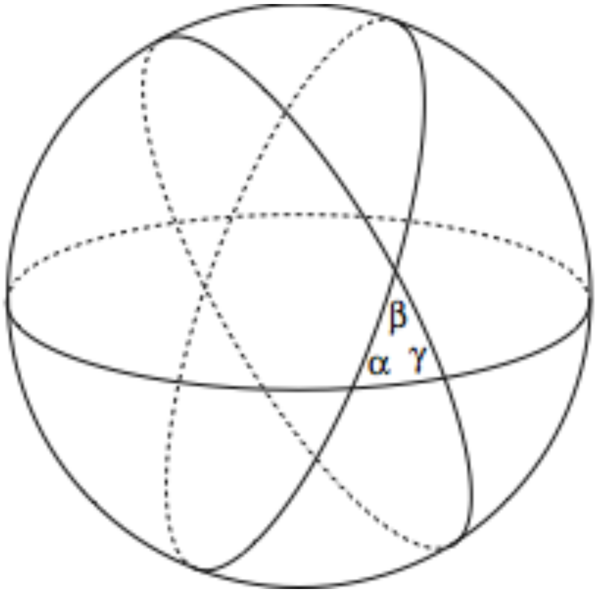


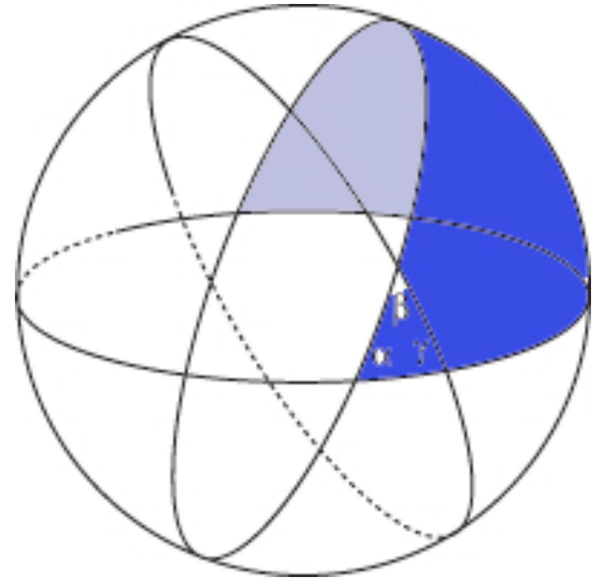


正3角形，正5角形による正則分割(タイルばり)

上の3角形の内角の和は
36°+60°+90°=188° > 180°

球面3角形





球面三角形の面積 $\boxed{A = \alpha + \beta + \gamma - \pi}$

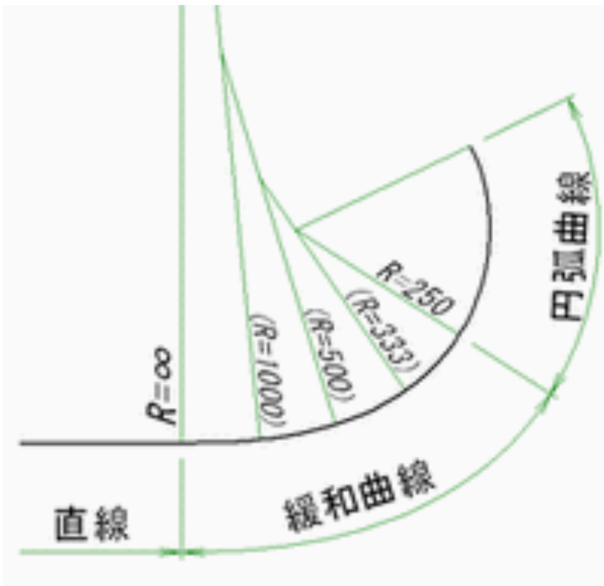
右の青く塗った部分の面積は 2α

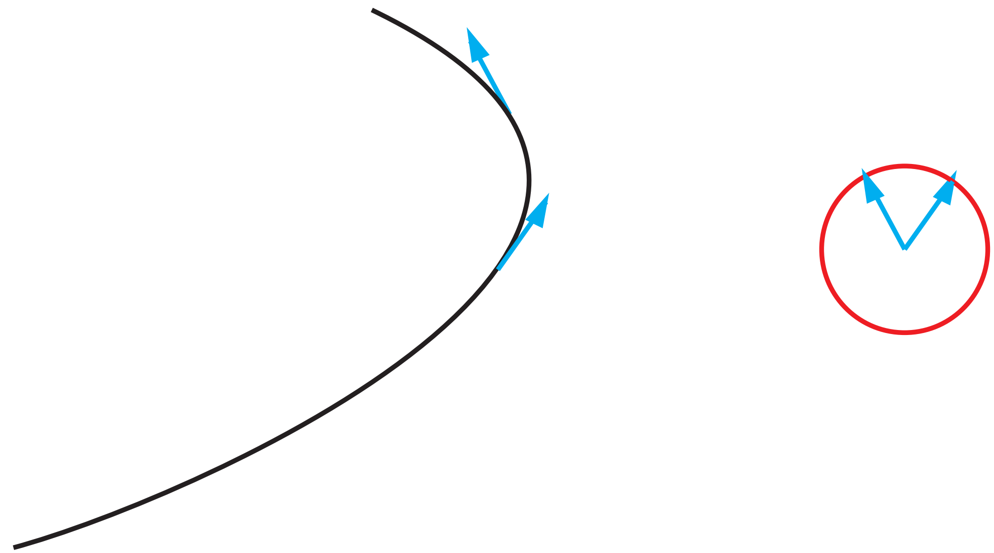
$$\alpha + \beta + \gamma > \pi$$

角度は弧度法で
表示する.

360°= 2π
180° = π

曲線の曲率とは？



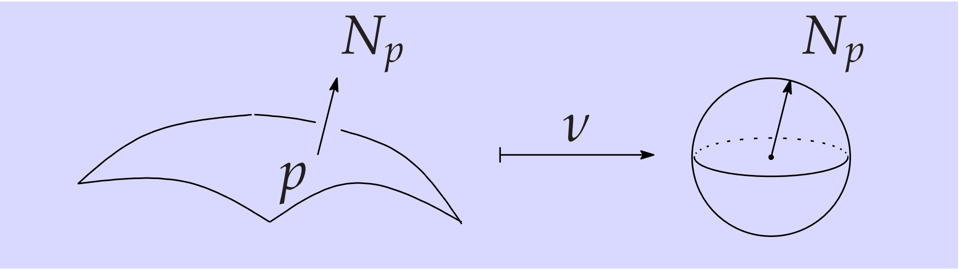


線路の曲がり具合は曲率半径Rで表される

曲線の曲率は長さ1の青い矢印の始点の移動距離と右の円上の終点の移動距離の比

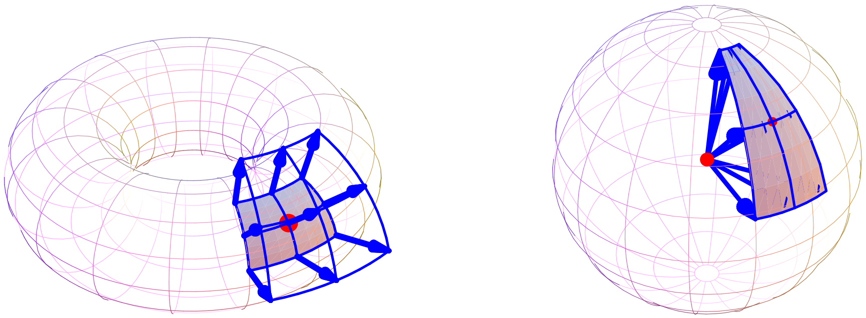
半径Rの円の曲率Kは逆数　1/R

曲面のガウス曲率

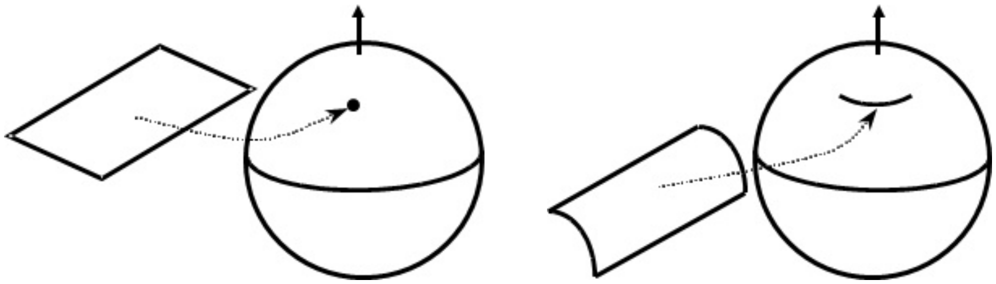


ガウス写像

曲面に垂直で長さ１のベクトルによって球面への写像を構成.



ガウス写像によってうつされる部分の面積比がガウス曲率.
向きが逆になるときは負号をつける.

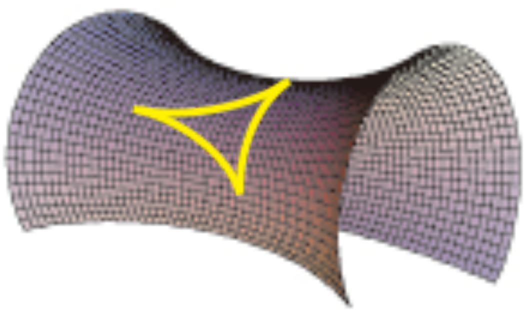


平面の曲率は０

平面をまるめても
曲率は０

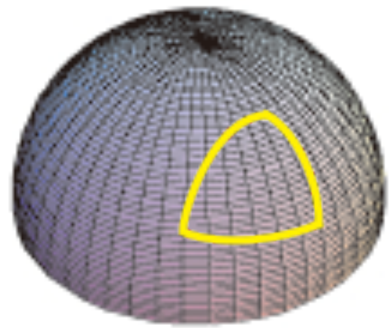
ガウス曲率と3角形の内角の和

3角形の内角の和＜180度

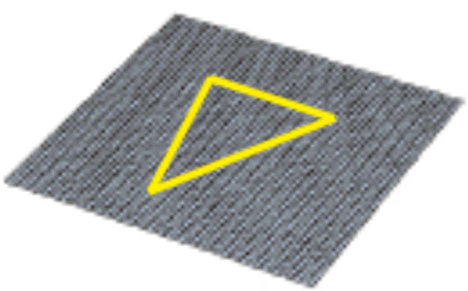


$K < 0$

3角形の内角の和＞180度



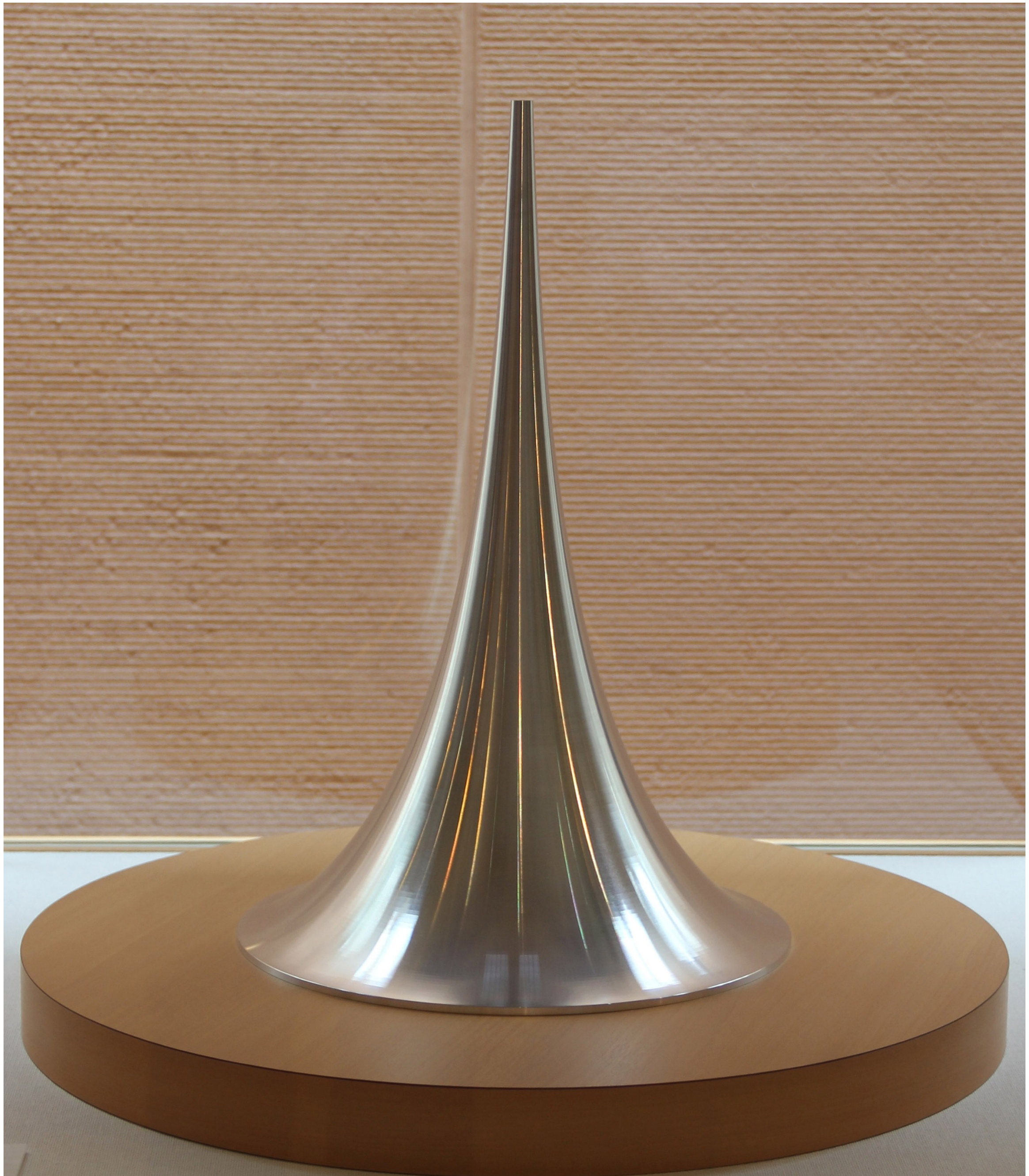
$K > 0$



$K = 0$

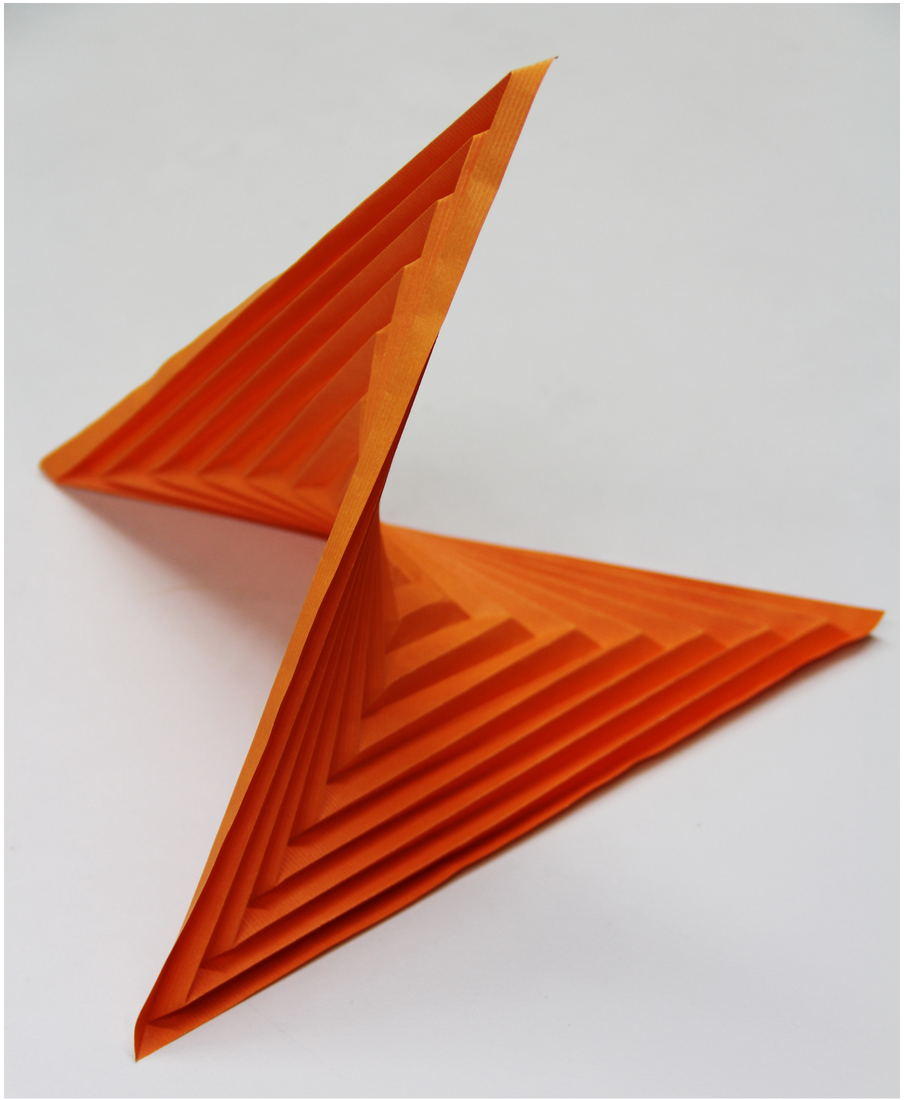
3角形の内角の和＝180度

Gauss 1777-1855



ガウス曲率が負の
一定値をとる曲面
の模型
（東大数理所蔵）

折り紙による双曲放物面



負の曲率をもつ曲面

フラットな平面を折ることによって近似されている.

交わった2つの放物線が見える.

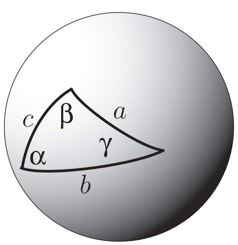
ガウスの定理 Theorema Egregium

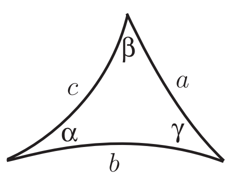
曲面のガウス曲率は，計量によって定まる.

曲率は曲面が入っている空間からみなくても，内在的にさだまる.

ガウス曲率 K の測地三角形での平均は,
三角形の内角を α, β, γ として

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi$$





等距離地図の不可能性
地球のどんな小さい部分も縮尺一定の正確な地図はつくれない！

球面の曲率は正，　平面の曲率は０

内在的な微分幾何学の確立

計量から出発して，空間の曲がり具合を表す曲率の概念がリーマンによって定式化された.

局所的に n 個の座標で定義できる図形が n 次元多様体

Riemann 1826-1866

$g_{\mu\nu}$ 計量 リーマン多様体

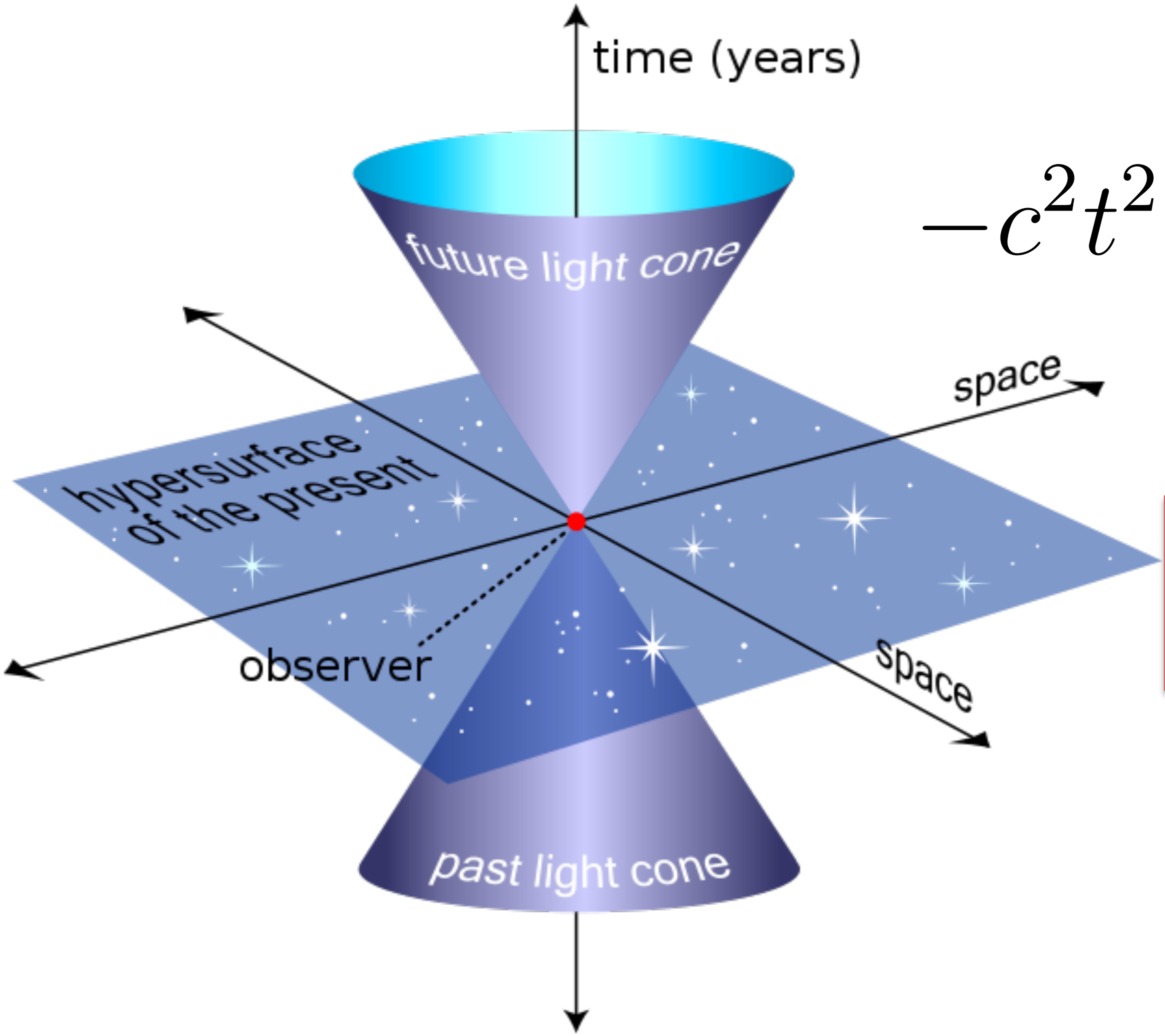
測地線

さまざまな方向の測地3角形の内角を見る

リーマンの曲率テンソル

$R_{\mu\nu}$ リッチ曲率

ローレンツ計量と光錐



$$-c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

特殊相対論はローレンツ計量を不変にする理論（光速の不変性）

内在的な微分幾何と相対論

計量から出発した内在的な幾何学はアインシュタインの一般相対性理論の成立に影響を与えた.

アインシュタイン方程式

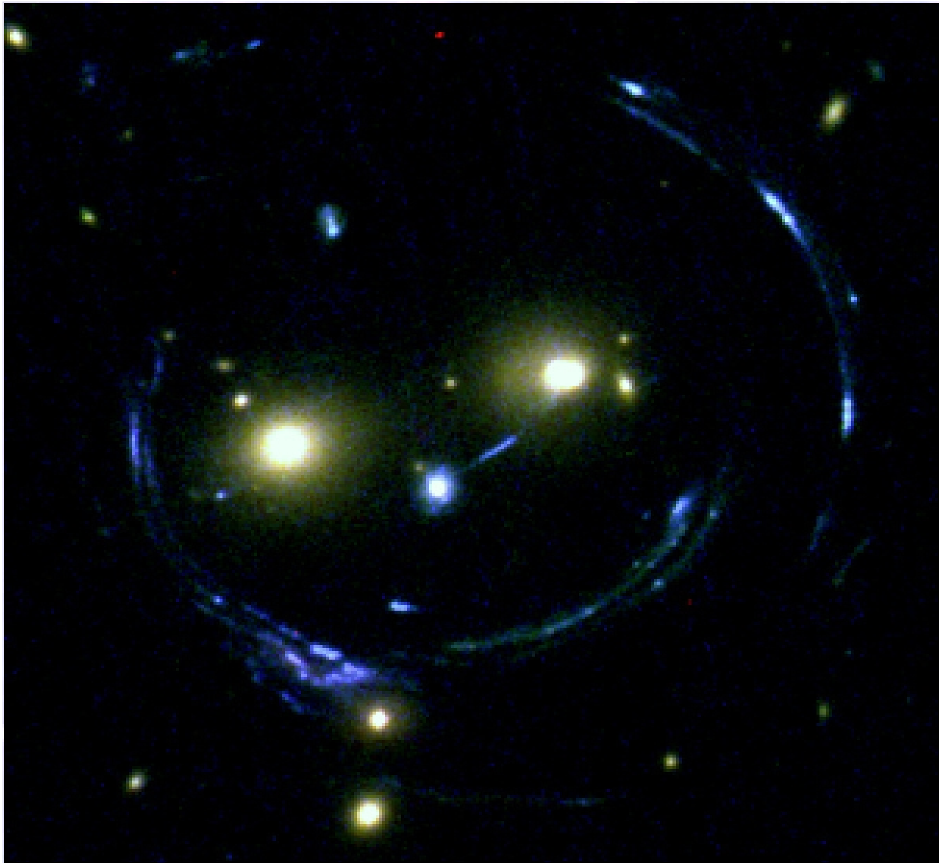
$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

左辺は4次元時空の曲がり具合を表し，計量で表現される.
右辺は質量，エネルギーの分布を表す.

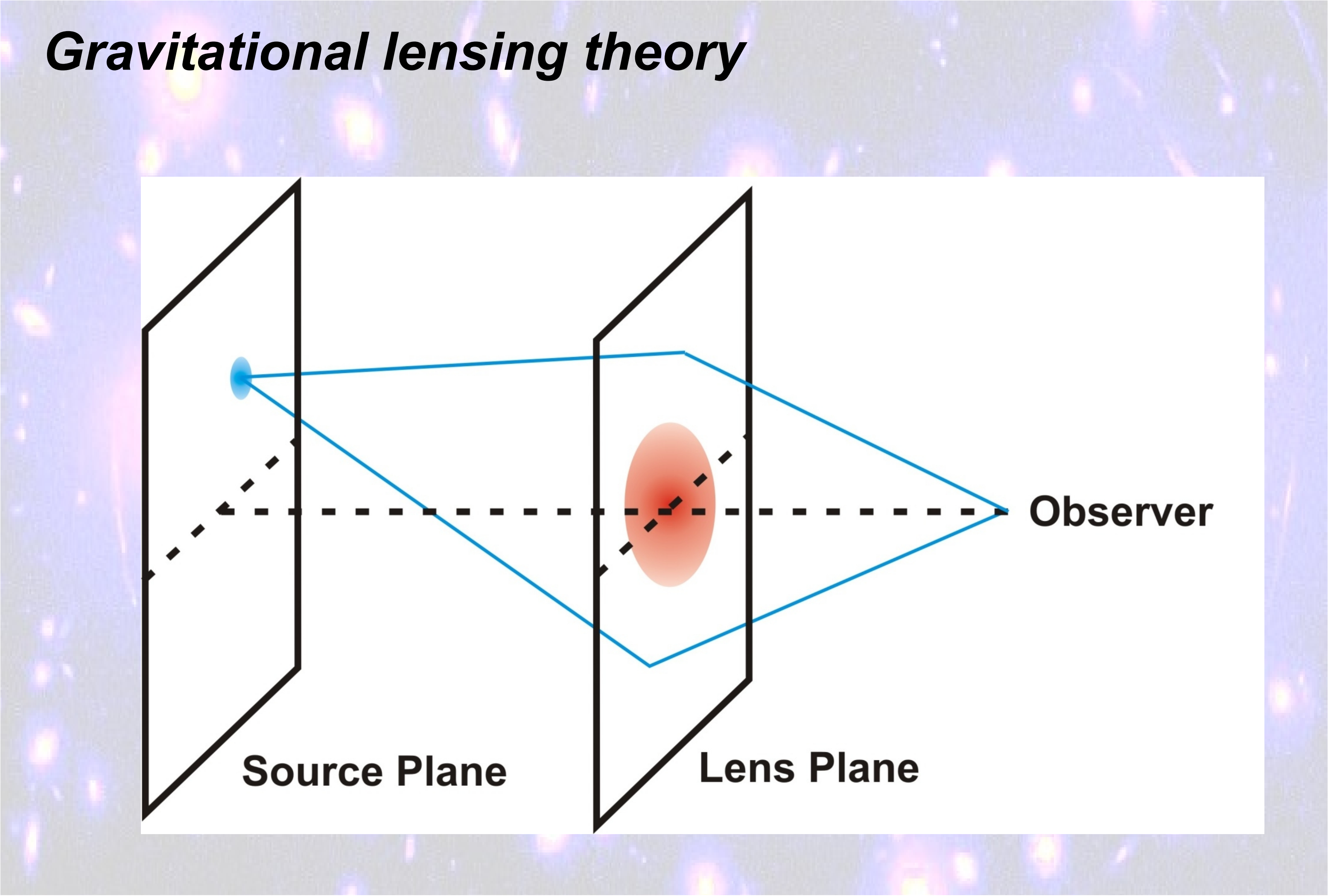
光の経路は測地線で表される.

重力レンズ

大きな重力によって空間が歪められ光が曲がって進む

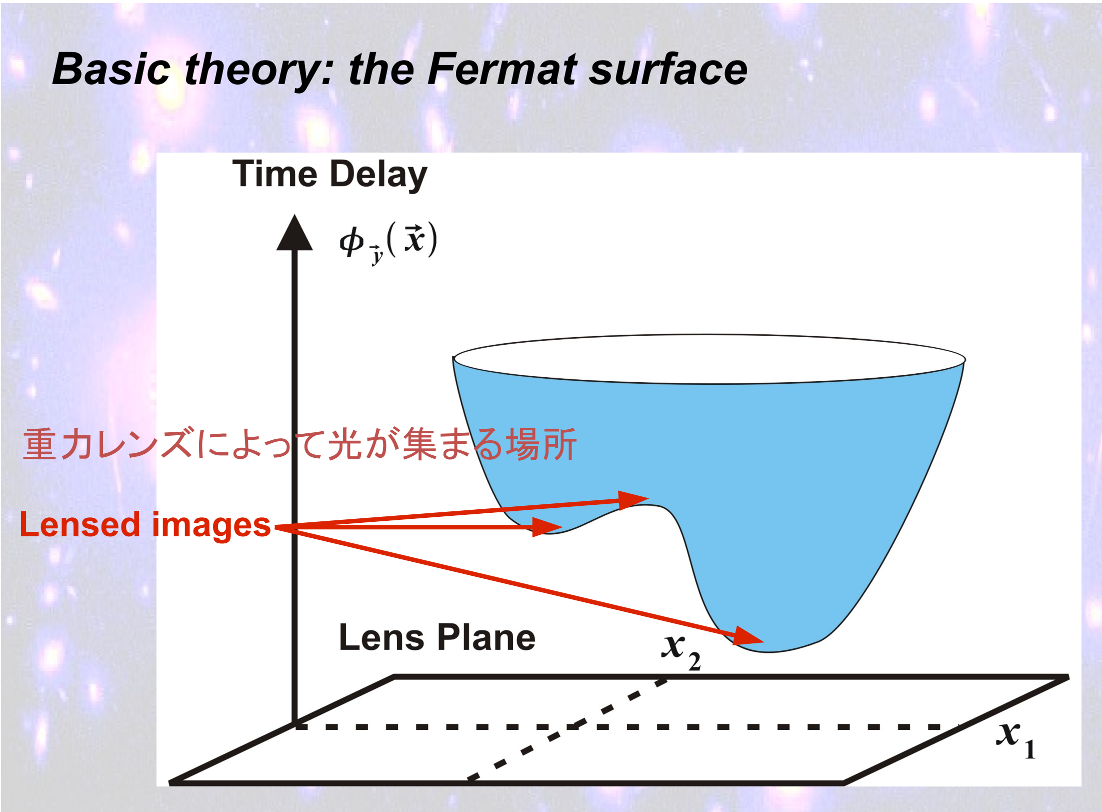


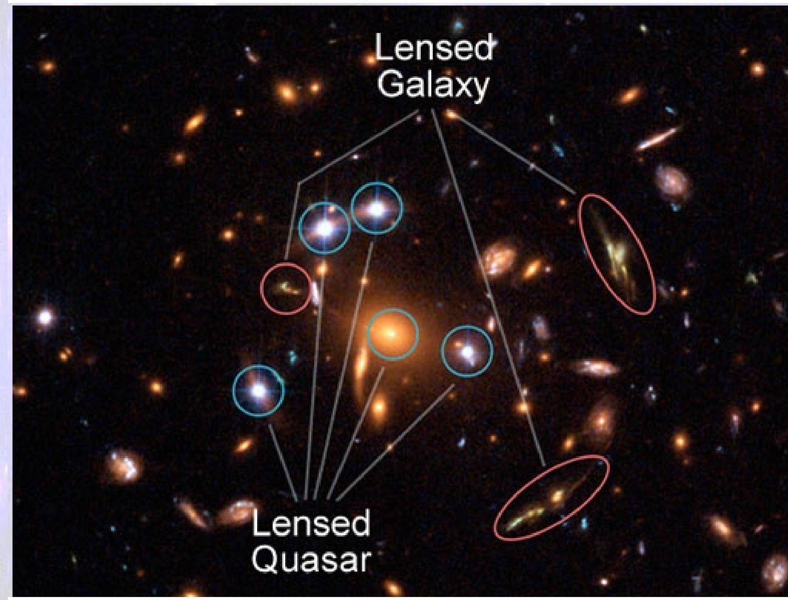
重力レンズのしくみ



Gravitational lensing theory
Observer
Source Plane
Lens Plane

なぜ同じ銀河が奇数個見えるのか？

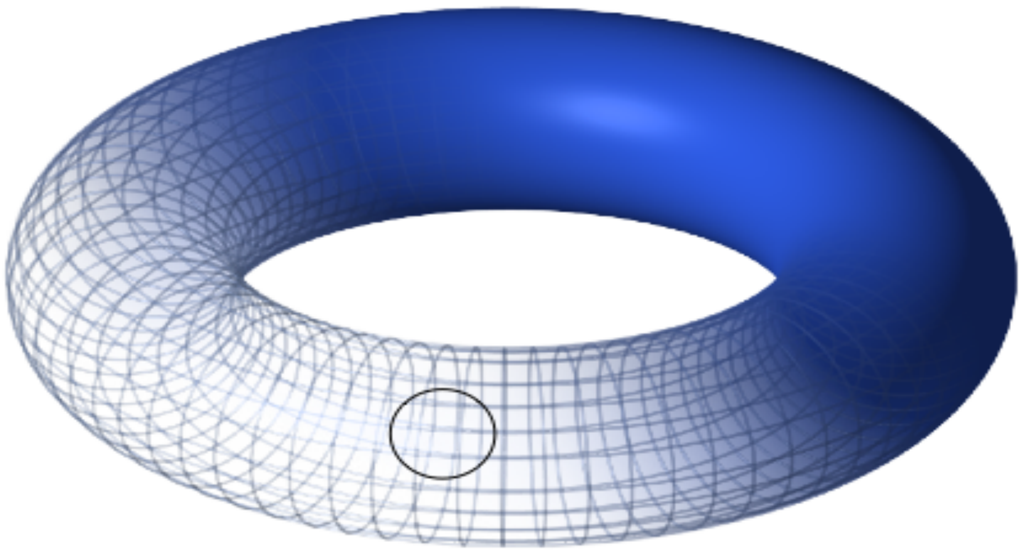


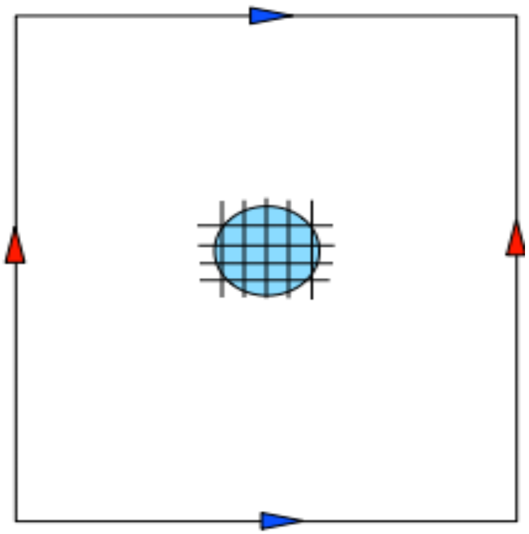


重力レンズの観測結果をもとに，宇宙の暗黒物質（ダークマター）の分布地図を作る研究がすすんでいる．

宇宙の幾何構造へのアプローチ

まずドーナツ面の幾何構造を考えよう



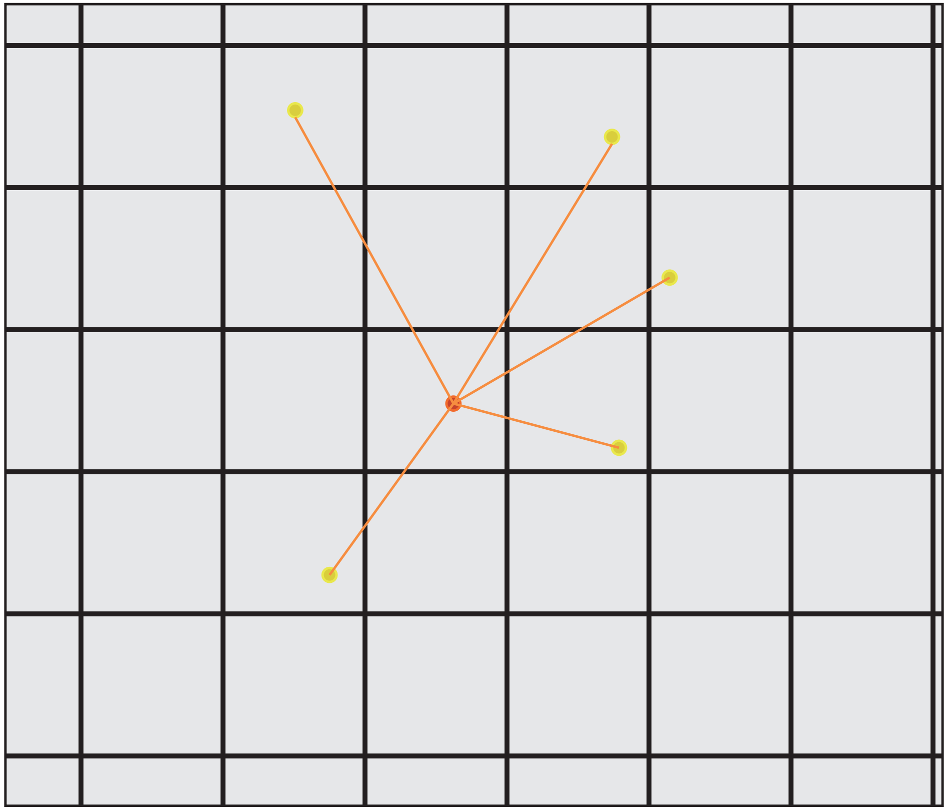


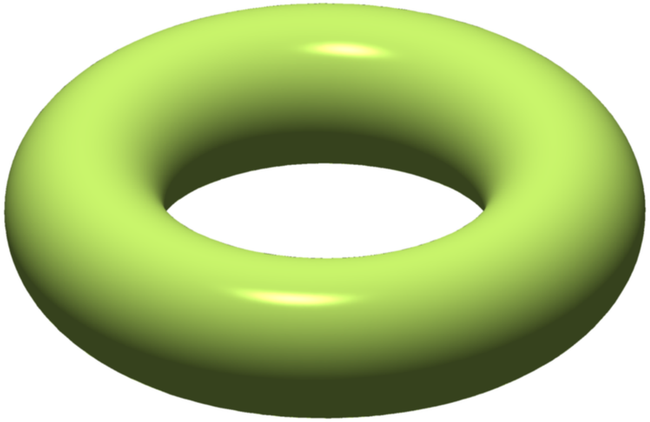
トーラスは右のような展開図によって距離をさだめると
どの点のまわりも平面の円の内部と合同になる.

トーラスの局所ユークリッド幾何構造

トーラスはフラットな構造をもつ

トーラスの幾何構造のモデル



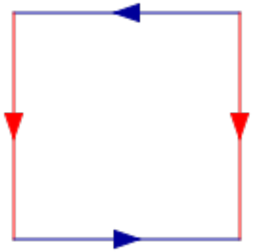
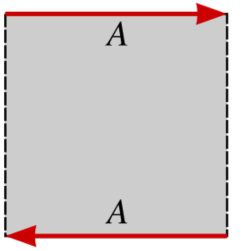


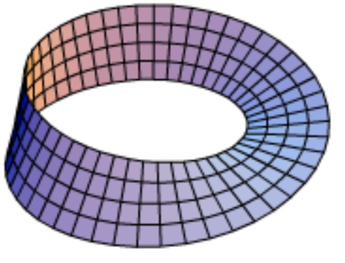
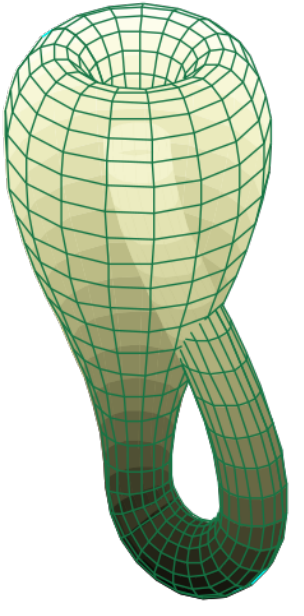
ユークリッド平面はトーラスの幾何構造のモデルである.
トーラスからモデルとなる平面を再現するには，トーラスの
一点について，そこに到達する「光源」すべてを観測すれば
よい.

局所ユークリッド曲面

局所的にユークリッド平面と合同な完備な
曲面は次の5通りに分類される.

- １　ユークリッド平面
- ２　シリンダー
- ３　トーラス
- ４　開いたメビウスの帯
- ５　クラインのつぼ

完備とは測地線がどこまでものばせること（端がない）
トーラスとクラインのつぼはコンパクト（有限な広がり）

クラインのつぼの模型

ユークリッド原論の公理

- 2点を結ぶ直線がただ一つ存在する.
- 直線は両側にいくらでものばせる.

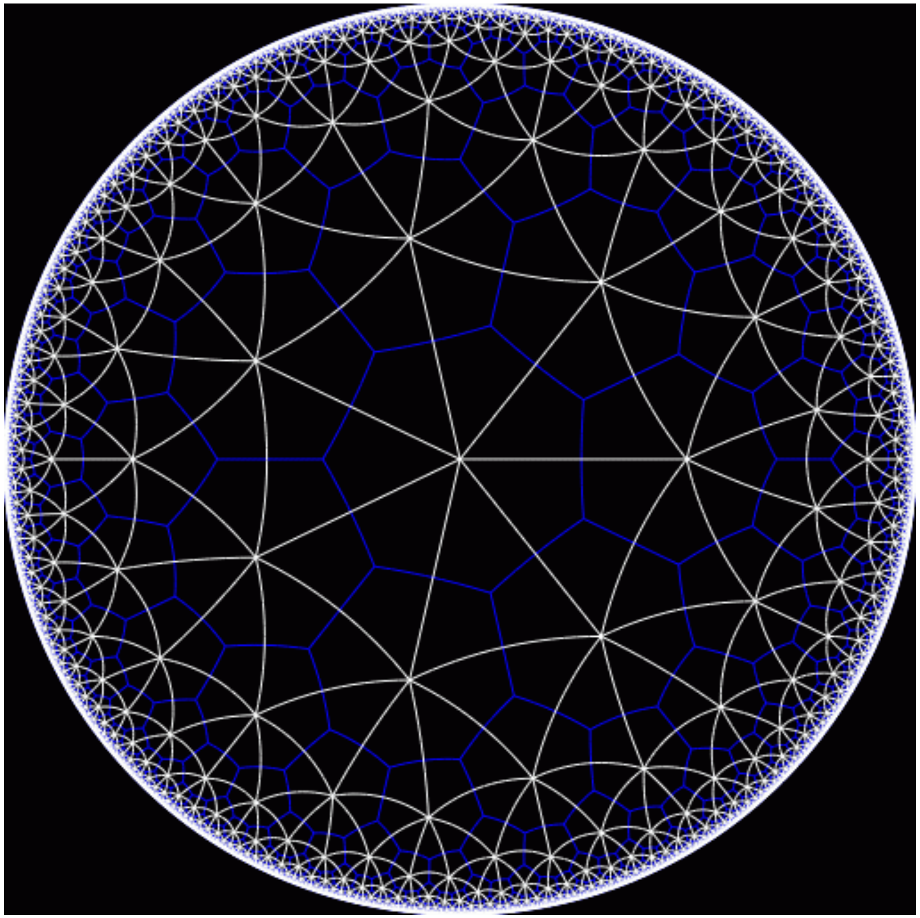
いくらのばしても互いに交わらない2直線は平行であるという.

平行線についての第5公準

2直線と交わる1本の直線が同じ側につくる内角の和が2直角よりも小さいならば，2直線をその側にのばせば，どこかで交わる.

平行線についての第5公準は他の公理から証明できるか？

双曲幾何のモデル
ポアンカレ円板 (双曲平面)



測地線は無限遠の円周と直交する円弧

三角形の内角の和は180度より小さい

非ユークリッド幾何のモデル

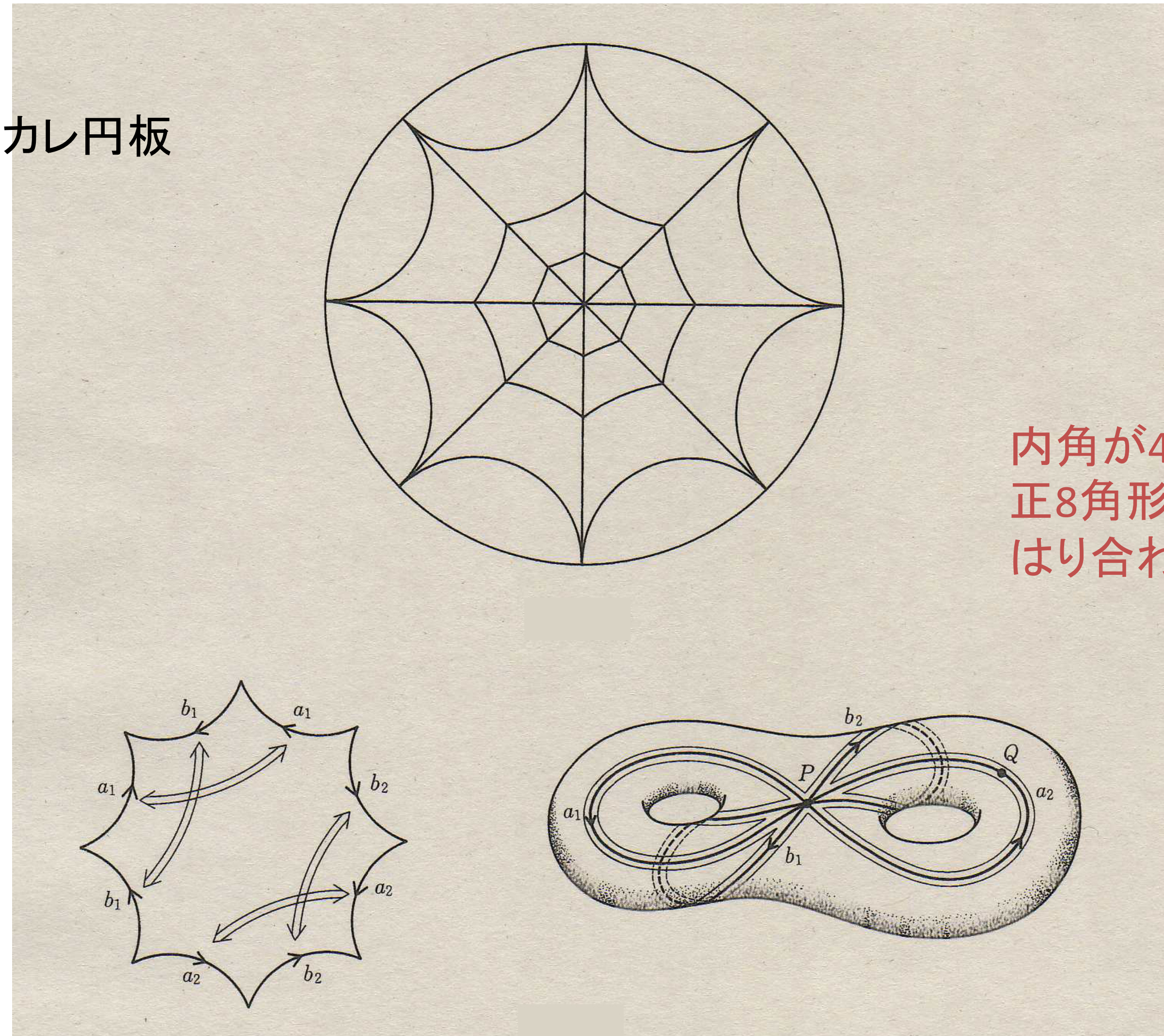
非ユークリッド幾何学は
19世紀半ばにロバチェフスキーとボヤイによって発見された.

単位円の内部に縮尺 $\dfrac{2}{1-r^2}$ で距離を入れる.

種数2の曲面

種数2の曲面の双曲幾何構造

ポアンカレ円板



内角が45度の
正8角形の辺を
はり合わせる.

2次元幾何構造のモデル

球面

三角形の内角の和は180度より大

曲率 正

ユークリッド平面

三角形の内角の和は180度

曲率 0

双曲平面

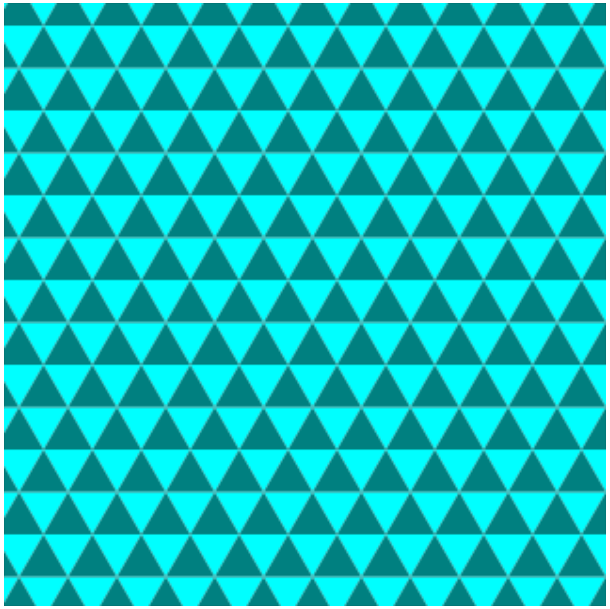
三角形の内角の和は180度より小

曲率 負

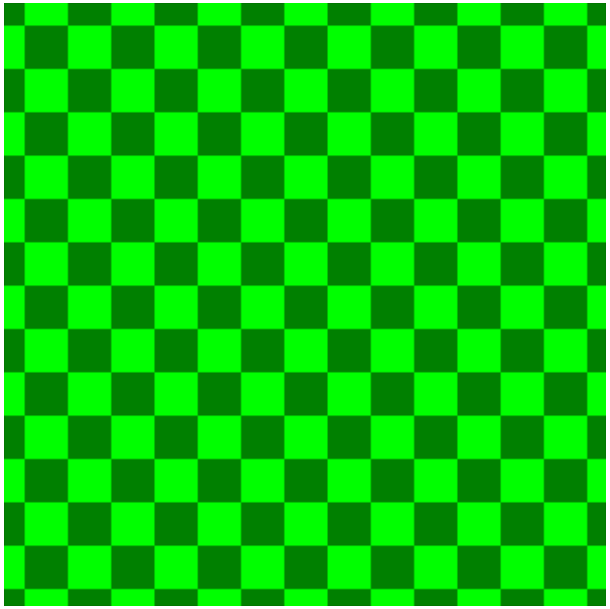
トーラス

種数2以上の曲面

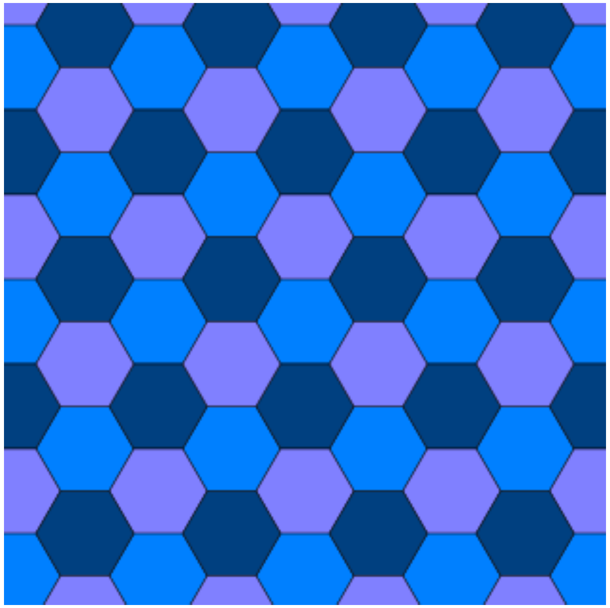
ユークリッド平面の正則分割 (タイルばり)



{3, 6}

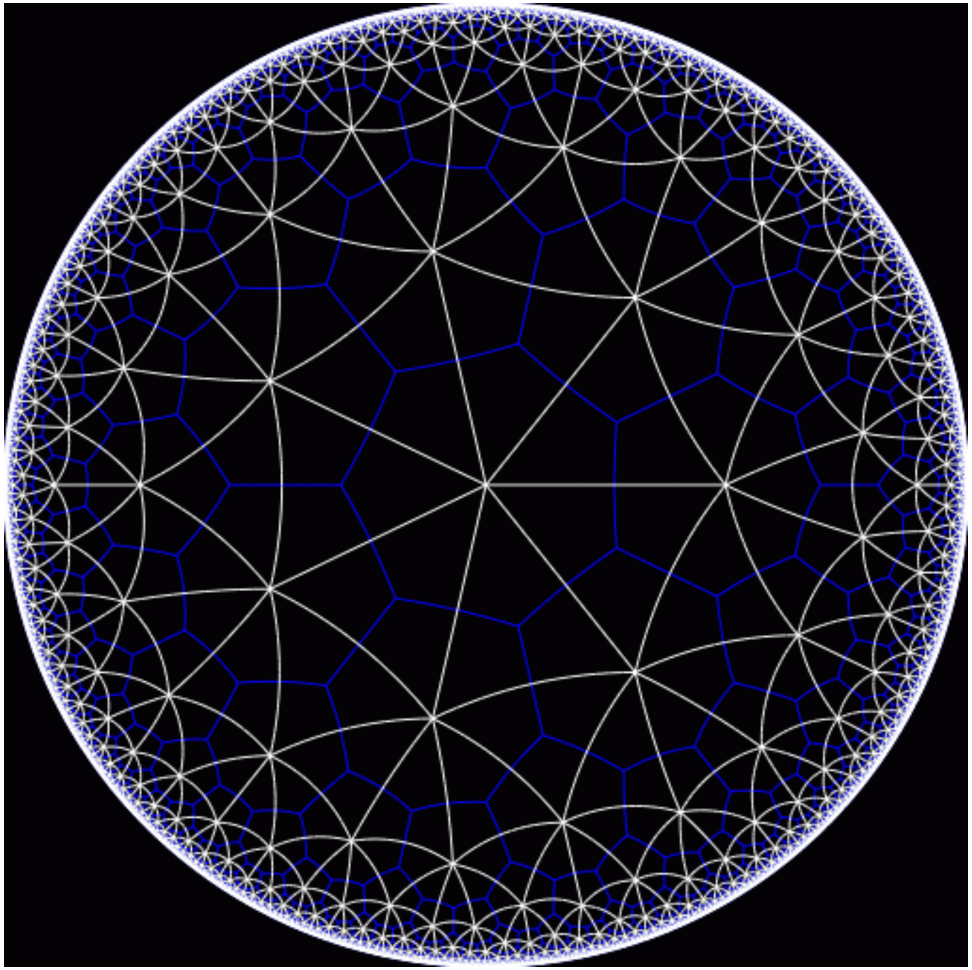


{4, 4}

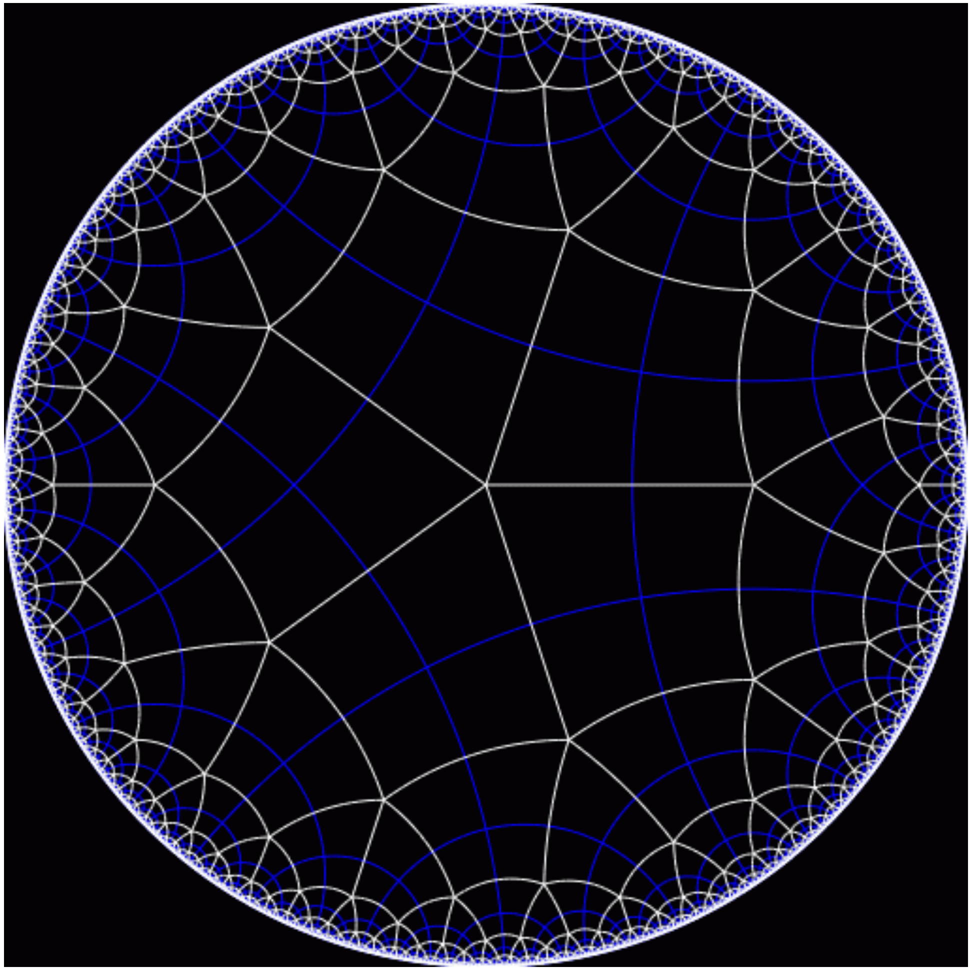


{6, 3}

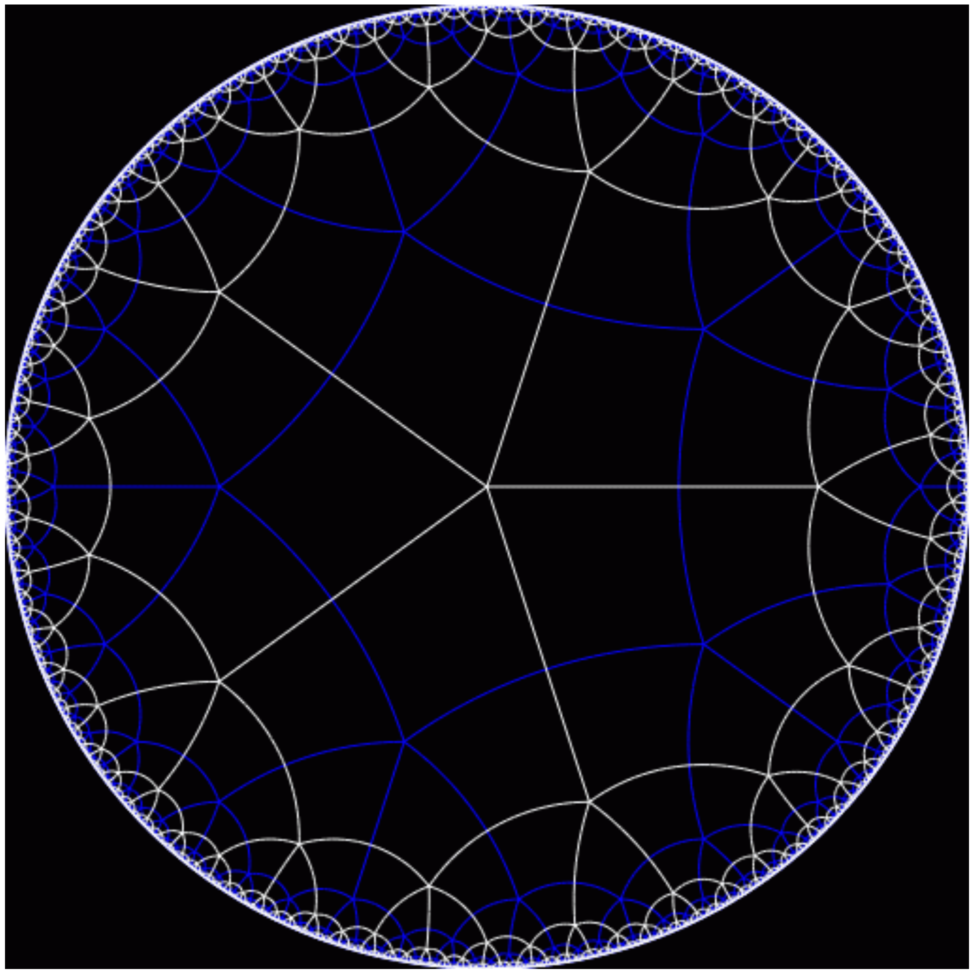
双曲平面のタイルばり{3,7}型



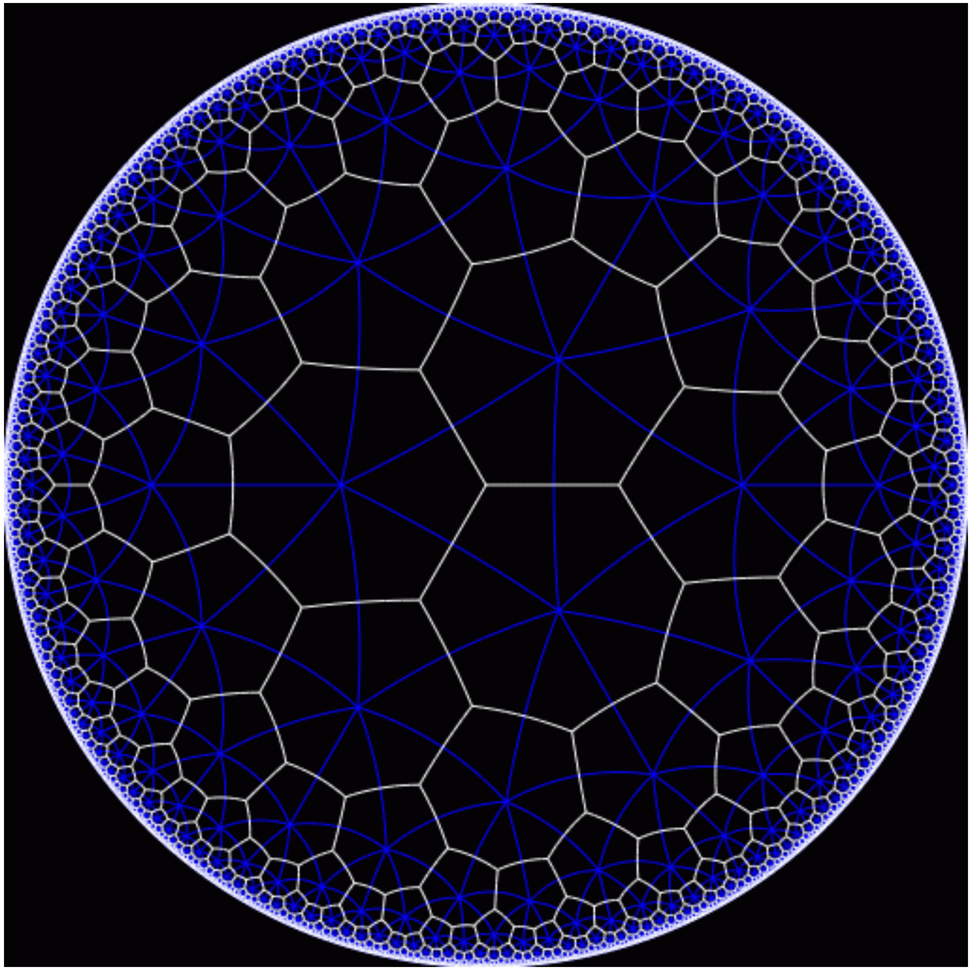
双曲平面のタイルばり{4,5}型



双曲平面のタイルばり{5, 5}型



双曲平面のタイルばり{7, 3}型



タイプ $\{p, q\}$ のタイルばり

ユークリッド平面

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$$

球面

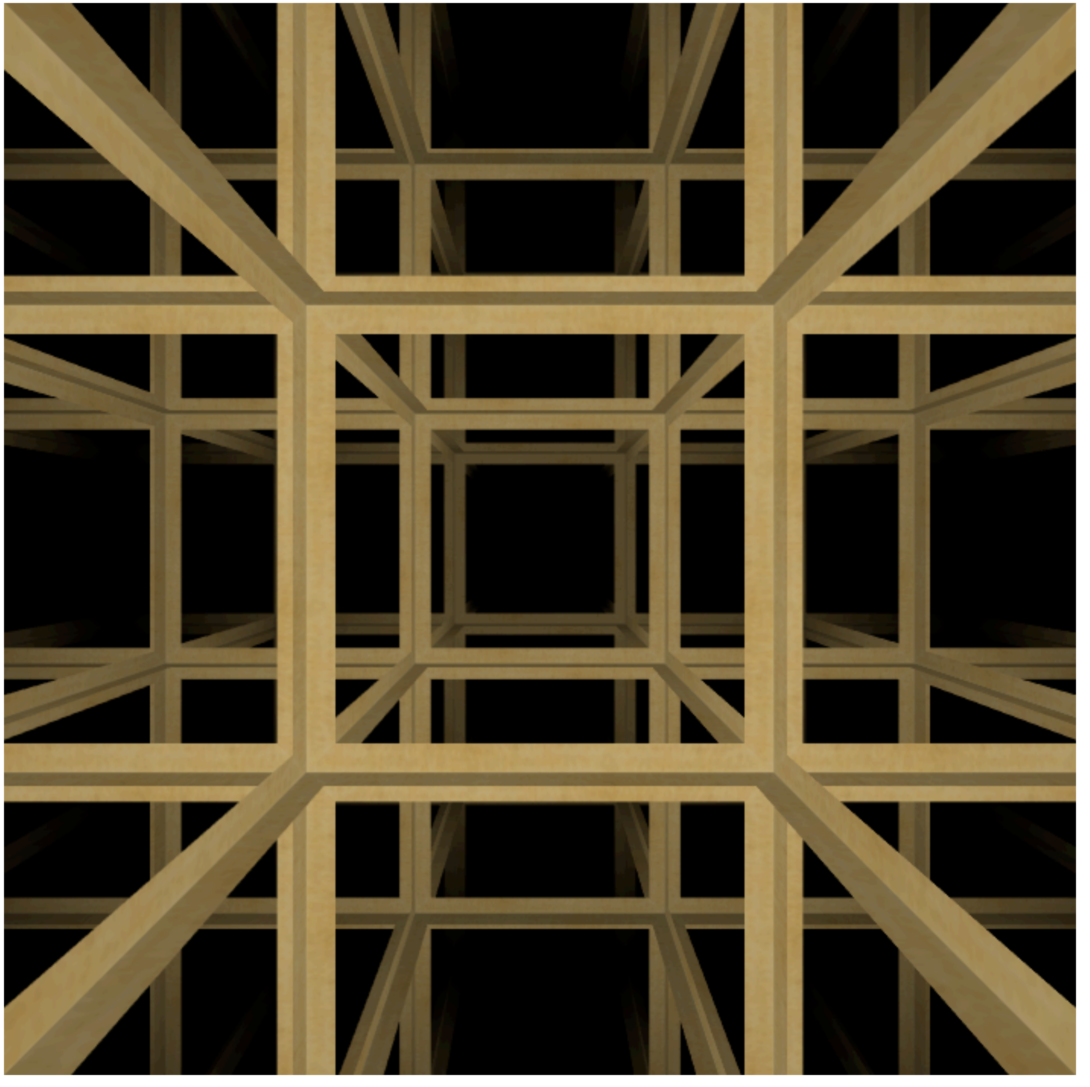
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$$

双曲平面

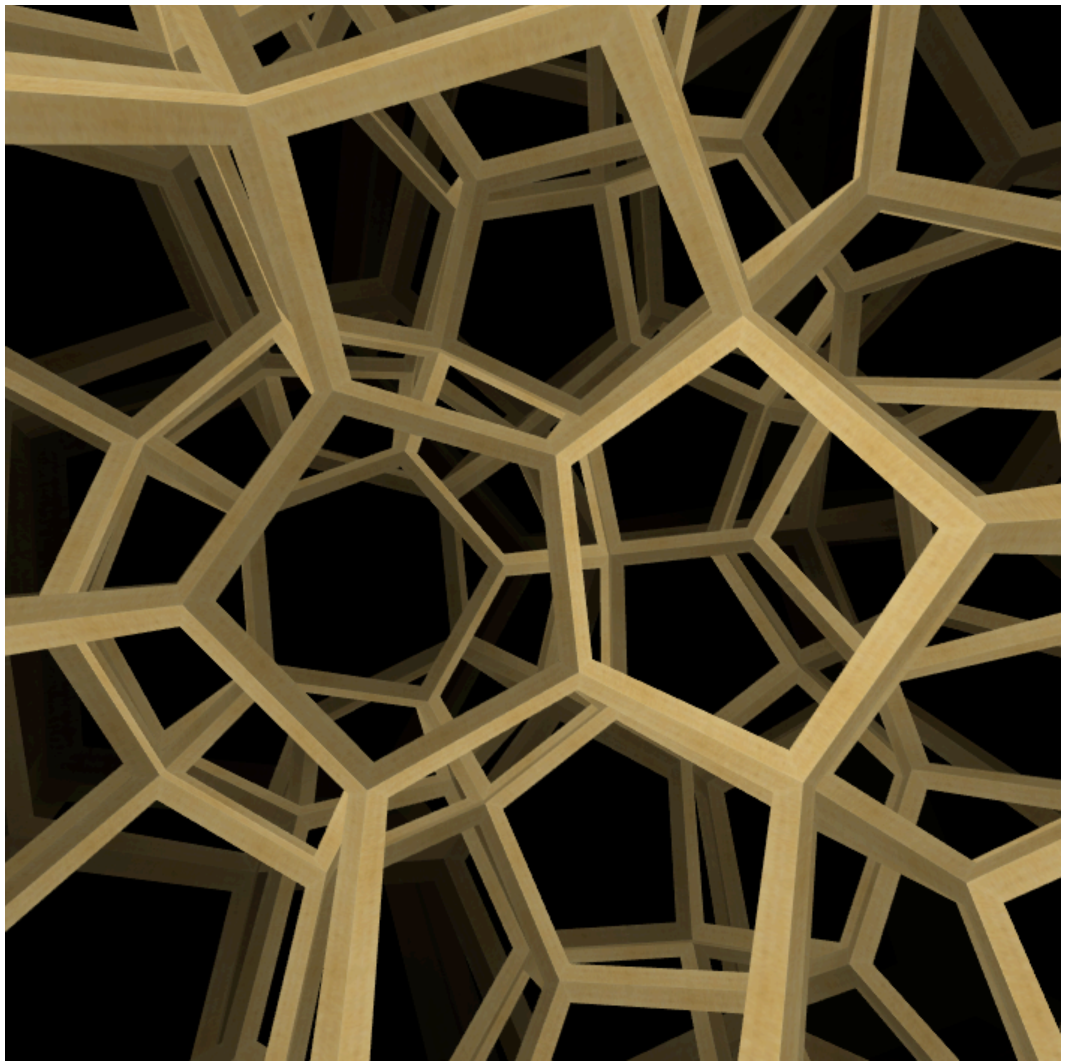
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$$

ユークリッド空間の正則分割

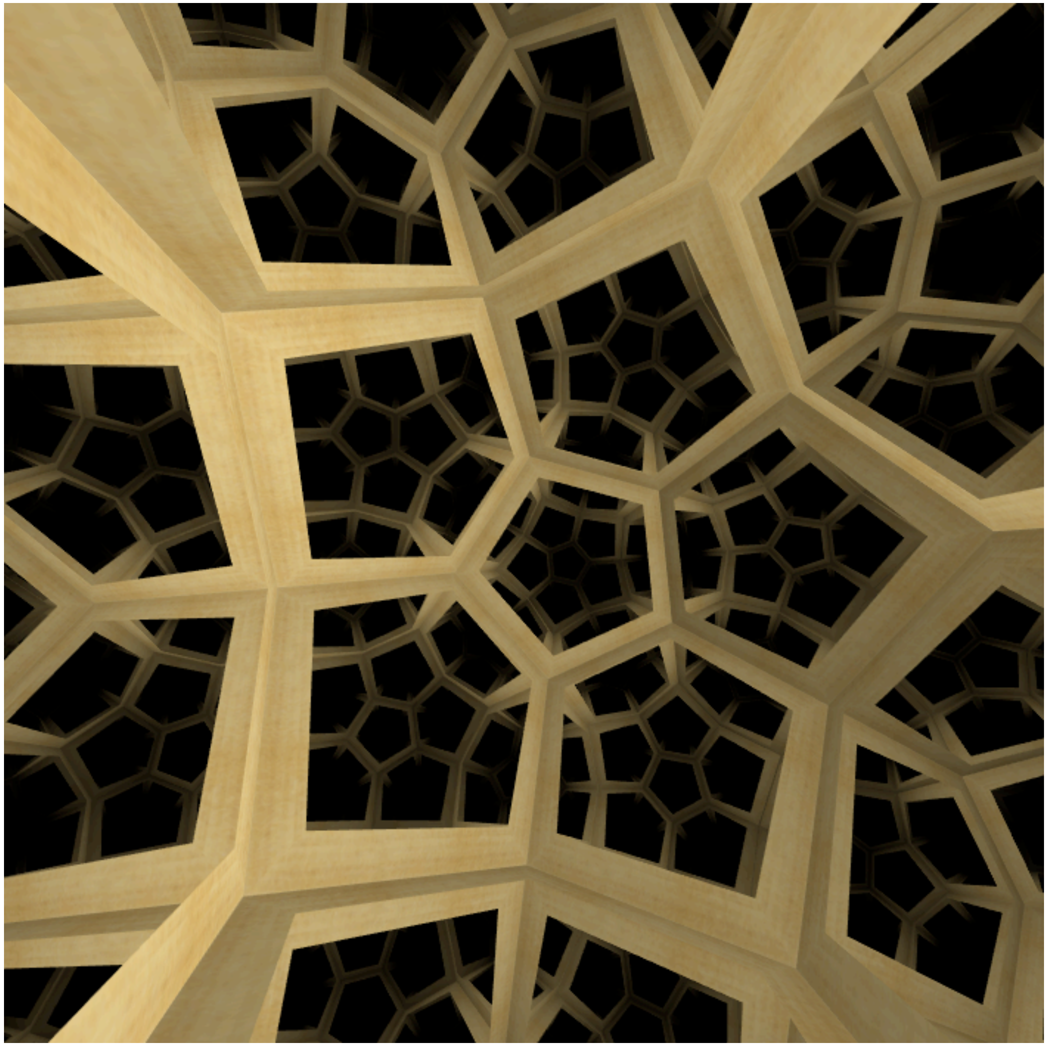
{4, 3, 4}



３次元球面の正則分割(120胞)
{5, 3, 3}



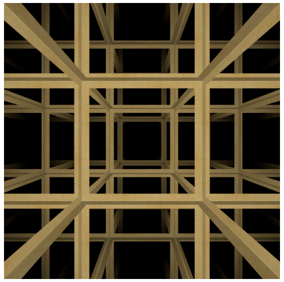
3次元双曲空間の分割
{5, 3, 4}



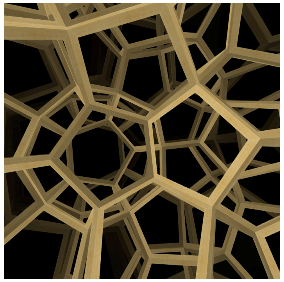
3次元幾何構造のモデル空間

等方性をもつのは次の3通り

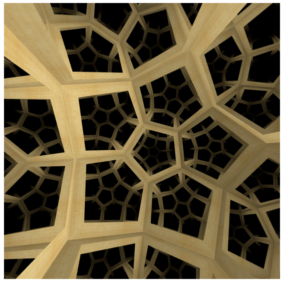
3次元ユークリッド空間　　曲率 0



3次元球面　曲率が正の一定値

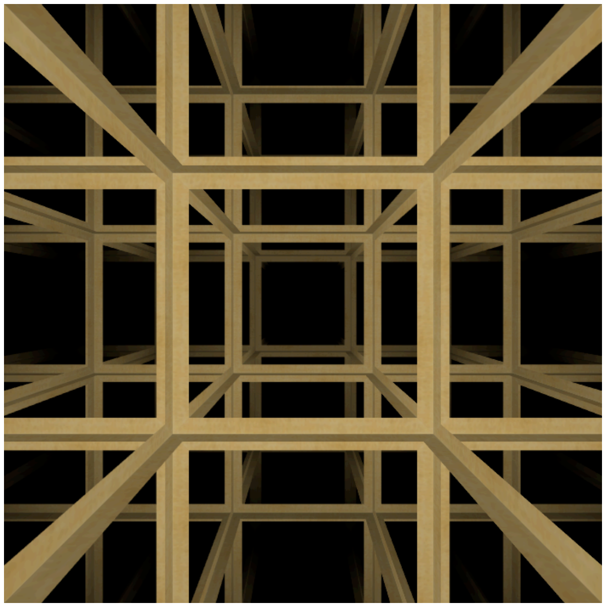


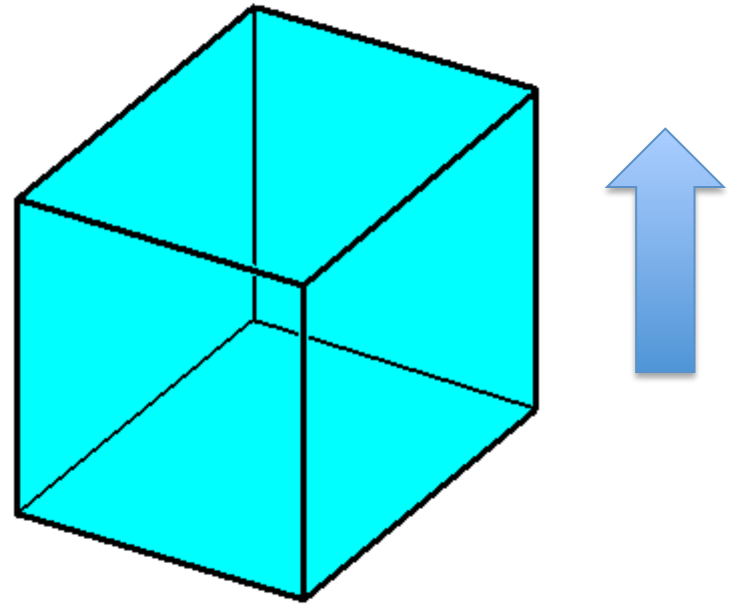
3次元双曲空間　曲率が負の一定値



これ以外に1次元と2次元の(捻った)積となるものが5通り存在

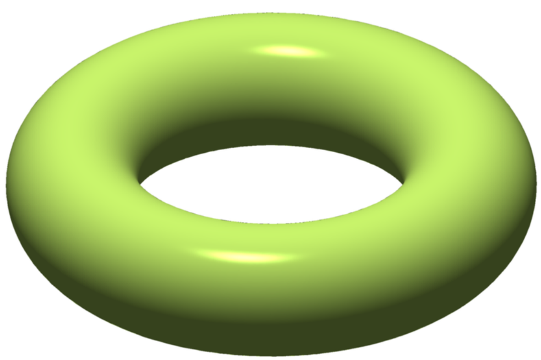
3次元ユークリッド幾何構造（フラットな空間）





3次元ユークリッド空間をモデルにもつ

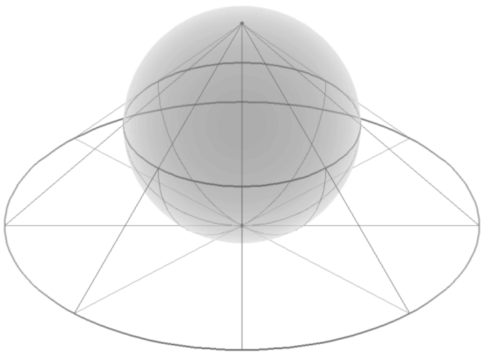
立方体の上面と底面の対辺を
はり合わせる．それにしたがって
側面をはり合わせる．（3次元トーラス）



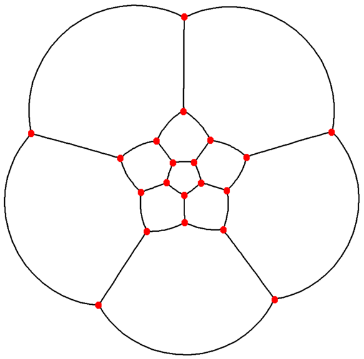
矢印の方向に90°回転してはり
合わせても，フラットな空間ができる．

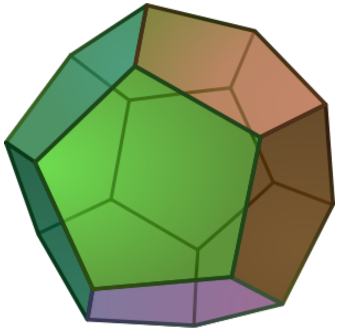
コンパクトでフラットな空間10種類存在

3次元球面幾何構造

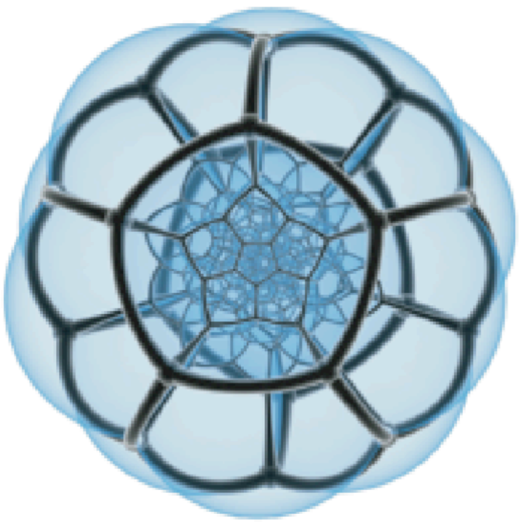


2次元球面の立体射影

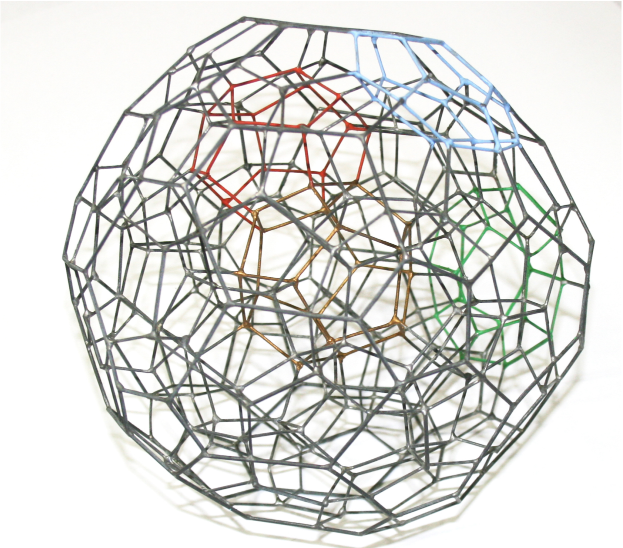




正12面体の立体射影

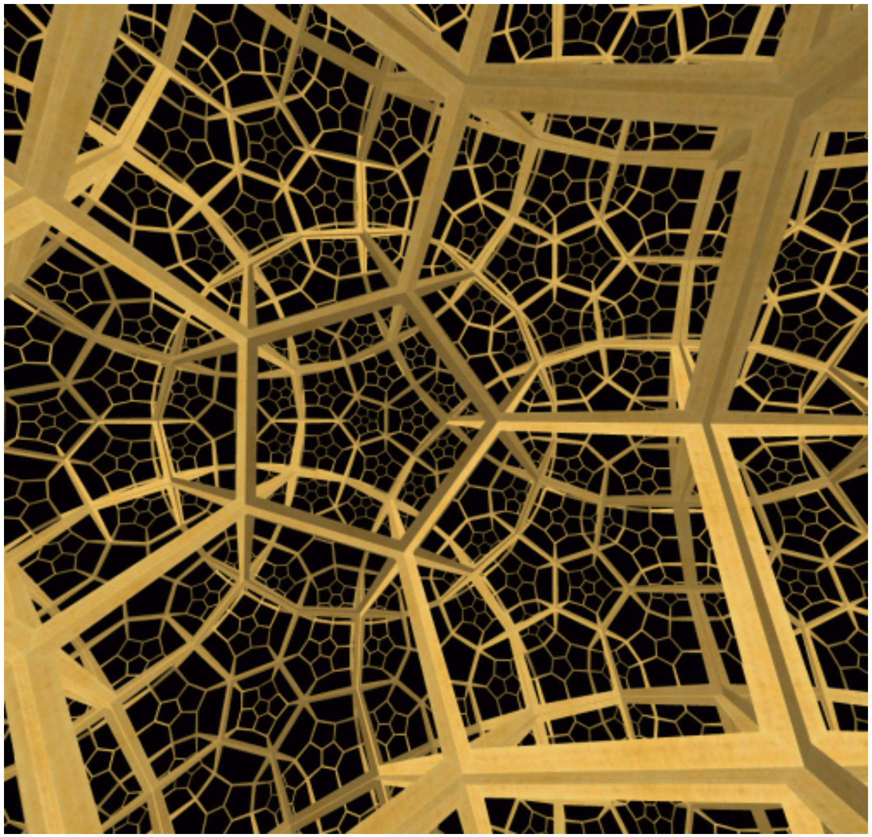


3次元正120胞体

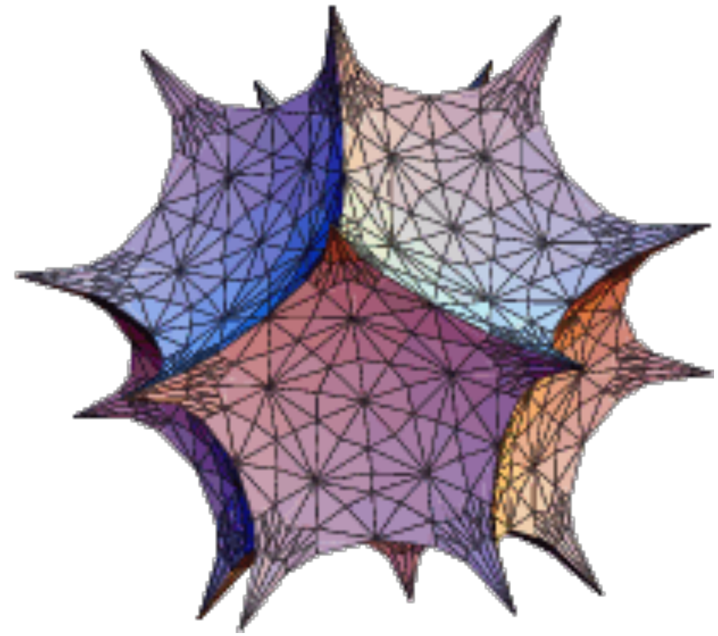


正12面体の対面を
1/10 回転してはり合わ
せものがポアンカレの
正12面体空間

3次元双曲幾何構造



3次元双曲空間をモデルにもつ



3次元双曲正12面体

対面を 3/10 回転によって
はり合わせたののが
ザイフェルト･ウェーバー空間

3次元双曲幾何構造をもつ空間はきわめて多彩！

3次元空間の幾何化定理

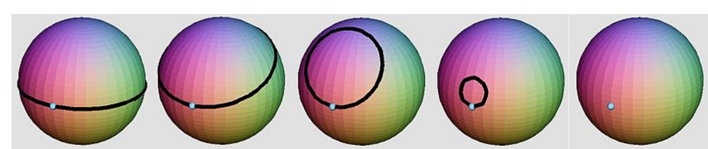
3次元多様体は，いくつかのピースに分割して，
それぞれが8通りの幾何構造のいずれかを
モデルとしてもつようにできる．

1980年代　サーストンの幾何化予想

2005年頃　ペレルマンによる解決

幾何化定理を用いてポアンカレ予想が解決

ポアンカレ予想
コンパクトで単連結な3次元多様体は
3次元球面と同相



宇宙空間の幾何構造

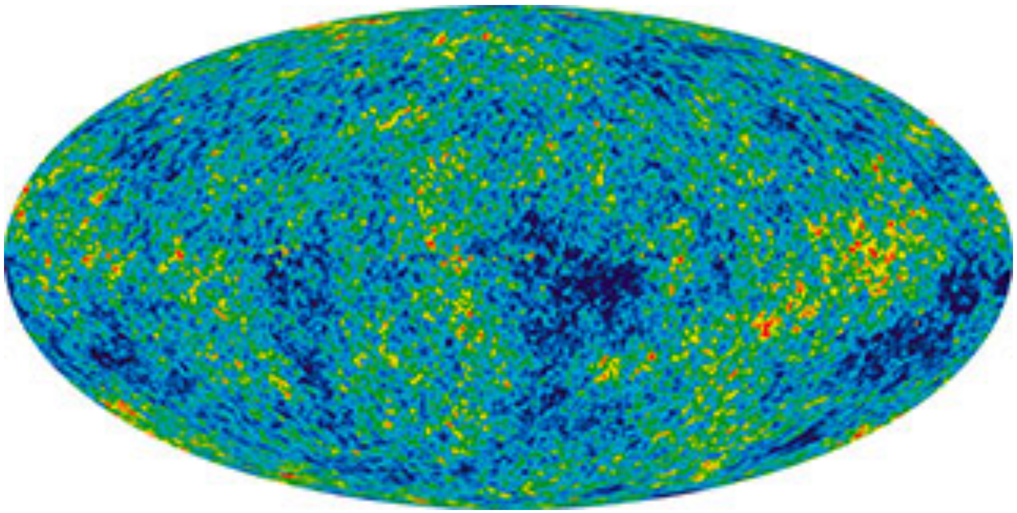
宇宙空間が等質的かつ等方的であるとすると，3次元ユークリッド空間，3次元球面，3次元双曲空間のいずれかの幾何構造をもつ．

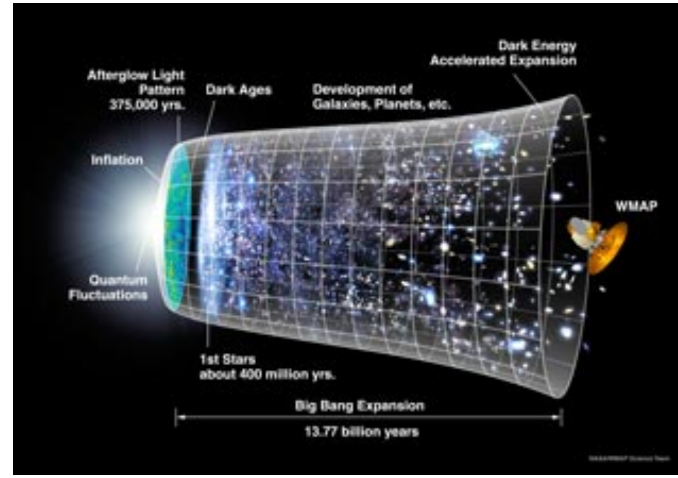
上の3つの幾何構造に対応するアインシュタイン方程式の解が存在する（ロバートソン・ウォーカー計量）

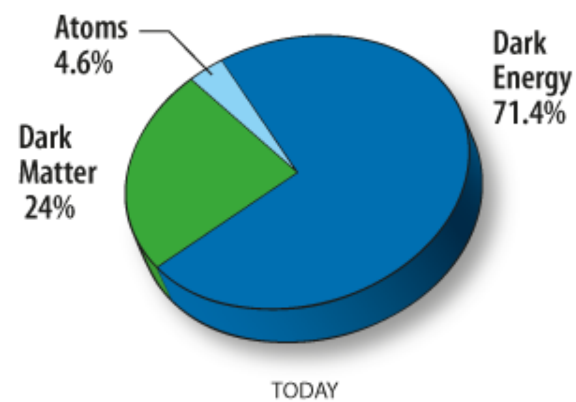
ρ　宇宙の物質密度　　H ハッブル定数（退行速度と距離の比）

$\rho > \dfrac{3}{8\pi G}H^2$	3次元球面幾何	体積有限
$\rho = \dfrac{3}{8\pi G}H^2$	3次元ユークリッド幾何	体積は有限にも無限にもなりうる
$\rho < \dfrac{3}{8\pi G}H^2$	3次元双曲幾何	体積は有限にも無限にもなりうる

WMAPによる観測







WMAPによるビッグバンの残り火
「マイクロ波宇宙背景放射」の観測により
宇宙のさまざまなパラーメータが推定されている.

宇宙の曲率は 0.02 ± 0.02 というレベルで 0に近い.

フラットで有限な空間のモデルは10通りある.
双曲幾何構造，球面幾何構造の可能性も
否定されているわけではない.

まとめ

- 空間の曲率は内在的に決まり，空間の中から観測可能である．
- ３次元の広がりをもつ空間の幾何構造のモデルは数学的には，完全に分類されている．
- モデルが決まっても，３次元空間の可能性は有限なもの，無限なものを含めて多様に存在する．
- 空間の幾何構造を特定するには，観測データが必要であり，天文学者と数学者の協力が不可欠である．