

松本幸夫先生の満70歳をお慶び申し上げます

ライデマイスター変形に代えて —整数彩色が教示する分離絡み目のはずし方 林忠一郎, 林美和

〒112 8681 東京都文京区目白台2-8-1 日本女子大学理学部数物科学科
hayashic@fc.jwu.ac.jp (忠一郎), miwakura@fc.jwu.ac.jp (美和)

要約

2つの絡み目の図が同じ絡み目を表すとき、片方をライデマイスター変形していってもう片方に変形できることはよく知られている。しかし、2角形領域を作る RII 変形をいつどこで行うのが有効であるか知ることはとても難しい。ここでは、2角形を作る RII 変形を絡み目の図の辺に沿って行うことを考える。整数彩色や線形有理数彩色と組み合わせると、2成分自明絡み目の図を明らかに分離した図に変形するためにこの変形がいつ有効か、ある程度見えてくる。

1. 序

まず、図 1, 2 をご覧頂きたい。最初の図は、後で紹介する Göritz の論文 ([12]) に載っている自明結び目の図 (図 4 (1)) を少しいじったものであり、2成分の自明絡み目を表す。この図に適用できる Reidemeister 変形は1角形領域を作る RI 変形か2角形領域を作る RII 変形しか無い。つまり、この絡み目を Reidemeister 変形ではずすには、一旦、交差点を増やさざるを得ない。図の各辺の近くには書き込まれた数字はこの図の整数彩色を表す。最大の数が対応する辺に沿って図のように絡み目を変形して、最大の数を「退治」して行く。1角形領域やはずれる2角形領域ができたなら、RI 変形や RII 変形によってすかさず消す。すると、絡み目の片方の成分がもう一方の成分と作る交差点の上ばかりを通過して、明らかに分離絡み目であると分かる図が得られる。この類の変形操作がどのくらい有効か考える。

本稿では、結び目 (knot) は成分 (component) が1つの絡み目 (link) と見なす。絡み目は3次元球面 S^3 内、絡み目の図 (link diagram) は2次元球面 S^2 上で考える。Reidemeister 変形は絡み目の図の局所的な変形である。図 3 のように、1つの1角形領域を作ったり消したりする RI 変形、1つの2角形領域を作ったり消したりする RII 変形、3角形領域を移動させる RIII 変形の3種類がある。絡み目は S^3 の全同位変形 (ambient isotopy) によって動かしても同じものと見なすが、その代わりに、絡み目の図を Reidemeister 変形することを考えても良いことを次の有名な定理は主張している。

定理 1.1. (Alexander & Briggs [1], Reidemeister [26]) 2つの絡み目の図が同じ絡み目を表すとき、片方の図に Reidemeister 変形を有限回うまく適用すると、もう一方の図が得られる。

交差点の無い図で表される結び目を自明結び目と呼ぶ。ほどける結び目のことである。与えられた結び目の図が自明結び目を表すか表さないかを判定する有限アルゴリズムは Haken の normal surface の理論によって初めて構築された ([13])。 (normal surface は Kneser が考え出したが ([20]), Haken は fundamental surface の概念を創始して、無限個ある normal surface を有限個に絞り込んだ。尤も、Haken は単体分割ではなくハンドル分解を考えた。) この結果を応用した研究により、現代では Reidemeister 変形を用いる有限アルゴリズムも与えられている。

定理 1.2. (Hass & Lagarias [14]) n 個の交差点を持つ結び目の図 D が自明結び目を表すならば、 D に $2^{10^{11}n}$ 回以下の Reidemeister 変形をうまく適用することによって、交差点無しの絡み目の図が得られる。

上の定理によると、 $2^{10^{11}n}$ 回の Reidemeister 変形をいかなる組み合わせで適用しても交差点無しの図が得られなかったら、その結び目の図はほどけない結び目を表すことになる。現在、この上界は Lackenby によって $(231n)^{11}$ に改善されている ([22])。しかし、三つ葉結び目の交差点 3 つの図の交差点 1 つの上下を入れ替えた図でさえも、それに適用できる 1 回の Reidemeister 変形は 81 通りある。有限ではあるけれども膨大な数になるので、変形を全て考えるのは困難であり、実用的なアルゴリズムは得られていない。

もう一つ困難なことがある。図 4 (1) は Göritz の論文 [12] で与えられた自明結び目の図である。この図に適用できる Reidemeister 変形は1角形を作る RI 変形か、2角形を作る RII 変形しか無い。実際、この図には

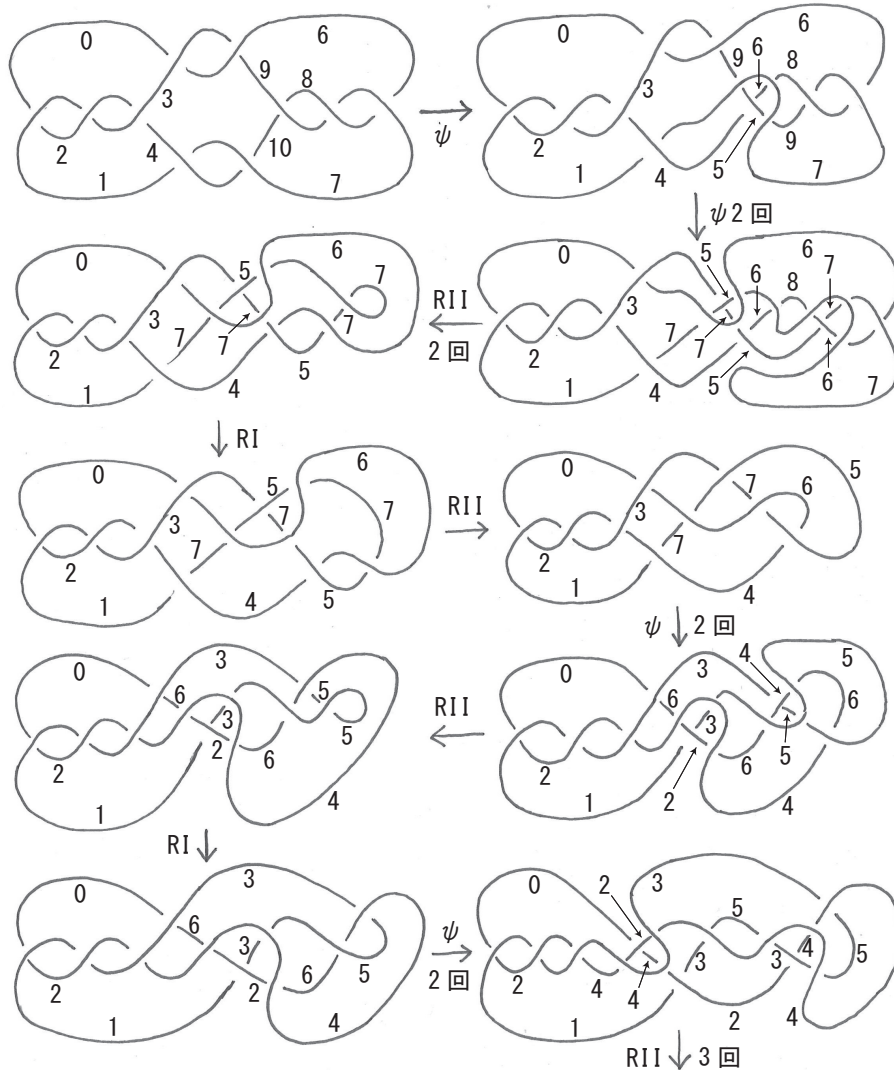


FIGURE 1. Geortiz の自明絡み目の図を分離する変形

1角形が無く、2角形はどれもフックしてははずれないし、3角形も1つも無い。このように、自明結び目を Reidemeister 変形でほどくには途中で交差点を増やさなければならないことも有り得る。

自明結び目の図のどの辺をどのように動かせば交差点無しにできるのかを知りたい。特に、2角形を作る RII 変形をいつどこで行うのが有効なのかを知りたい。なお、RI 変形については Trace がかなり決定的な結果を得ているので ([30]), そちらを参照されたい。

自明結び目をほどく研究は他にも多数ある。Birman & Menasco による closed braid を用いる手法 [4] は Markov 変形の stabilization を使わずに、exchange 変形を導入して、braid の本数を増やさなくてほどく。ところが、closed braid は本数を制限しても無限個あるので、これに基づいて有限アルゴリズムを作るのは容易なことではない。それでも、有限アルゴリズムは Birman & Hirsch の論文 [2] で実現されているが、或る有限な範囲を調べる際の上限を得るために normal surface の理論を用いている。しかし、近年、Menasco が論文 [23] を発表した。まだ勉強していないが、destabilization, exchange move, braid preserving flype の操作が適用できるかできないかを判定するためのかなり良いアルゴリズムが得られているようだ。

Birman & Menasco の論文 [5] に現れた link の配置方法である arc-presentation を Cromwell [6] と Dynnikov [8], [9] が研究して得られた方法はかなり成功していて、arc の数を増やさない変形でほどくことが

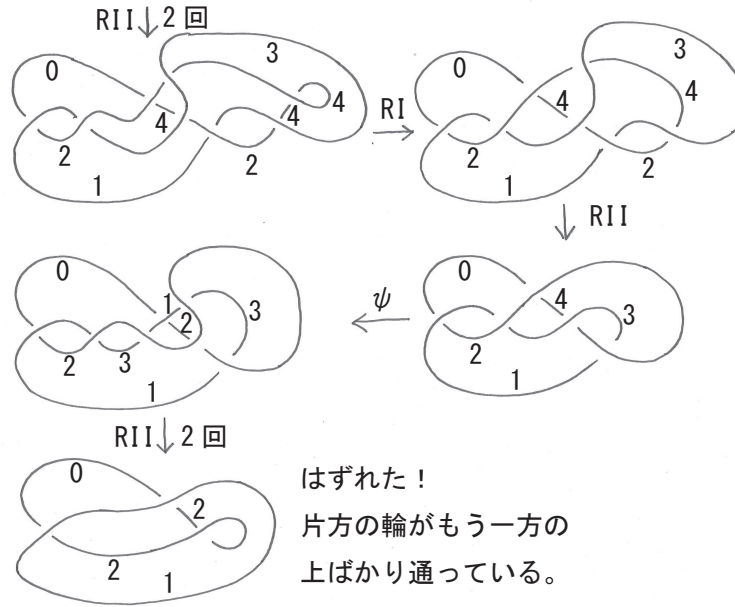


FIGURE 2. Georitz の自明結び目の図を分離する変形 (続き)

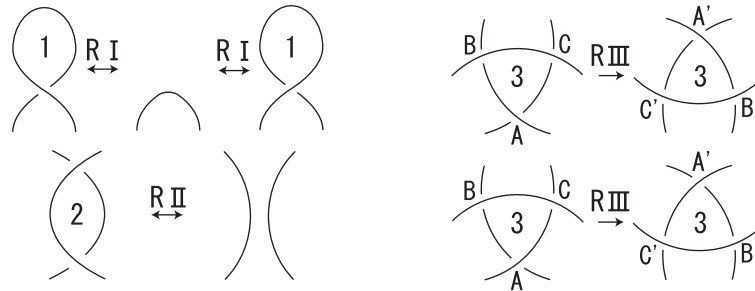


FIGURE 3. Reidemeister 変形

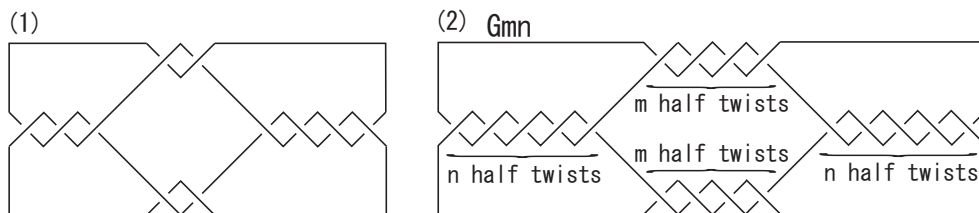


FIGURE 4. Göritz's unknot

できる. arc の本数を制限すれば有限個の arc-presentation しかないので, この場合は有限アルゴリズムが直ちに得られる.

さらに, 結び目のエネルギーを用いた自明結び目の判定も大原 [24], [25], Freedman & He & Wang [11], Kusner & Sullivan [21] らによって研究されている.

自明結び目の判定に関して, 幾多の研究がなされているが, 結び目の紐のどこをどのように動かせばよくなるのか簡単に教えてくれるものは, まだなさそうである. もしも, 結び目の紐のどこをどのように動かせばよ

いのか教えてくれる有限アルゴリズムがあったとしたら、どんなものであろうか。結び目の表示方法と基本変形が定義されていて、各表示には複雑さが定義されている。そして、表示が自明結び目を表すならば、複雑さを軽減する基本変形が必ず適用できることが証明されていれば理想的である。

まずは、普通に S^2 上の結び目の図と Reidemeister 変形を考えてみる。結び目の図の辺の一つ一つを大切に扱う何かを用いて複雑さを定義したい。取りあえず、すぐに思い付くのはカンドル彩色を用いることであろう。カンドル彩色は結び目の図をなす弧の一本一本に対してカンドルの元を一つずつ、「交差点条件」を満たすように対応させる。カンドル彩色の最も基本的な場合である n 彩色は Fox によって定義された ([7], [10])。カンドルは高橋 ([28]) と Joyce ([18]) によって導入された。一般のカンドル彩色についてはどの論文を引用するのが適切なのかわからないが、鎌田の教科書 [19] を参照されたい。非自明なカンドル彩色を持つ結び目の図はほどけない非自明結び目を表す。しかし、ここでは、自明結び目をほどくために彩色を利用することを考える。勿論、自明結び目の図は非自明に彩色できないのだが、例えば、2 重平行化して 2 成分自明絡み目にすれば彩色できるようになる。

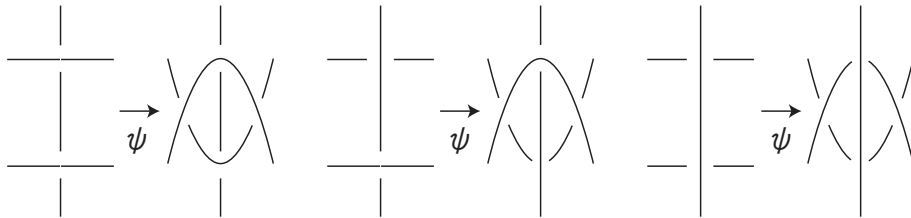


FIGURE 5. ψ move

さて、2 角形を作る RII 変形によって複雑さが減る場合があるように複雑さを定義しなければならない。2 角形を作る紐 2 本だけを見ていたのでは、2 角形ができた分だけ図が複雑になったようにしか思えない。もう少し視野を広げる必要がある。例えば、結び目の図の RII 変形を行う領域全体くらいは見ておいた方が良さそうに思う。結び目の図の彩色に基づいて図の領域たちも彩色する extended coloring というものが定義されているから、あるいはそれを利用することも考えられるかもしれない ([27])。しかし、人間が変形操作を行うなら良いが、コンピューターに結び目の図の領域を認識させることは結構難しいように思う。

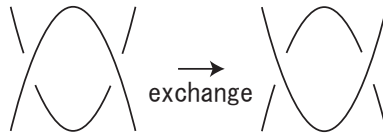


FIGURE 6. exchange move

2 角形を作る RII 変形そのものを考えるのではなく、代わりに 2 角形を作る RII 変形のような操作を辺に沿って行う手法も考えられる。図 5 がその変形である。良い名を思い付かないが、とりあえず ψ 変形と呼ぶことにする。本稿ではこの変形を主に考える。後で述べるように、 ψ 変形の場合、自動的に“RII 変形”を行う近辺の状況も考慮に入れることになる。しかし、その前に、 ψ 変形が「基本変形」として相応しいかどうか検証しておく。Birman と Menasco の論文 [3] で導入された exchange 変形も用いる。図 6 のように、RII ではずせる 2 角形領域において、2 角形領域を消すのではなく、敢えてその交差点 2 つの上下を入れ替える操作である。絡み目の図が連結であるとは、全ての交差点において、交差点の下を通る紐を消すのをやめて復活させたときに、連結な図形であることを意味する。次の定理は、連結な絡み目の図においては、 ψ 変形と exchange 変形を導入することにより、2 角形を作る RII 変形と RIII 変形を考えなくて済むようになることを主張している。この定理は第 2 節で証明する。

定理 1.3. $D_1 \rightarrow D_2$ を Reidemeister 変形とする。 D_1 が連結な絡み目の図であるとき、RI 変形、2 角形を消す RII 変形、 ψ 変形、exchange 変形をうまく組み合わせると、この Reidemeister 変形を実現できる。

カンドル彩色を用いて結び目の図の複雑さを定義するのだった。どんなカンドルでも複雑さの大きさを定義しようと思えばできると思うが、全順序が入るカンドルの方が便利だと思われる。中でも最も扱いやすいのは整数彩色であろう。整数彩色の基本事項については第 3 節で述べる。ところが、どんな結び目の図も整数彩色できない。そこで、自明結び目は後で考えることにして、当面、分離絡み目の図を分離することに目標を変更する。分離絡み目であれば、自明でないどんなカンドルを用いても、非自明にカンドル彩色される。(実際、連結でない図の連結成分たちをカンドルの異なる成分で塗り分ければ良い。整数彩色の場合、ある連結成分の全ての弧たちに 1 を対応させ、他の連結成分の全ての弧たちに 0 を対応させれば非自明に彩色されたことになる。Reidemeister 変形は彩色可能性(可能か不可能か)を変えないので、分離絡み目のどんな図も非自明に彩色される。) 複雑さの定義は第 4 節で述べるが、まだまだ改良の余地があるかもしれない。

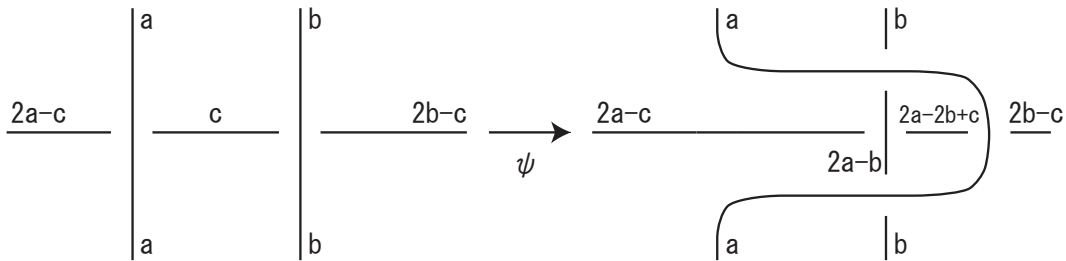


FIGURE 7. ψ 変形と整数彩色の変化

以下、整数彩色は像が 0 以上のみの整数たちから成り、0 と「1 つ以上の奇数」を含むものを考える(補題 3.1 (5) 参照). 図 7 は ψ 変形であるが、 $a, b, c, 2a - c, 2b - c, 2a - b, 2a - 2b + c$ は整数彩色によって辺たちに対応する整数たちを表す.

$a < b < c = \max$ または $a > b > c = \min$ のときこの変形は 4 節で定義する複雑さを小さくする. ただし, \max と \min はそれぞれ彩色で使われている最大の整数と最小の整数を表す. $a < b = c = \max$ または $a > b = c = \min$ の場合も, 細かい条件次第では有効である. 詳しくは 4 節で調べる.

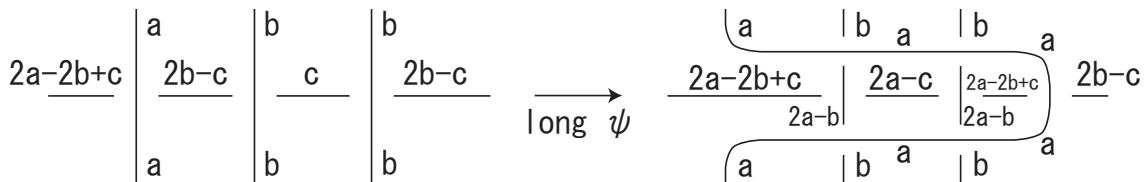


FIGURE 8. $\text{long } \psi$ 変形と整数彩色の変化

交差点数が 10 以下の 2 成分自明絡み目の図を「はずす」実験を試みた. ここで「はずす」と言うのは、どちらかの成分がもう一方の成分の上ばかり通るようになるまで変形するという意味である. その意味ではずれた図を *non-weaved* と呼ぶことにする. 実験にはコンピューターを用いた. 下記の実験結果 1.4 を得たが、筆者たちはコンピューターの専門家ではないので、もしもこの結果を確認したい要件が生じたら、第 3 者による検証実験が必要であろう.

ソフトウェアは, Mathematica とそのための Knot Theory パッケージを用いた ([29]). 10 交差点以下の絡み目の図 (1 角形領域も RII でははずれる 2 角形領域も持たないもの) の表を得る際に, 偶数の列を Dawker-Thistlethwaite 表示と解釈したときに, 絡み目の図に対応するか否かを判定するのが大変である. そこは, Knot Theory パッケージの関数 *DrawMorseLink* が絡み目の図を 1 秒以内に図示できるか否かで判定している. しかし, この方法はこの関数の本来の使い方ではない. この関数は link diagram を図示するためのものであり, 絡み目に対応しないコードを引き数とすると, エラーメッセージを出して, 延々と何らかの計算を続ける. そこを 1 秒で諦めてもらうように Mathematica の *TimeConstrained* 関数で調整した. したがって, 判定方法としては数学的に正しいとは言えない. しかし, 実用的には十分だと思われる.

実験結果 1.4. 上記のコンピューター実験によると、交差点の数が 10 以下の 2 成分自明絡み目の図は、図 9 の 5 個の例外を除いて、うまく整数彩色して、以下の操作 (1)~(4) をこの順の優先順位でうまく適用すると *non-weaved* にする (はずす) ことができる。図 9 の絡み目の図は、うまく整数彩色して、以下の操作 (1)~(5) をこの順の優先順位でうまく適用すると *non-weaved* にすることができる。

- (1) 1 角形を消す *RI* 変形
- (2) 2 角形を消す *RII* 変形
- (3) 図 7 で $a < b < c = \max$ の場合の ψ 変形
- (4) 図 7 で $a > b > c = \min$ の場合の ψ 変形
- (5) 図 8 で $a < b < c = \max$ の場合の *long* ψ 変形

図 9 の絡み目の図の変形はコンピューターによらずに、手作業で行った。それについては第 5 節に詳しく書く。なお、図中の 10₁₅₃ などの番号は、筆者たちがコンピューターを用いて作成した表での番号であり、Rolfesen の教科書の末尾の絡み目の表の番号とは無関係である。同じ図に複数の番号が付いているのは、筆者たちの作成した表は対称性に関する考慮が十分でないため、同じ図が複数回現れるからである。

第 5 節では (4) の変形が必要な具体例も与える。

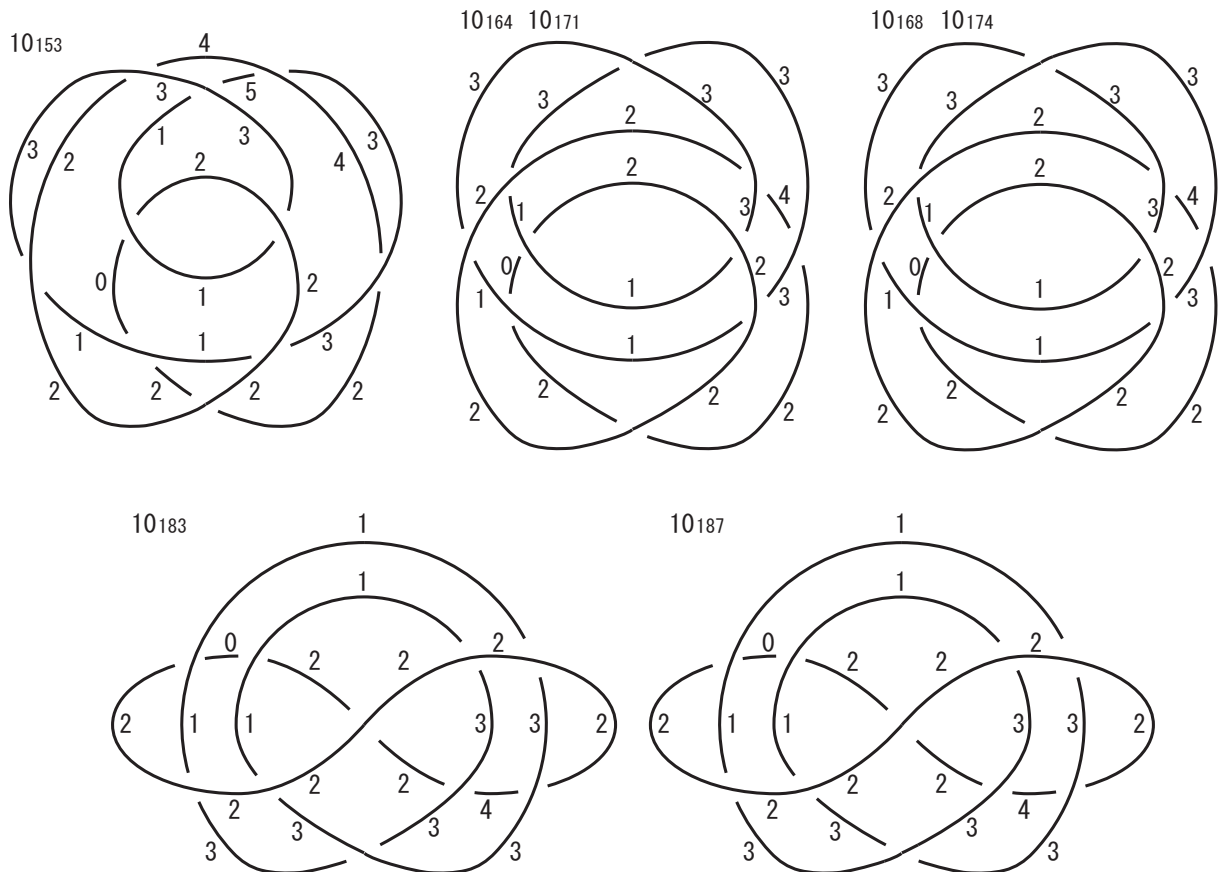


FIGURE 9. 交差点 10 個以下で (1)~(4) の変形だけでははずれない

10 交差点まででは有限個の 2 成分自明絡み目の図しか無いので、無限個の絡み目の図を考えたい。図 4 (2) の図は m, n がどんな自然数の組でもこの方法ではずれると予想している。図 1, 2 で $n = 3, m = 2$ の場合はずしたが、 $n = 3, m = 3$ の場合もはずれることを確認した。また、図 10 は Hass と Nowik の論文 [15] で与えられた自明結び目の図の交差点を 1 つ減らして 2 成分自明絡み目にしたものだが、これもこの方法ではずれるであろうと予想する。 $n=3$ のときには確認してある。

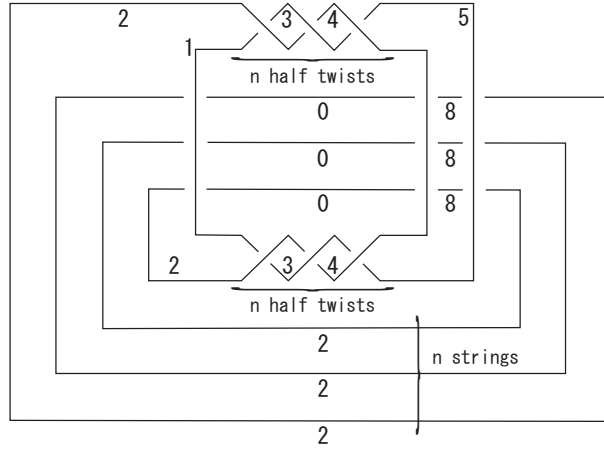


FIGURE 10. Hass & Nowik の自明結び目の図を少しいじって得られる 2 成分自明絡み目の図

第 6 節では、自明結び目の図を 2 重平行化して 2 成分の自明絡み目の図を作り、その整数彩色を考える。(平行化についてどの文献を引用すべきかわかりませんでした。申し訳ありません。) 自明結び目でなくても、任意の結び目の図を 2 重平行化すれば、整数彩色可能な絡み目の図が得られる。2 重平行化で得られた絡み目が分離絡み目であることと、元の結び目が自明結び目であることは同値である。2 つの 2 重平行化の具体例を見る。1 角形をはずす RI 変形と 2 角形をはずす RII 変形を拡張した変形を定義し、用いる。

第 7 節では、像が $0, 1, 2, 3$ だけからなる整数彩色を持つ絡み目の図を考える。そこでの考察から偶数本の紐が束になる構造が整数彩色の威力を奪うことに気が付く。例えば、winding number が偶数の“衛星構造”を持つ図では整数彩色が全く無能になる。

第 8 節では、winding number が偶数の“衛星構造”を持つ図であっても、線形有理数彩色を考えれば、ある程度対処できることを述べる。double ψ 変形を定義し、用いる。しかし、winding number が 0 の“衛星構造”に対してはどんな quandle 彩色も無効であることも観察する。これに対処するには quandle 彩色から離れ、新しい彩色を考える必要がある。

2. 2 角形を作る RII 変形と RIII 変形の実現

この節では、RI 変形、2 角形を消す RII 変形、 ψ 変形、exchange 変形の組が絡み目の図の「基本変形」として相応しいことを示す。すなわち、2 つの絡み目の図が同じ絡み目を表すならば、片方にこれらの変形を有限回うまく組み合わせて適用すると、もう一方の図になることを証明する。それには、第 1 節で述べた定理 1.3 を示せばよい。ただし、変形の途中過程では絡み目の図が連結であるという条件は付いてしまうが。

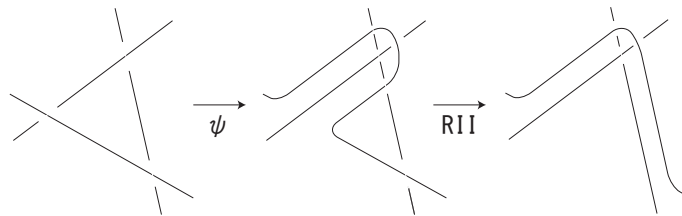


FIGURE 11. RIII 変形を ψ 変形と 2 角形を消す RII 変形で実現する

まず、RIII 変形は図 11 の変形によって実現できる。 ψ 変形と 2 角形を消す RII 変形を用いる。次に、離れた 2 辺の間の「2 角形を作る RII 変形」は図 12 のような変形によって実現される。 ψ 変形と 2 角形を消す RII 変形を用いて 2 角形領域を作り、最後に 2 角形の交差点の上下が目的のものとは合わなかったら、exchange 変形を用いて調整する。同じ辺同士の間での「2 角形を作る RII 変形」は図 13 (1) の変形によって実現される。

1 角形を作る RI 変形を 2 回行う. 隣り合う辺同士の間での「2 角形を作る RII 変形」は図 13 (2) の変形によって実現される. この場合が最もやさしいが, 何とか実現できる.

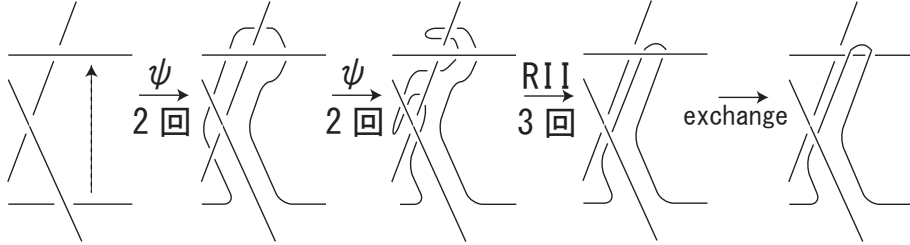


FIGURE 12. 2 角形を作る RII 変形を実現する

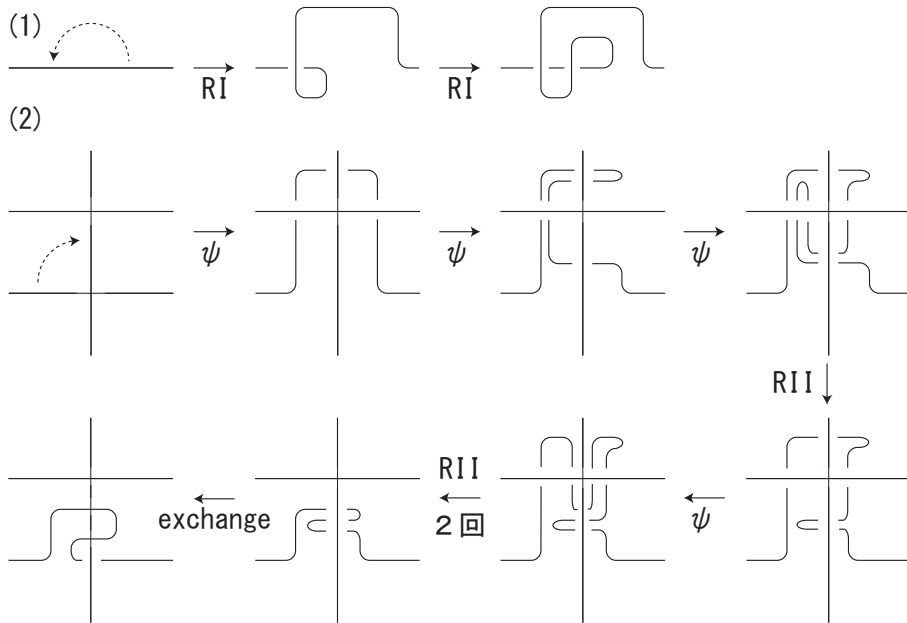


FIGURE 13. 2 角形を作る RII 変形を実現する

3. 整数彩色の基本的性質

まず, 整数彩色の定義を述べる. ただし, 通常定義と少しだけ変えておく. 絡み目の図の弧たちに対して整数を対応させるのではなく, ここでは絡み目の図の辺たちに対して整数を対応させることにする. こうすることによって, 次の節で述べる複雑さの定義に馴染み易くなることと, 従来の彩色を超えた概念の拡張に繋がることを少し期待しているのである.

交差点を n 個持つ絡み目の図 D は, 交差点のところで紐を切ると, $2n$ 個の辺に分かれる. \mathcal{E}_D を D の辺たち全てのなす集合とする. \mathbb{Z} を整数全体のなす集合とする. 写像 $\gamma: \mathcal{E}_D \rightarrow \mathbb{Z}$ は次の交差点条件を D の全ての交差点において満たすとき, D の整数彩色であると言われる. ここで, 各交差点における交差点条件とは, 図 14 のように, e_i, e_j を交差点の下を通る紐をなす D の 2 辺, e_k, e_l を交差点の上を通る紐をなす D の 2 辺とすると, $\gamma(e_i) + \gamma(e_j) = \gamma(e_k) + \gamma(e_l)$ かつ $\gamma(e_k) = \gamma(e_l)$ の連立方程式のことである.

写像先の集合 \mathbb{Z} と前者の条件 $\gamma(e_i) + \gamma(e_j) = \gamma(e_k) + \gamma(e_l)$ をいろいろと替えることはよく行われている. さらに後者の条件 $\gamma(e_k) = \gamma(e_l)$ を他のものに置き換えると, 従来の彩色とは異なったものが得られるかもしれない. 他のものと言っても, 交差点の上下を意識したものであるべきであろう. 例えば $\gamma(e_i) = \gamma(e_j)$ とい

う条件に置き換えると、全ての交差点の上下を入れ替えた絡み目の図に対する整数彩色の交差点条件が得られるが、それを D に対する情報と解釈することもできる。しかし、この例は従来の彩色と大きな違いは無い。

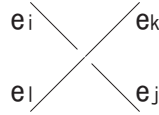


FIGURE 14. 交差点をなす辺たち

整数彩色は定値写像のとき (像がただ 1 つの元から成るとき) 自明であると言われ、定値写像でないとき非自明であると言われる。非自明な整数彩色を持つ絡み目の図は整数彩色可能であると言われる。同じ絡み目を表す 2 つの図は、整数彩色可能であるか不可能であるかが一致することがよく知られている。第 1 節で述べたように分離絡み目の図は整数彩色可能である。しかし、整数彩色可能であるからと言って、その図が分離絡み目を表すとは限らない。

よく知られているように、結び目の図は整数彩色できない。それは、下記補題 3.1 (4) と (5) を見ても分かる。交差点条件に合わせて結び目の辺たちに整数を振ってゆくと、だんだん値の絶対値が大きくなってゆき、元の辺に戻ってきたときに整合性が取れなくなってしまう。そこで、法 (modulo) を取って写像先を $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ にしたりして「つじつま」を合わせるのである。しかし、成分 (輪, component) の数が 2 以上の絡み目の図には整数彩色できるものが、少数派ではあるが、結構ある。その場合、法をとらないで整数彩色のままにしておいた方が絡み目の図の特徴を良く捉えているはずである。

整数彩色の基本的な性質を列挙しておく。

- 補題 3.1. (1) γ を整数彩色, q を有理数とする。このとき, $q\gamma$ が \mathbb{Z} への写像になっていれば, $q\gamma$ も整数彩色である。
- (2) γ_1, γ_2 が整数彩色のとき, $\gamma_1 + \gamma_2$ も整数彩色である。
- (3) γ を整数彩色, k を整数とする。このとき, $\gamma + k$ も整数彩色である。
- (4) 同じ成分 (component) に属する辺たちに整数彩色によって対応する整数たちは、全て奇数か、全て偶数である。
- (5) 整数彩色可能な絡み目の図は、像が 0 以上の整数のみから成り、0 と「1 つ以上の奇数」を含む整数彩色を持つ。

証明：(1)~(3) は明らかである。

(4) は図 14 のような各交差点で $\gamma(e_i) + \gamma(e_j) = \gamma(e_k) + \gamma(e_l) = 2\gamma(e_k) \equiv 0 \pmod{2}$ だから, $\gamma(e_i) \equiv -\gamma(e_j) \equiv \gamma(e_j) \pmod{2}$ が成り立つことによる。

(5) を示す。 γ を任意の非自明な整数彩色とする。 m をその像の最小の数とする。整数彩色を $\gamma - m$ に取り直して、像が 0 を含み、像の元は全て 0 以上の整数となるようにする。それを新たに γ と置き直す。 γ の像が偶数だけからなるならば、彩色を $\gamma/2$ に取り替え、新たにそれを γ と書く。この操作を繰り返すと γ の像の最大数が小さくなっていき、いずれ像が偶数と奇数の両方を含むようになる。 \square

次の演習問題は、筆者たちの勉強不足により、証明を確認するのが今回の締め切りに間に合わなかったが、たぶん容易に証明できることがらたちであろうと期待する。あるいは、何かの本に既に証明が書いてあるかもしれない。(6) はひょっとしたら間違いかもしれない。

演習問題 3.2. 以下のことが正しければ証明せよ。もしも正しくなければ反例を挙げよ。

- (6) 整数彩色可能な絡み目の図は、「像が 0 以上の整数たちから成り、0 と 1 を含む整数彩色」を持つ。
- (7) 絡み目の図が整数彩色可能であることと *determinant* が 0 であることは同値である。
- (8) 同じ絡み目を表す 2 つの図に対して、整数彩色全体のなす加群の階数は等しい。
- (9) 絡み目 L に対して、 L を表す図を全て考えて、それらの連結成分の数の最大値を $s(L)$ と置く。 D を L の任意の図とする。 D の整数彩色全体のなす加群の階数は $s(L)$ 以上である。

4. 複雑さの定義と有効な ψ 変形

この節で整数彩色の複雑さの一応の定義を与えるが、もっと改良の余地があるかもしれない。

最も大きな整数から退治するだけでなく、次の節の図 16 の例のように、最も小さな整数を退治する操作も考える必要があるので、以下の複雑さの定義はやや複雑である。(尤も、次の節の最後に述べるように、最小の数が対応する辺に沿って ψ 変形する代わりに、整数彩色の整数の大小を反転した整数彩色に取り直すことも考えられるかもしれない。)

D を絡み目の図、 γ をその非自明な整数彩色とする。 a, b を γ の像の元の最小値と最大値とする。 γ の像の元 z に対して、その辺境度を $f(z) = \max(|z - a|, |b - z|)$ とする。辺境度を固定したとき、その辺境度を持つ像の元は 1 個、または 2 個である。各辺境度 f に対して、その重複度 $m(f)$ を定める。辺境度 f の像が 1 個だけのときは、その像が γ によって対応する辺の数を $m(f)$ と定める。像が 2 個のときは、それらの像を x, y とし、 x, y が対応する辺の数をそれぞれ m_x, m_y とし、 (m_x, m_y) の成分たちを辞書式順序で小さい順に並べかえたものを $m(f)$ と定める。 γ の像の元たちの辺境度が小さい順に $f_1, f_2, \dots, f_{k-1}, f_k$ であるとき、 γ の複雑さ $x(\gamma)$ を $x(\gamma) = ((f_k, m(f_k)), (f_{k-1}, m(f_{k-1})), \dots, (f_1, m(f_1)))$ によって定める。複雑さの大小は辞書式順序によって決める。

例えば、図 20 (5) の絡み目の図は 5 の辺が 1 本、4 の辺が 8 本、3 の辺が 22 本、2 の辺が 22 本、1 の辺が 9 本、0 の辺が 2 本であり、像の元 0 と 5 の辺境度は 5、1 と 4 の辺境度は 4、2 と 3 の辺境度は 3 だから、複雑さは $((5, (1, 2)), (4, (8, 9)), (3, (22, 22)))$ である。図 20 (6) の絡み目の図は 5 の辺が 1 本、4 の辺が 5 本、3 の辺が 13 本、2 の辺が 21 本、1 の辺が 10 本、0 の辺が 2 本なので、複雑さは $((5, (1, 2)), (4, (5, 10)), (3, (13, 21)))$ である。辺境度 4 のところで (8, 9) よりも (5, 10) の方が辞書式順序が若いので、(5) よりも (6) の方が複雑さが減少していることが分かる。

また、複雑さに γ の総変動量を組み込むことも考えられるかもしれない。ここで、総変動量とは、絡み目の紐に沿って隣り合う 2 辺に対応する数の差の絶対値を全てのそのような 2 辺の組に亘って足し合わせたものこととする。しかし、今回は組み込まずに見送る。

このように複雑さを定義したときに、どのような ψ 変形が複雑さを減らすか観察する。

以下、整数彩色は像が 0 以上のみの整数たちから成り、0 と「1 つ以上の奇数」を含むもの考える (補題 3.1 (5) 参照)。

補題 4.1. 図 7 の ψ 変形は、(1) $a < b \leq c = \max$ かつ「 $b < c$ または $2a - c > 0$ または『変形前に (c が対応する辺の数) が (0 が対応する辺の数) 以下である』」または (2) $a > b \geq c = \min = 0$ かつ「 $b > c$ または $2a - c < \max$ または『変形前に (0 が対応する辺の数) が (\max が対応する辺の数) 以下である』」とき、上記の複雑さ $x(\gamma)$ を減少させる。

なお、(1)、(2) いずれのときも、 $b = c$ の場合は、 b が対応する辺たちと c が対応する辺のなす交差点の上下は図 7 と逆でも良い。

証明：(1) を証明する。(2) は同様なので省略する。) $a < b \leq c = \max$ のときを考える。新しく生じる整数 $2a - b$ と $2a - 2b + c$ の値は次のように評価される。ただし、等号は $b = c$ のとき、またそのときのみ成り立つ。

$$2a - b = 2a - c + (c - b) \geq 2a - c,$$

$$2a - b = a - (b - a) < a,$$

$$2a - 2b + c = 2a - b + (c - b) \geq 2a - b \geq 2a - c,$$

$$2a - 2b + c = c - 2(b - a) < c$$

最大の数 c が 1 つ消えて、新しく生じる整数たちは c よりも小さく、変形前に現れる整数以上である。 $b < c$ のときはこれで複雑さが減る。しかし、 $b = c$ のときはそうはとは限らない。絡み目の図のどこかにまだ c が対応している辺が残っていて、しかも $2a - b = 2a - c = 0$ のとき、新しく生じる $2a - b$ と $2a - 2b + c$ の両方ともが 0 なので、最小の数 0 が増えてしまうからである。これで複雑さが減るのは、変形前に「 c が対応する辺の数」が「0 が対応する辺の数」以下である場合である。□

補題 4.2. 図 8 の long ψ 変形は、(1) $a < b < c = \max$ かつ $2a - c \geq 0$ かつ「 $2a - c > 0$ または『変形前に (c が対応する辺の数) が (0 が対応する辺の数) 以下である』」または (2) $a > b > c = \min = 0$ かつ $2a - c \leq \max$ かつ「 $2a - c < \max$ または『変形前に (0 が対応する辺の数) が (\max が対応する辺の数) 以下である』」とき、上記の複雑さ $x(\gamma)$ を減少させる。

証明：(1) を証明する. (2) の証明は省略する. $a < b < c = \max$ の場合を考える. long ψ 変形によって生じる新しい整数は $2a - b$ と $2a - c$ である.

$$c > -2(b - a) + c = 2a - 2b + c$$

$$2a - 2b + c = 2a - b + (c - b) > 2a - b$$

$$2a - b = 2a - c + (c - b) > 2a - c$$

であるから, 新しい整数は全て c よりも小さい. また, $2a - c > 0$ のときは全て 0 よりも大きいから複雑さが減る. $2a - c = 0$ のときは 0 が対応する辺が増えるが, 上記『』内の条件が満たされるとき, 複雑さが減る. \square

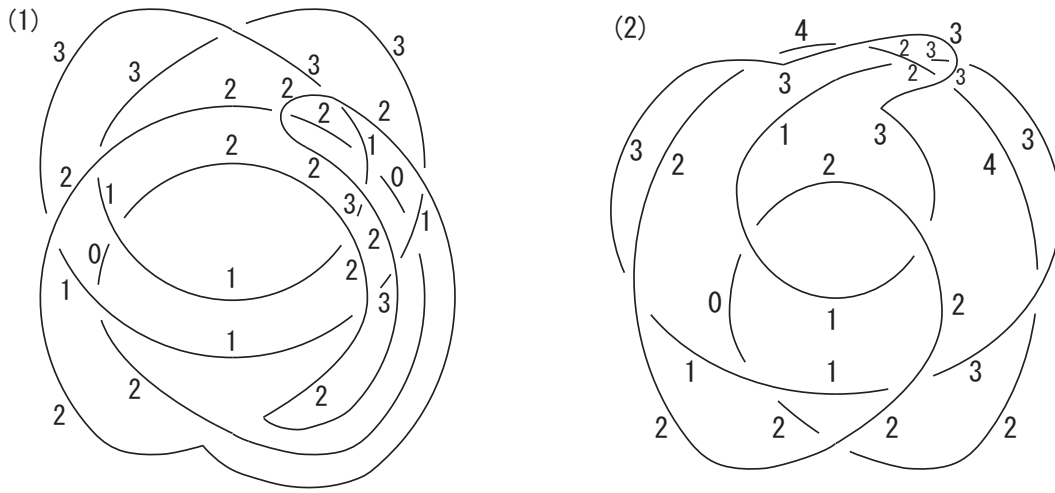


FIGURE 15. 10_{164} と 10_{153} の変形

5. 交差点が10個以下の2成分自明絡み目の図

図9の5個の例外のうち, $10_{164}, 10_{168}, 10_{183}, 10_{187}$ の4つは最初に long ψ 変形を適用すれば, 後は RII 変形を4回使ってはずれず. 尤も, 結果 1.4 に書いた手順に忠実に従うならば, 途中で RI 変形をさしはさむことになるが, 図15(1)に 10_{164} の図に対する long ψ 変形を適用した直後の図を描いた.

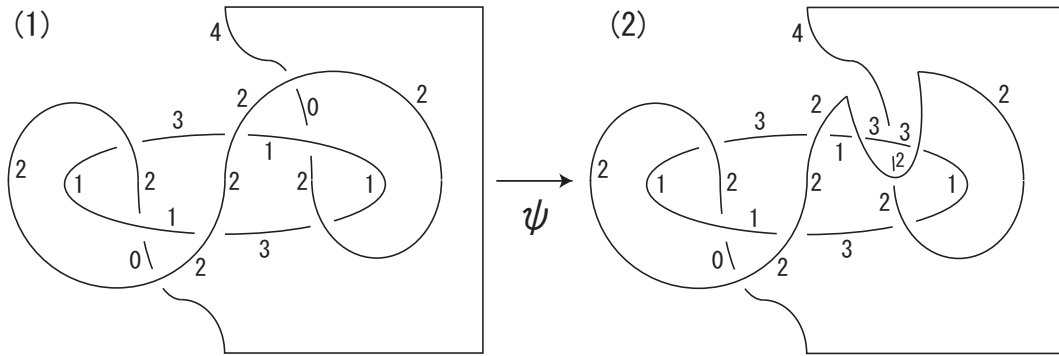
図9の 10_{153} はもう少し手間がかかる. まず, 図15(2)のように5が対応している辺に沿って ψ 変形を適用する. すると, 天辺の4が対応している辺が3が対応している辺とはずれず2角形をなすようになるので, それを RII 変形で消す. すると 10_{164} の図と同じになるので, 後は先述の方法ではずすことができる.

なお, 図9の図たちに対して, 交差点の上下を全て逆にした図の整数彩色を考えてみたが, $10_{164}, 10_{168}, 10_{183}, 10_{187}$ には ψ 変形が上手く適用できず, 10_{153} の図も long ψ 変形を用いないと, (1) ~ (4) までの変形だけ考えたのでは途中で変形できなくなってしまった.

ところで, 実験結果 1.4 の (4) の「最小の数0が対応する辺に沿った ψ 変形」が必要な具体例を挙げておく. 図16(1)がそれで, 最大の数4が対応する辺に沿った ψ 変形が適用できない. long ψ 変形もうまく行かない. 補題 4.2 (1) の条件 $2a - c \geq 0$ を満たさない. 実際, $a = 1, b = 2, c = 4$ だから $2a - c = -2 < 0$ である. 図16(2)のように0が対応した辺に沿って ψ 変形すれば, 素直にはずれる.

尤も, 最小の数に対応する辺に沿って ψ 変形を行うと考える代わりに, 整数彩色 γ を $4 - \gamma$ に取り替えることにすれば, 辺たちに対応する整数の大小が反転するので, 最大の数に対応する辺に沿って変形を行うことになる.

研究課題 5.1. 最大の数に対応する辺に沿った ψ 変形と最小の数に対応する辺に沿った ψ 変形の両方が必要な具体例が存在すると予想する. それを構成せよ.

FIGURE 16. 最小の整数が対応する辺に沿った ψ 変形が必要な例

6. 自明結び目をほどけるか

任意の結び目の図を 2 重平行化すれば、整数彩色可能な絡み目の図が得られる。2 重平行化は、結び目理論でよく使われる技術であり、結び目の輪を平行な 2 本の輪に置き換えるのだが、その 2 本の輪たちのなす絡み目の絡み数 (linking number) が 0 になるように配置する。特に、自明結び目の図を 2 重平行化すると、2 成分の自明絡み目の図が得られる。2 重平行化で得られた絡み目が分離絡み目であることと、元の結び目が自明結び目であることは同値である。したがって、絡み目がはずれるか否かが判定できれば、結び目が自明結び目であるかないかが判定できるし、2 本平行な紐を束にして動かす技術を確認できれば、自明結び目のほどき方も分かるかもしれない。

通常の三つ葉結び目の図の交差点の一つの上下を変えたものはひと目見れば自明結び目を表すことが分かる。しかし、ここでは、その図が自明結び目を表すか否かが分からないという状況を想定する。図 17 の 2 番目の図はそれを 2 重平行化したものである。linking number の調整のための twist はすぐに RII 変形で 2 角形を消せないような位置に取って置いた。これを整数彩色して、実験結果 1.4 の変形 (1)~(4) を適用すると絡み目がはずれる。したがって、2 重平行化で得られた絡み目が分離絡み目だから、元の結び目の図は自明結び目を表すことが分かる。

次の例を見る前に、1 角形を消す RI 変形と 2 角形を消す RII 変形を拡張しておく。図 18 の変形がそれである。(1) が RI 変形の拡張で、(2) が RII 変形の拡張である。 t を丸で囲った部分には任意のタングルが入る。1 角形や 2 角形は図の複数の領域を合わせてできたものでも良い。ただし、それらの辺の内部は常に交差点の上を通らねばならないとする。RII の方は図形だけ見ると ψ 変形の逆変形を含んでいる。しかし、整数彩色の複雑さが減る場合にのみ適用すれば、実験結果 1.4 の ψ 変形の逆にはならない。したがって、 ψ 変形とその逆変形の堂々巡りになる心配は無い。

図 19 の 2 重平行化は今までの手法だけでははずれない。(4) の図のところで変形が止まってしまう。右上の最大の数 5 の両側が 4 が対応する辺で挟まれてしまって ψ 変形できないし、long ψ 変形もできない。そこで、上で定義した RI や RII の拡張を実験結果 1.4 の (2) の変形と (3) の変形間の優先順位に設定する。また、 ψ 変形において、 $c = \max$ や $c = \min$ の条件を取り除き、複雑さが減れば ψ を適用することにする。(4) の図において、5 の辺を一旦放っておいて、4 の辺に沿って ψ 変形し、さらに拡張された RII 変形を適用する。5 の辺は (6) から (7) の変形で退治される。そのように変形してゆくと、図 19, 20 のように 2 重平行化によって得られた絡み目ははずれる。

2 本束にして変形する操作については、これからの研究課題である。

7. 整数 0, 1, 2, 3 だけで彩色される自明絡み目の図

この節では像が 0, 1, 2, 3 の 4 つの元だけから成る整数彩色を持つ絡み目の図を考える。以下に述べるように、winding number が偶数の“衛星構造”を持つ「絡み目の図」はそのような彩色を持ち、そのような衛星構造は整数彩色が「絡み目の図を見てすぐに分かること」以上の情報を持たないようにさせてしまい、我々の目的のためには不都合であることに気づくことになる。

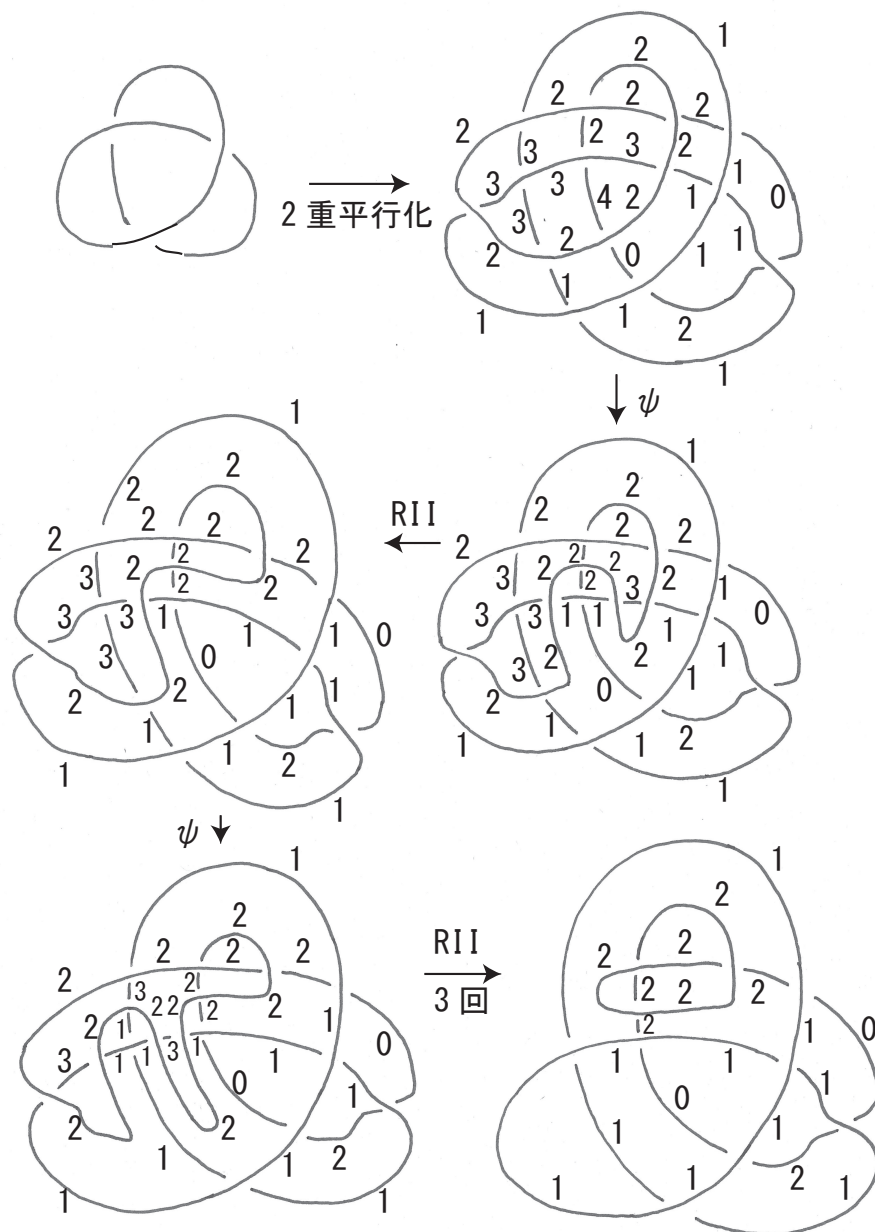


FIGURE 17. 三つ葉結び目の交差点の一つの上下を変えた図の2重平行化

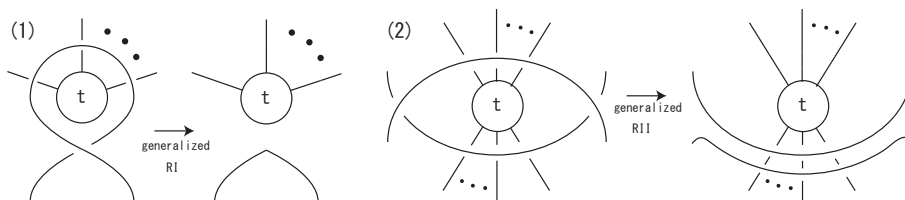


FIGURE 18. 三つ葉結び目の交差点の一つの上下を変えた図の2重平行化

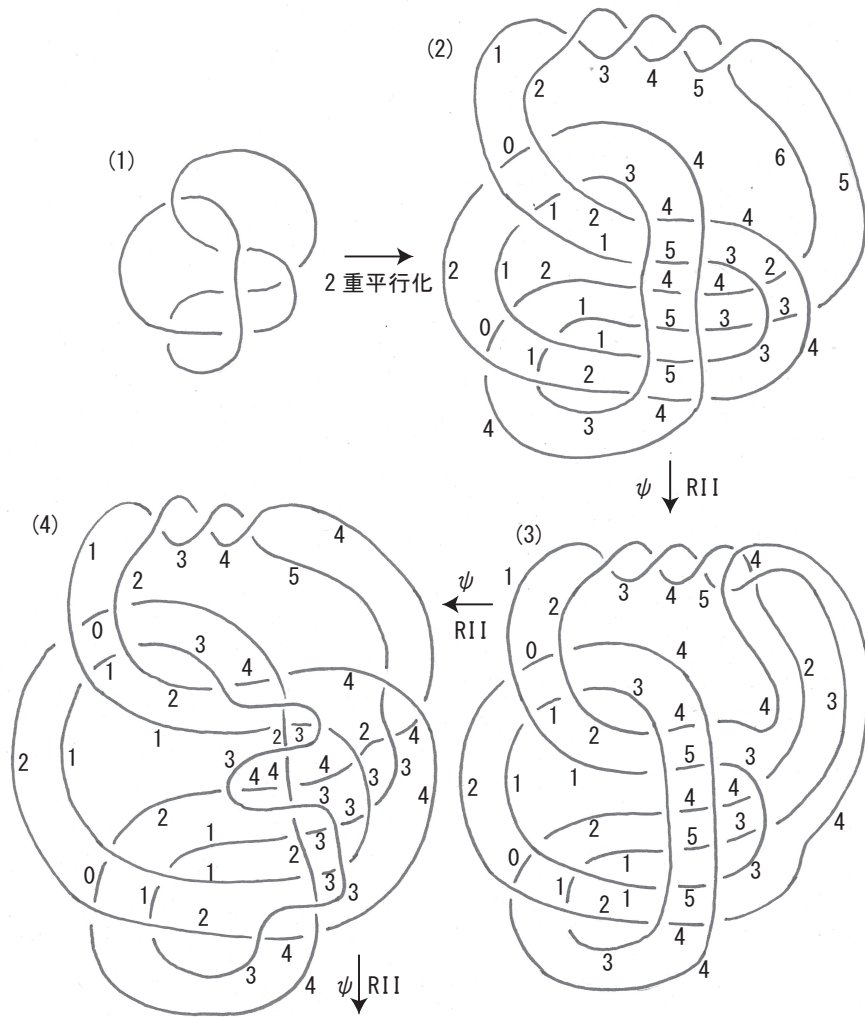


FIGURE 19. 6_3 結び目の図の交差点の上下を変えた図の 2 重平行化 (その 1)

まず、考え得る交差点の彩色は図 21 の 6 種類しか無い。しかし、絡み目の図が連結である場合、これらの交差点のうち、(1) の 3 ばかりのもの、(6) の 0 ばかりのものは、以下のように ψ 変形で退治することができる。3 ばかりの交差点があったとする。すると、我々が考えるべき図は連結だから、どこかに 3 が対応する辺で、片方の端点が (1) のタイプの交差点、もう一方の端点が (2) のタイプの交差点になっているものが存在する。図 22 のように、この辺に沿って ψ 変形を適用する。この図では 3 ばかりの交差点の上下を潰したものを描いたが、実は、この交差点の上下はどちらでも構わない。そのことは補題 4.1 の 2 段落目に書いた。この操作を繰り返して、(1) のタイプの交差点を無くすることができる。同様に、(6) のタイプの 0 ばかりの交差点も無くすることができる。

今や、3 が対応する辺の両端は (2) のタイプの交差点であり、0 が対応する辺の両端は (4) のタイプの交差点である。すると、図 23 のように、2 が対応する辺や、1 が対応する辺は、2 本束になって現れることが分かる。この 2 本束になる構造が曲者で、どうやら整数彩色の威力を奪ってしまう性質を持っているらしい。例えば、winding number が偶数の“衛星構造”は、整数彩色を完全に無能化してしまう。 D を任意の「2 成分絡み目」の図とする。 D は分離絡み目を表しても表さなくても構わないし、整数彩色可能でも不可能でも構わない。図 24 のように、 D の double ((2, p)-cable) や Whitehead double を考える。solid torus 中の pattern を companion link に沿って埋め込む際の、ねじれ具合は任意で良い。そうして得られた図を \tilde{D} とする。 D が

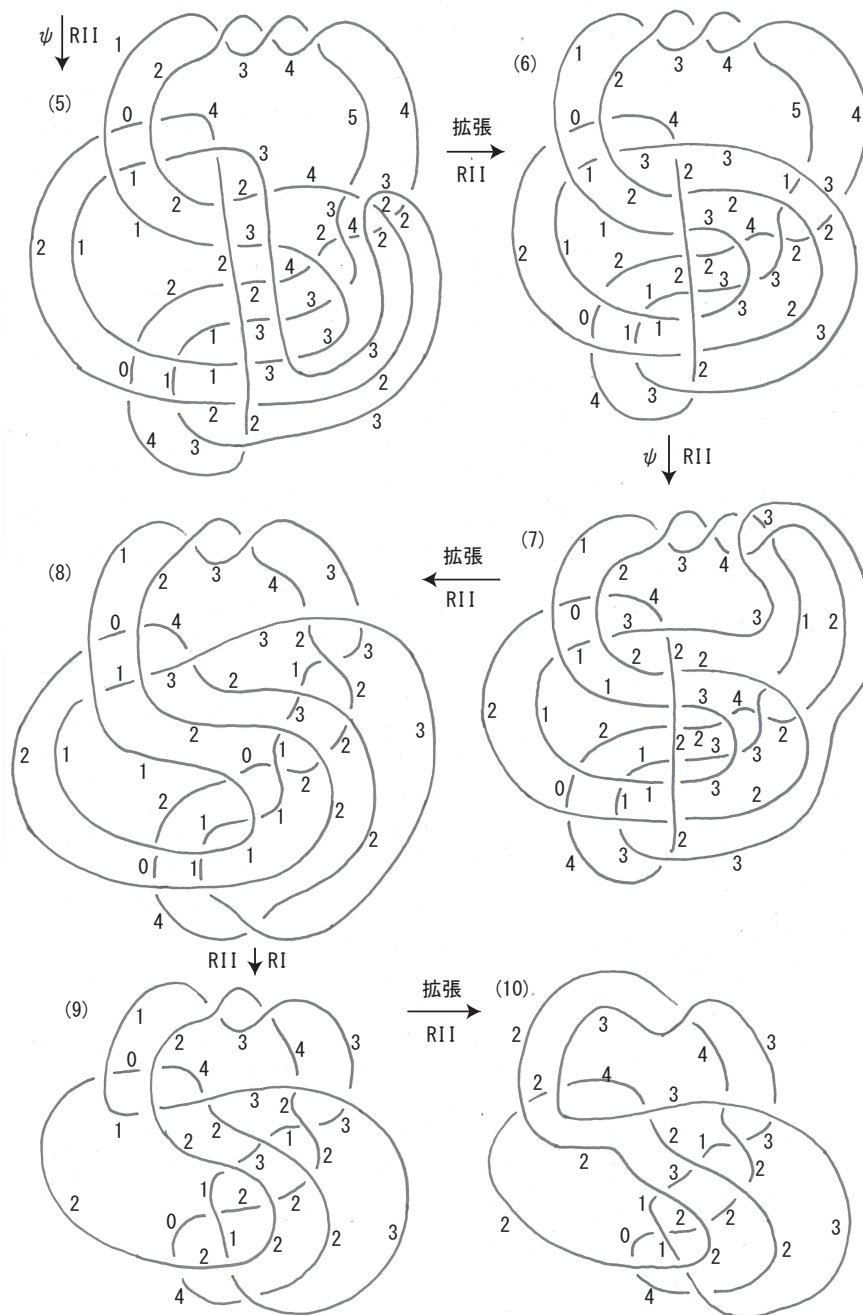


FIGURE 20. 6_3 結び目の図の交差点の上下を変えた図の 2 重平行化 (その 2)

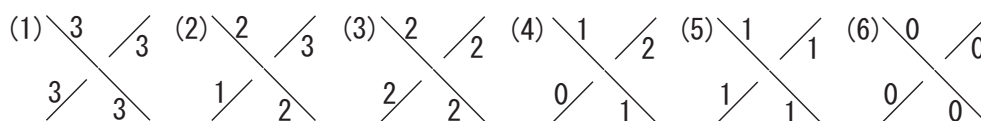


FIGURE 21. $\text{Im } \gamma = \{0, 1, 2, 3\}$ のときの有り得る交差点の整数彩色

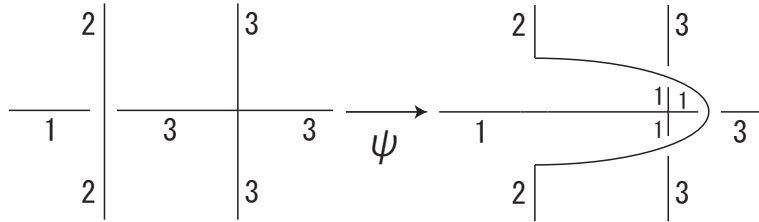


FIGURE 22. 3 ばかりの交差点を退治する

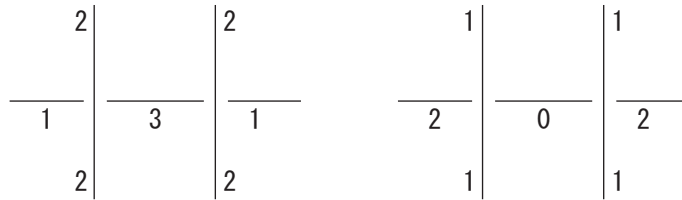


FIGURE 23. 3 に対応する辺と 0 に対応する辺はこれしかない

2 成分自明絡み目を表すならば、ねじれ具合を適切に設定すれば、 \tilde{D} も 2 成分自明絡み目を表す。 \tilde{D} は下記の整数彩色を許す。片方の成分 (componsnet) の辺たちには殆ど 2 が対応し、他の成分との交差点の下を通るところの辺だけ 0 が対応する。もう片方の成分の辺たちには殆ど 1 が対応し、他の成分との交差点の下を通るところの辺だけ 3 が対応する。交差点の上を通るか下を通るかは図を見ればすぐに分かることなので、この整数彩色は有用な情報を持っておらず、ほとんど役に立たないと思われる。

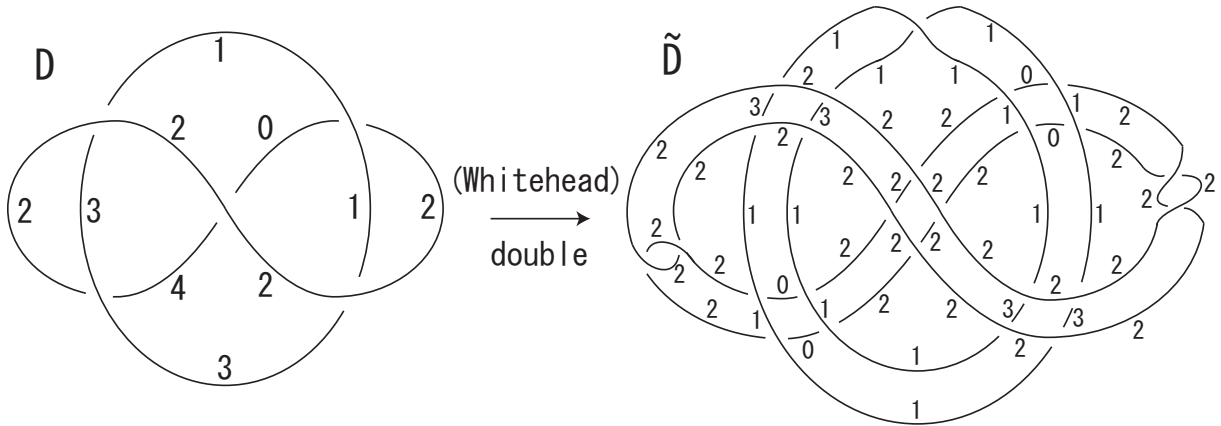


FIGURE 24. winding number が偶数の “衛星構造” は整数彩色を無能化する

絡み目の図の衛星構造を正確に定義しようとする、かなりややこしい文章が必要だと思われる。正確に書いても現時点では有用かどうか分からないので、ここでは、何となく感覚的に理解して頂きたい。

衛星構造を持たない図でも、以下のようなものは整数彩色が無能になる。まず、winding number が偶数の衛星構造を持つ図から出発して、変形してゆく。同じ数が対応する辺たちの間で、Reidemeister 変形をしても整数彩色は無能なままである。さらに、同じ数が対応する辺たちが作る交差点の上下をかえたり、交差点のところで smoothing などを適用して繋ぎかえても、整数彩色は無能のままである。このような図を概衛星構造を持つ図と呼ぼうかと思うが、何しろ、正確な定義がまだ無い。

“本当に” 衛星構造を持っている絡み目の図ならば、companion link がはずれるかはずれないか調べれば良い。しかし、概衛星構造の場合はそうはいかない。特に、pattern が solid torus の中で ball の中に ambient

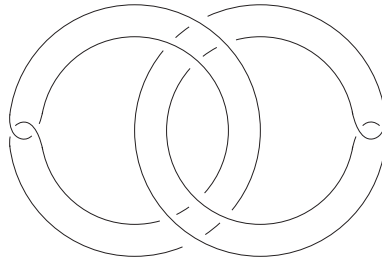


FIGURE 25. “companion link” は分離しないが、この double モドキは分離する

isotopic の場合は、図 25 のように companion link が分離絡み目でも分離絡み目を表すので、いつも companion link を調べられるだけで済むということにはならない。

8. WINDING NUMBER が偶数の “衛星構造” を持つ絡み目の図と線形有理数彩色と DOUBLE ψ 変形

“衛星構造” や “概衛星構造” を持つ絡み目の図に対処するために、絡み目の向きを利用することを考える。 n 彩色は絡み目の成分たちの向きを考えないが、それ以外の Alexander quandle による coloring は向きに依存する。ここでは quandle の全体空間を $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ でなく、有理数全体のなす集合 \mathbb{Q} にして考える。

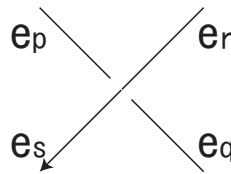


FIGURE 26. 交差点をなす辺たち

D を絡み目の図とする。 \mathcal{E}_D を D の辺たち全てのなす集合とする。写像 $\gamma: \mathcal{E}_D \rightarrow \mathbb{Q}$ は次の交差点条件を D の全ての交差点において満たすとき、 D の $k \downarrow l$ -線形有理数彩色であるということにする。各交差点における交差点条件を説明する。図 26 のように、 e_p, e_q を交差点の下を通る紐をなす D の 2 辺、 e_r, e_s を交差点の上を通る紐をなす D の 2 辺とする。絡み目の向きが e_r から e_s に向かうようになっており、 e_s の方を向いて交差点上に立ったとき、 e_p が右側、 e_q が左側にあつたとする。このとき、 $k\gamma(e_p) + l\gamma(e_q) = (k+l)\gamma(e_r)$ かつ $\gamma(e_r) = \gamma(e_s)$ の連立方程式を交差点条件と呼ぶ。1 つ目の方程式の右辺を $\gamma(e_r)$ と $\gamma(e_s)$ の 1 次結合で書いた方がよいような気もするが、今のところ筆者たちにはどんな式が妥当が分からない。

線形有理数彩色は定値写像のとき自明であると言われ、定値写像でないとき非自明であると言われる。非自明な線形有理数彩色を持つ絡み目の図は線形有理数彩色可能であると言われる。第 1 節で述べたのと同様の議論によって、分離絡み目の図は線形有理数彩色可能である。

図 24 の右側の絡み目の図 \tilde{D} に向きを付けて、 $1 \downarrow 2$ -有理数彩色したのが図 27 (1) である。片方の成分 (component) の辺たちには 3 の倍数の 0, 3, 6, 9 が対応しており、もう片方の成分の辺たちには 3 で割って 1 余る 1, 4 が対応している。1, 4 が対応している成分の彩色は相変わらず無能である。これは、もう片方の成分が Whitehead double になっており、その妨害によるものと考えられる。しかし、0, 3, 6, 9 が対応している成分の彩色は意味がありそうである。

ところが、この図には今までの変形操作が全く通用しない。例えば、最小の数 0 が対応する辺に沿って ψ 変形をすると、図 28 のように $9/2$ や $7/2$ が対応する辺が生じてしまう。この場合、複雑さは彩色全体に 2 を掛けて全ての値を整数にしてから考えるのが妥当である。すると、この変形によって複雑さは急激に大きくなってしまふ。また、この変形は絡み目の図全体で見ると、絡み目をほどこうとする変形にはほど遠い。

double をとる前の図 24 (1) の D の絡み目をはずすときの変形を参考にとると、図 29 のように 2 本束にして変形して、最大の数 9 を退治する手法は考え得る。この変形を double ψ 変形と名付けておく。ただし、やや行き当たりばったりというか、その場しのぎというか、ご都合主義のような気もする。しかし、偶数本の束

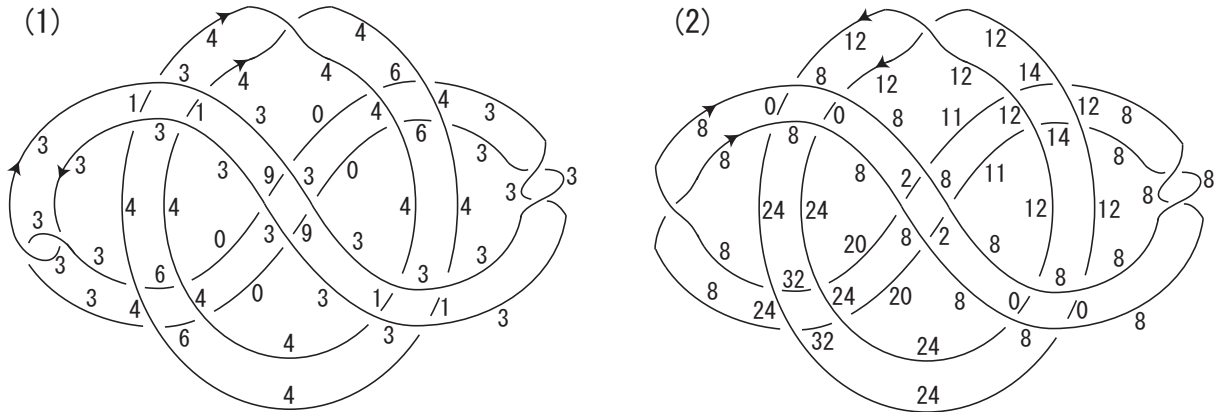


FIGURE 27. $1 \downarrow 2$ -線形有理数彩色

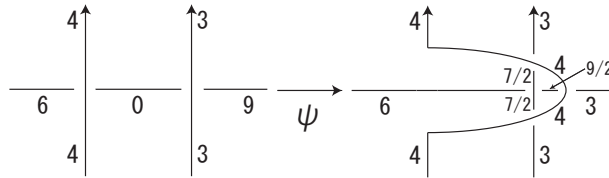


FIGURE 28. ψ 変形が複雑さを増大してしまう

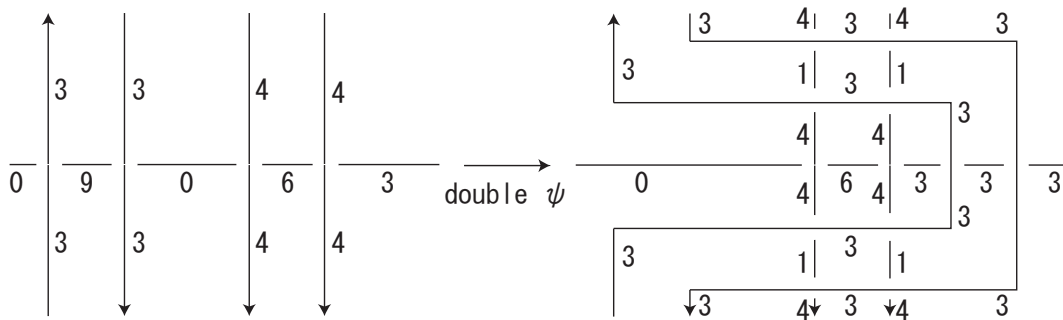


FIGURE 29. double ψ 変形

に邪魔されているのだから、偶数本まとめて変形するのが自然のような気もする。図 27 (2) の場合にもこの変形が有効である。中央の左上がりの 8 が対応している辺 2 本を 20 が対応している辺に沿って動かし、左下の 24 が対応している辺 2 本の上を通り越すようにすると、最大の整数 32 を退治することができる。

さて、このように線形有理数彩色を考えても、Whitehead double のように winding number が 0 の衛星構造を持つ絡み目の図の彩色は無能のままである。図 30 は両方の成分の Whitehead double をとったものだが、任意の k と l に対して $k \downarrow l$ -線形有理数彩色が無能であることを表している。

締め切りまで時間が無いので、極めていい加減な妄想を言っているのだが、例えば、図 31 の交差点において、 $2\gamma(e_p) + 3\gamma(e_q) = \gamma(e_r) + 4\gamma(e_s)$ などという交差点条件を考えたら、どうなるだろうか？ そんな関数 γ があるだろうか？ あったとしても、それは役に立つだろうか？

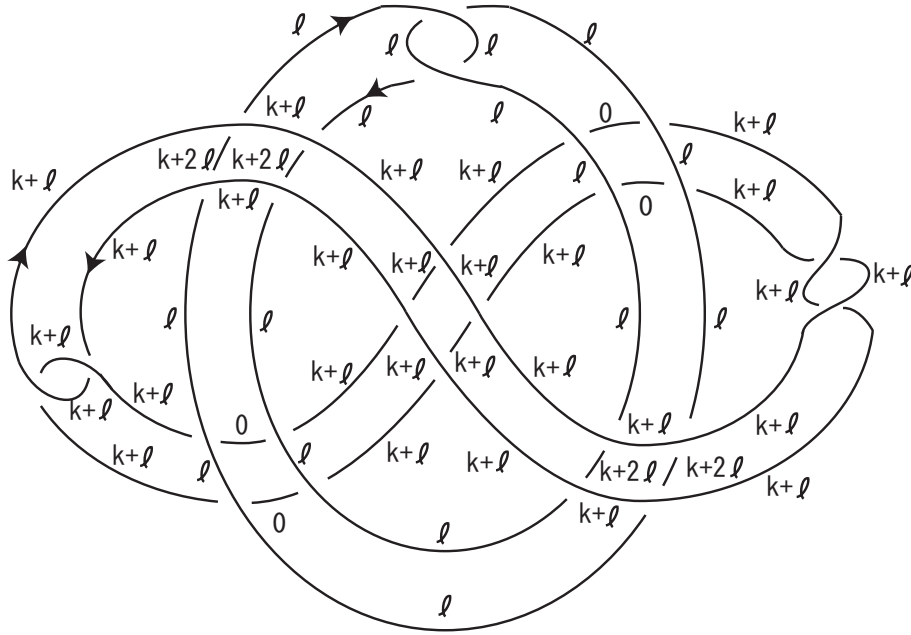


FIGURE 30. Whitehead double に対してはどんな線形有理数彩色も無効

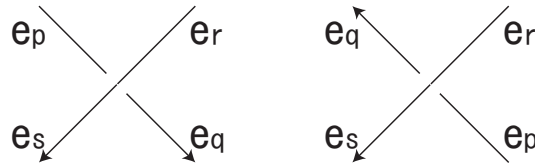


FIGURE 31. 紐の向きを両方とも考えられるか？

謝辞

有益なご助言を頂き、上智大学の 大城佳奈子先生、一橋大学の 中山能力先生に感謝申し上げます。本研究は JSPS 科研費 25400100 の助成を受けたものです。

REFERENCES

1. J.W. Alexander and G.B. Briggs, *On types of knotted curves*. Ann. of Math. **28** (1926/27), 562–586.
2. J.S. Birman and M. D. Hirsch, *A new algorithm for recognizing the unknot*, Geom. Topol. **2** (1998), 175–220.
3. J.S. Birman and W.W. Menasco, *Studying links via closed braids. IV. The unlink*, Trans. Amer. Math. Soc. **329** (1992), no.2, 585–606.
4. J.S. Birman and W.W. Menasco, *Studying links via closed braids. V. Composite links and split links*, Invent. Math. **102** (1990), no.1, 115–139.
5. J.S. Birman and W.W. Menasco, *Special positions for essential tori in link complements*, Topology **33** (1994) 525–556.
6. P.R. Cromwell, *Embedding knots and links in an open book I: Basic properties*, Topology and its Applications **64** (1995), 37–58.
7. R.H. Crowell and R.H. Fox, *An Introduction to knot theory*, Ginn and Co. 1963.
8. I.A. Dynnikov, *Arc-presentations of links: Monotone simplification*, Fundamenta Mathematicae **190** (2006), 29–76.
9. I.A. Dynnikov, *Recognition algorithms in knot theory*, Uspekhi Mat. Nauk **58** (2003), 45–92; translation in Russian Math. Surveys **58** (2003), 1093–1139.
10. R.H. Fox, *Metacyclic invariants of knots and links*, Canadian J. Math. XXII(2) (1970), 193–201.
11. M. Freedman, Zh.-X. He and Zh. Wang, *On the Möbius energy of knots and unknots*, Ann. Math. (2) **139** (1994), 1–50.
12. L. Goeritz, *Bemerkungen zur knoten theorie (German)*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 10 (1934), 201–210.

13. W. Haken, *Theorie der Normal Flächen (German)*, Acta. Math. **105** (1961), 245–375.
14. J. Hass and J. Lagarias, *The number of Reidemeister moves needed for unknotting*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), no. 2, 399–428.
15. J. Hass and T. Nowik, *Unknot diagrams requiring a quadratic number of Reidemeister moves to untangle*. Discrete Comput. Geom. **44** (2010), 91–95.
16. C. Hayashi, *The number of Reidemeister moves for splitting a link*, Math. Ann. **332** (2005), 239–252.
17. A. Henrich and L. Kauffman, *Unknotting Unknots*, preprint (arXiv:1006.4176v4 [math.GT] 4Nov2011).
18. D. Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle* J. Pure Appl. Algebra **23** (1982), 37–65.
19. 鎌田聖一, *曲面結び目理論*, シュプリンガー現代数学シリーズ 16, 丸善出版, 2012.
20. H. Kneser, *Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten (German)*, Jahresbericht der Deut. Math. Verein. **38** (1929), 248–260.
21. R.B. Kusner and J.M. Sullivan, *Möbius energies of knots and links, surfaces and submanifolds*, in : Geometric Topology (Athens, GA, 1993), AMS/IP Stud. Adv. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 570–604.
22. M. Lackenby, *A polynomial upper bound on Reidemeister moves*, preprint (arXiv : 1302.0180 [math.GT] 1Feb2013).
23. W. Menasco, *Recognizing destabilization, exchange moves and flypes*, preprint (arXiv : 1201.5436 [math.GT] 26Jan2012).
24. J. O’Hara, *Energy of a knot*, Topology **30** (1991), 241–247.
25. J. O’Hara (今井淳), 「結び目のエネルギー」, 数学 **49** (1997), 秋季号, 365–378.
26. K. Reidemeister, *Elementare Begründung der Knotentheorie (German)*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **5** (1926), 24–32.
27. C. Rourke and B. Sanderson, *A new classification of links and some calculations using it*, <http://xxx.lanl.gov/abs/math/0006062>
28. M. Takasaki, *Abstractions of symmetric functions*, Tohoku Math. J. **49** (1943), 143–207.
29. The Mathematica Package KnotTheory’, http://katlas.math.toronto.edu/wiki/The_Mathematica_Package_KnotTheory%60
30. B. Trace, *On the Reidemeister moves of a classical knot*, Proc. Amer. Math. Soc. **89** (1983), 722–724.