10. 特異ホモロジー論(III)

1　球面の特異ホモロジー群

一般に可縮な位相空間 X について，$\widetilde{H}_*(X) = 0$ が成立する．n 次元球面 S^n 上に 2 点 $p_+ = (0, \cdots, 0, 1)$, $p_- = (0, \cdots, 0, -1)$ をとると $S^n - p_+$, $S^n - p_-$ はともに可縮で，切除可能な対をなす．したがって，Mayer-Vietoris 完全列によって，S^n の特異ホモロジー群を帰納的に計算することができる．結果は $n \geq 1$ として

$$H_q(S^n) = \begin{cases} \mathbf{Z} & q = 0, n \\ 0 & q \neq 0, n \end{cases}$$

となる．$H_n(S^n)$ の生成元を S^n の**基本ホモロジー類**とよび $[S^n]$ で表す．連続写像 $f : S^n \to S^n$ に対して，f の**写像度** (mapping degree) $\deg f$ を

$$f_*[S^n] = (\deg f)[S^n]$$

で定義する．連続写像 $f, g : S^n \to S^n$ がホモトピー同値であれば，$\deg f = \deg g$ となる．写像度は回転数の概念の一般化である．

命題 1. $r : S^n \to S^n$ を原点についての対称変換とすると $\deg r = (-1)^{n+1}$ が成立する．

2　特異ホモロジーの応用

対 D^n, S^{n-1} のホモロジー完全列を用いると

$$H_q(D^n, S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbf{Z} & q = n \\ 0 & q \neq n \end{cases}$$

が得られる．また，$\mathbf{R}^n$ の一点 p に対して，

$$H_*(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - p) \cong H_*(D^n, S^{n-1})$$

となる．このことから，次の定理が得られる．

定理 1. $m \neq n$ ならば $\mathbf{R}^m$ と $\mathbf{R}^n$ は同相ではない．

X を位相空間，Y をその部分空間とする．包含写像 $i : Y \to X$ に対して，連続写像 $r : X \to Y$ で，$r \circ i = id_Y$ を満たすものが存在するとき，Y は X のレトラクトであるという．さらに，この r がまた，$i \circ r \sim id_X$ (homotopic) を満たすものが存在するとき，Y は X の変位レトラクト (deformation retract) であるという．このとき，X, Y はホモロピー同型である．

対 D^n, S^{n-1} のホモロジーを用いると次の定理を示すことができる．

定理 2. $S^{n-1} = \partial D^n$ は D^n のレトラクトではない．

このことから次の **Brouwer の不動点定理**が従う．

定理 3. 連続写像 $f : D^n \to D^n$ には，不動点つまり $f(x) = x$ となる点 $x \in D^n$ が存在する．

連続写像 $f : S^n \to S^n$ が不動点をもたないならば $\deg\ f = (-1)^{n+1}$ であることを示すことができる．これを用いると次の定理が証明できる．

定理 4. 球面 S^n 上にいたるところ零にはならないベクトル場が存在するのは n が奇数の場合に限る．

前回分の 4 行目は “包含写像を $i : Y \to X$ とすると” に訂正．