Construction of non-orbit equivalent actions of mapping class groups

木田 良才 (Yoshikata Kida)*
東北大学大学院理学研究科数学専攻
Mathematical Institute, Tohoku University

1 序

この記事では, 無限離散群による標準確率空間上の保測作用で, エルゴード的かつ本質的自由なものを扱う. このような作用の間には, 共役と軌道同値という 2 つの同値関係が導入され, この 2 つの同値関係に関して, 様々な作用を分類するということが基本的な問題として研究されている. 定義からすぐわかることだが, 共役な 2 つの作用は軌道同値である. 近年注目されている問題として, 2 つの作用が軌道同値であるという仮定から, いつそれらが共役になるかということを問う剛性問題がある.

筆者による 1 つ目の講演では, 写像類群の作用についての剛性定理を述べた. この内容と近年得られている他の剛性定理については, 筆者による日本語の文章 ([木 1], [木 2]) がいくつかあるので, ここでは述べないことにする. 2 つ目の講演では, この記事の表題をタイトルとして, 写像類群の作用で互いに共役でないものを具体的にたくさん構成する方法について述べた. この記事では, この内容について述べることにする. 一般に, 与えられた離散群の作用で互いに軌道同値でないものを構成することは難しい. しかし, 写像類群の作用に関しては, 前述の剛性定理を用いると, 共役であることと軌道同値であることがほぼ同値であることがわかるので, この記事で構成される写像類群の作用は, 実は互いに軌道同値でないこともわかる.

軌道同値に関する一般的な概説記事として, [Ga], [S] を挙げる. 筆者による, 写像類群の作用に関する剛性定理については, [K1], [K2], [K4] を参照せよ.

2 定義と用語

この記事では, Γ, Λ, ... 等は可算で離散な群 (ほとんどの場合, 無限群) を表す. 可算で離散な群を単に離散群ともいう. また, (X, μ), (Y, ν), ... 等は有限正測度をもつ標準 Borel 空間を表す. 特に, 確率測度をもつ標準 Borel 空間を標準確率空間という. ここで, 標準 Borel 空間とは, 可分で完備な距離空間からできる Borel 空間を意味する. 以下では, 離散群による標準 Borel 空間上の様々な作用について論じるが, 作用は全て Borel 可測とする. さらに, 断らない限り, 標準 Borel 空間の部分集合としては可測なものしか考えない.

* *E-mail address*: `kida@math.tohoku.ac.jp`

注意 2.1. 基本的な事実として, 濃度が等しい標準 Borel 空間は全て Borel 空間として同型であることが知られている. 特に, 連続濃度をもつ標準 Borel 空間は Borel 空間として単位区間に同型である. 標準 Borel 空間の基本性質に関する文献としては [Ke] がある.

定義 2.2. Borel 可測な作用 $\alpha\colon \Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ に対し,

(i) α が**保測** (**measure-preserving**) であるとは, 任意の $\gamma \in \Gamma$ と Borel 部分集合 $A \subset X$ に対し, $\mu(\gamma A) = \mu(A)$ となることをいう.

(ii) α が**本質的に自由** (**essentially free**) であるとは, a.e. $x \in X$ に対し, その安定部分群 $\{\gamma \in \Gamma : \gamma x = x\}$ が単位元のみからなるときをいう.

(iii) α が**エルゴード的** (**ergodic**) であるとは, Borel 部分集合 $A \subset X$ が Γ-不変, すなわち, $\gamma A = A$ が任意の $\gamma \in \Gamma$ について成り立つならば, $\mu(A) = 0$ または, $\mu(A) = \mu(X)$ が成り立つときをいう.

(iv) α が **e.f.m.p.** であるとは, α がエルゴード的, 本質的に自由, かつ, 保測であるときをいう.

例 2.3. Γ を無限離散群とし, (X_0,μ_0) を標準確率空間とする. さらに, (X_0,μ_0) は非自明, つまり, $\mu_0(\{x\}) = 1$ なる $x \in X_0$ は存在しないとする. このとき, 積空間 $(X_0,\mu_0)^\Gamma = \prod_\Gamma (X_0,\mu_0)$ は標準確率空間となり, この上の Γ の作用が次のように定義される:

$$\gamma(x_g)_{g\in\Gamma} = (x_{\gamma^{-1}g})_{g\in\Gamma}, \quad \gamma \in \Gamma,\ (x_g)_{g\in\Gamma} \in X_0^\Gamma.$$

この作用 $\Gamma \curvearrowright (X_0,\mu_0)^\Gamma$ は e.f.m.p. である (例えば, [K3, Lemmas 2.4, 2.5] を見よ). このような作用を **Bernoulli 作用**と呼ぶ. このことから特に, 任意の無限離散群は e.f.m.p. 作用をもつことがわかる.

2 つの e.f.m.p. 作用 $\alpha\colon \Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ と $\beta\colon \Lambda \curvearrowright (Y,\nu)$ が与えられたとき, それらの間に以下のような 2 つの同値関係を考えたい. (X,μ) と (Y,ν) が測度空間として同型であるとは, 可測部分集合 $X' \subset X$, $Y' \subset Y$ で補集合が測度 0 になるものと, X' と Y' の間の Borel 同型写像 f で (正の定数倍を除いて) 測度を保つものがあるときをいう. そのような f を測度空間の間の同型写像という. 以下の 2 つの同値関係は測度 0 の集合を無視して定義されるものだから, 以後, 至る所で測度 0 の集合を除くといった類いの注意書きが必要になるが, 逐一述べることはしない.

定義 2.4. 2 つの e.f.m.p. 作用 $\alpha\colon \Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ と $\beta\colon \Lambda \curvearrowright (Y,\nu)$ が **共役** (**conjugate**) であるとは, 測度空間の間の同型写像 $f\colon (X,\mu) \xrightarrow{\simeq} (Y,\nu)$ と同型 $F\colon \Gamma \xrightarrow{\simeq} \Lambda$ で次を満たすものがあるときをいう:

$$f(\gamma x) = F(\gamma) f(x)$$

が任意の $\gamma \in \Gamma$ と a.e. $x \in X$ に対して成り立つ.

定義 2.5. 2 つの e.f.m.p. 作用 $\alpha\colon \Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ と $\beta\colon \Lambda \curvearrowright (Y,\nu)$ が **軌道同値** (**orbit equivalent**, **OE**) であるとは, 測度空間の間の同型写像 $f\colon (X,\mu) \xrightarrow{\simeq} (Y,\nu)$ で次を満たすものがあるときをいう:

$$f(\Gamma x) = \Lambda f(x)$$

が a.e. $x \in X$ に対して成り立つ.

注意 2.6. 定義から明らかに, 共役な作用は OE である. 2 つの作用が OE であるとは, その作用からできる軌道の空間が同型であるという言い方もできよう. 注意として, 無限離散群による e.f.m.p. 作用 $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ が与えられたとき, その基本領域で可測なものは取れない. つまり, 可測部分集合 $F \subset X$ で,

- $\mu(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma F) = \mu(X)$,
- 任意の相異なる $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ に対し, $\mu(\gamma_1 F \triangle \gamma_2 F) = 0$

が成り立つようなものは存在しない. 基本領域が取れない故, 2 つの作用による軌道の空間が同型であるかどうかを判定するのは, 一般には容易ではない.

3　写像類群の作用の剛性

M を向き付け可能でコンパクトかつ連結な曲面とする (境界があってもよい). 以下, 曲面と言えば, これらの条件を満たすものを指す. M の種数が g で, 境界の連結成分の個数が p のとき, M を $M_{g,p}$ と書くこともある. このとき, $\kappa(M) = 3g + p - 4$ とおく. M の写像類群 $\Gamma(M)^\diamond$ を M の自己微分同相写像のアイソトピー類全体からなる群で定義する. $\Gamma(M)^\diamond$ は有限生成群であることが知られている. 写像類群の基本的な性質については, [Iv] が詳しい. 以下では, 常に $\kappa(M) > 0$, $M \neq M_{1,2}, M_{2,0}$ を仮定する.

定理 3.1 ([K2, Theorem 1.3]). Γ を $\Gamma(M)^\diamond$ の有限指数部分群とし, $\alpha\colon \Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ と $\beta\colon \Gamma \curvearrowright (Y, \nu)$ を e.f.m.p. 作用とする. α は **aperiodic**, 即ち, 任意の Γ の有限指数部分群も (X, μ) 上エルゴード的に作用するとする. このとき, α と β が OE ならば, α と β は共役である.

後の節では定理 3.1 しか使わないが, より強い, 以下のような主張を示すことができる:

定理 3.2 ([K2, Theorem 1.1]). Λ を離散群とし, $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ と $\Lambda \curvearrowright (Y, \nu)$ を OE なる e.f.m.p. 作用とする. このとき, この 2 つの作用はほとんど共役 (virtually conjugate) である.

ここでは, 2 つの作用がほとんど共役であるということの定義は述べないが, 結論から導かれる事実として, 群の短完全列 $1 \to N \to \Lambda \to \Gamma \to 1$ で, N が有限となるものが存在するということを言及しておく. 定理 3.2 のように, 任意の離散群の作用と OE であるという仮定から, ほとんど共役であるという結論が導かれるような作用は (OE の意味で) **超剛的** (**superrigid**) であるという. 定理 3.2 は, 任意の Γ の e.f.m.p. 作用は超剛的であるということを主張している. 定理 3.1, 3.2 の証明に関する概説記事として, [K4] を挙げておく.

注意 3.3. 他にも多くの超剛的な作用が見つかっている. 超剛的な作用の最初の例は, Furman [F1] により発見された. 例えば, $n \geq 3$ のときの標準的作用 $SL_n(\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ は超剛的である. Furman は他にも, $\mathbb{R}$-階数が 2 以上の非コンパクト型の単純 Lie 群の格子部分群の作用で超剛的なものを指摘している. 他の超剛的な作用を扱っている論文として, [F2], [Io], [MS], [P1], [P2] を挙げておく.

4　写像類群による Bernoulli 作用

一般に, 与えられた群の作用で互いに OE でないものを構成することは難しい. この節では, 写像類群の作用で互いに共役でないものを具体的に構成する. 構成の仕方は Bernoulli 作用のそれとよく似ており, 一般化された Bernoulli 作用というものを用いて構成する. これらの作用は aperiodic であることが証明できるから, 写像類群の作用の剛性 (定理 3.1) を用いると, それらが互いに OE でないこともわかる. 4.1 節で, 一般化された Bernoulli 作用を紹介し, その作用のエルゴード性と本質的自由性について述べる. 4.2 節では, エルゴード分解の内容について簡単に述べる. これは, 次の小節で一般化された Bernoulli 作用を分類するときに用いられる. 4.3 節で, 写像類群による, ある種の一般化された Bernoulli 作用を共役について分類するという結果を述べ, その証明を与える. なおこの節の内容の詳しい証明等については, [K3] を参照せよ. 他の離散群による一般化された Bernoulli 作用の分類結果として, [PV] を挙げておく.

4.1　一般化された Bernoulli 作用に対するエルゴード性と本質的自由性

Γ を無限離散群, K を Γ が作用する可算集合とする. (X_0, μ_0) を標準確率空間で, 非自明, つまり, (X_0, μ_0) は原子 (atom) を持ってもいいが, ただ一つの原子からは成らないとする. ($x \in X_0$ が (X_0, μ_0) の原子であるとは, $\mu_0(\{x\}) > 0$ となるときをいう.) このとき, 積空間 $(X_0, \mu_0)^K = \prod_K (X_0, \mu_0)$ 上の Γ の保測作用が次のようにして定義される:

$$\gamma(x_k)_{k \in K} = (x_{\gamma^{-1}k})_{k \in K}, \quad \gamma \in \Gamma,\ (x_k)_{k \in K} \in X_0^K.$$

このような作用は, **一般化された Bernoulli 作用**と呼ばれることがある. このような作用がいつエルゴード的または本質的自由になるかについては, 次の補題から知ることができる:

補題 4.1 ([K3, Lemma 2.3]). Γ, K, (X_0, μ_0) を上と同じものとし, 上記のような作用 $\alpha\colon \Gamma \curvearrowright (X_0, \mu_0)^K$ を考える.

(i) α がエルゴード的であるためには, 作用 $\Gamma \curvearrowright K$ の全ての軌道が無限個の元から成ることが必要十分である.

(ii) α が本質的自由であるためには, 次の 2 つの条件が成り立つことが必要十分である:

- 任意の無限位数の元 $\gamma \in \Gamma$ に対し, $k \in K$ で $\langle\gamma\rangle k$ が無限集合であるようなものが存在する. ここで, $\langle\gamma\rangle$ は γ で生成される無限巡回群を表す;
- 任意の有限位数の元 $\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}$ に対し, K の部分集合 $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ で, (a) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, $\langle\gamma\rangle k_n$ が 2 個以上の点から成る; (b) 各 $n \neq m \in \mathbb{N}$ に対し, $\langle\gamma\rangle k_n \cap \langle\gamma\rangle k_m = \varnothing$ が成り立つようなものが存在する.

4.2 エルゴード分解

一般にエルゴード的でない離散群の保測作用 $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ が与えられたとき, (X, μ) を分解することにより, 作用 $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ を Γ のエルゴード的保測作用に分解するという操作が知られている. この操作は, 作用 $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ のエルゴード分解 (ergodic decomposition) と呼ばれ, 分解の仕方の一意性も知られている. 後の小節で, 写像類群の一般化された Bernoulli 作用を分類する際に, この操作が重要な役割を果たすことになる. この小節では, エルゴード分解の内容について簡単に記す. 参考文献として, [Gl] を挙げておく.

標準確率空間 (X, μ), (Y, ν) の間の Borel 写像 $\pi\colon X \to Y$ で $\pi_*\mu = \nu$ (つまり, 任意の Borel 部分集合 $A \subset Y$ に対し, $\mu(\pi^{-1}(A)) = \nu(A)$ が成り立つ) となるものがあったとする. 各 $y \in Y$ に対し, $X_y = p^{-1}(y)$ とおく. このとき, 次のような μ の ν 上の**測度分解** (**measure disintegration**) が取れることが知られている ([Gl, Theorem A.7]): 各 $y \in Y$ に対し, X 上の確率測度 μ_y で, $\mu_y(X_y) = 1$ であって, $\mu = \int_Y \mu_y d\nu(y)$ となるものが存在する. この最後の等式は, 各 Borel 部分集合 $A \subset X$ に対し, 関数 $Y \ni y \mapsto \nu_y(A)$ は Borel 可測であって, $\mu(A) = \int_Y \mu_y(A) d\nu(y)$ が成立するということを意味する. この測度分解について, 分解の仕方の一意性も知られている. つまり, 各 $y \in Y$ に対し, X 上の確率測度 μ'_y で, $\mu'_y(X_y) = 1$ であって, $\mu = \int_Y \mu'_y d\nu(y)$ となるものがあれば, ν-a.e. $y \in Y$ に対し, $\mu_y = \mu'_y$ が成り立つ.

$\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ を離散群 Γ の標準確率空間 (X, μ) 上の保測作用とする. このとき, 標準確率空間 (Y, ν) と Borel 写像 $\pi\colon X \to Y$ で $\pi_*\mu = \nu$ であって, 次を満たすようなものが存在する ([Gl, Theorem 8.7]): $\mu = \int_Y \mu_y d\nu(y)$ を μ の ν 上の測度分解とする.

(i) 任意の $\gamma \in \Gamma$ と μ-a.e. $x \in X$ に対し, $\pi(\gamma x) = \pi(x)$ が成り立つ;

(ii) ν-a.e. $y \in Y$ に対し, 作用 $\Gamma \curvearrowright (X_y, \mu_y)$ は保測かつエルゴード的である;

(iii) (Z, η) を標準確率空間, $\rho\colon X \to Z$ を $\rho_*\mu = \eta$ なる Borel 写像とし, $\mu = \int_Z \tilde{\mu}_z d\eta(z)$ を μ の η 上の測度分解とする. ρ は $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ に関して, (i) のように不変であって, η-a.e. $z \in Z$ について, 作用 $\Gamma \curvearrowright (\rho^{-1}(z), \tilde{\mu}_z)$ はエルゴード的であるとする. このとき, Borel 写像 $\phi\colon Z \to Y$ で, η-a.e. $z \in Z$ に対し $\mu_{\phi(z)} = \tilde{\mu}_z$ なるものが存在する.

この $\pi\colon (X, \mu) \to (Y, \nu)$ を作用 $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ に関する**エルゴード分解** (**ergodic decomposition**) という. (iii) はエルゴード分解の一意性を示しており, これを用いると, (Y, ν) の確率空間としての同型類は, 作用 $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ の共役不変量であることが証明される. 次の補題は容易に示すことができる.

補題 4.2. (X, μ), (Y, ν) を標準確率空間, $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ を離散群 Γ のエルゴード的保測作用とする. Γ の保測作用 $\Gamma \curvearrowright (X \times Y, \mu \times \nu)$ を

$$\gamma(x, y) = (\gamma x, y), \quad \gamma \in \Gamma,\ x \in X,\ y \in Y$$

で定義する. このとき, 射影 $X \times Y \to Y$ は作用 $\Gamma \curvearrowright (X \times Y, \mu \times \nu)$ に関するエルゴード分解である.

4.3 分類結果

M を $\kappa(M) = 3g + p - 4 > 0$, $M \neq M_{1,2}, M_{2,0}$ なる曲面, Γ を M の写像類群 $\Gamma(M)^\diamond$ の有限指数部分群とする. 次の集合 $V(M)$, $S(M)$ を定義する:

- $V(M) :=$ M 上の本質的な単純閉曲線のアイソトピー類全体. ここで, M 上の単純閉曲線が本質的であるとは, 一点や M の境界成分とアイソトピックにならないときをいう.

- $S(M) :=$ $V(M)$ の空でない有限部分集合で, M 上互いに交わらないように実現できるようなもの全体.

$V(M)$ を頂点集合, $S(M)$ を単体の集合とする単体複体 $C(M)$ が構成される. 写像類群 $\Gamma(M)^\diamond$ は, $C(M)$ 上単体複体の同型として作用している. この $C(M)$ は**カーブ複体** (**curve complex**) と呼ばれ, 写像類群の研究では重要な役割を果たす. 実際, 定理 3.1, 3.2 の証明でもこの単体複体は用いられているが, カーブ複体についてはこれ以上述べない.

定理 4.3 ([K3, Theorem 1.1])**.** 上の記号で, $\sigma, \tau \in S(M)$ をとり, それらが属する Γ の作用に関する軌道 $K = \Gamma\sigma$, $L = \Gamma\tau \subset S(M)$ を考える. Γ は K, L 上自然に作用することに注意する. (X_0, μ_0), (Y_0, ν_0) を非自明な標準確率空間とし, 一般化された Bernoulli 作用

$$\alpha_0 \colon \Gamma \curvearrowright (X_0, \mu_0)^K, \quad \beta_0 \colon \Gamma \curvearrowright (Y_0, \nu_0)^L$$

を考える. このとき, 次の 2 条件は同値である:

(i) α_0 と β_0 は共役である.

(ii) (X_0, μ_0) と (Y_0, ν_0) は確率空間として同型であって, ある $g \in \Gamma(M)^\diamond$ が存在して, $gK = L$, $g\Gamma g^{-1} = \Gamma$ が成り立つ.

注意 4.4. (a) 定理 4.3 で, (ii) から (i) が従うことは容易に示せる.

(b) 補題 4.1 と作用 $\Gamma(M)^\diamond \curvearrowright S(M)$ に関する基本的な事実を用いると, 定理 4.3 の α_0 と β_0 は共に e.f.m.p. であって, aperiodic でもあることが証明できる. よって, 定理 3.1 (ii) を用いると, 定理 4.3 における 2 条件 (i), (ii) は次の条件とも同値である: (iii) α_0 と β_0 は OE である.

(c) 非自明な標準確率空間は互いに非同型なものが連続濃度個存在するので, 上の (b) から, Γ の e.f.m.p. 作用で互いに OE でないものが連続濃度個存在することが従う.

以下で定理 4.3 の (i) $\Rightarrow$ (ii) の証明を与えるが, 簡単のため, $\sigma, \tau \in S(M)$ がそれぞれ 1 つの元から成るとき, つまり, $\sigma = \{\alpha\}$, $\beta = \{\beta\}$, $\alpha, \beta \in V(M)$ とかけるとして証明を与える. 各 $\delta \in V(M)$ に対し, その Γ における安定部分群を

$$\Gamma_\delta = \{\gamma \in \Gamma : \gamma\delta = \delta\}$$

と表すことにする. 次の補題は作用 $\Gamma(M)^\diamond \curvearrowright V(M)$ に関する基本的な事実を用いると証明できる.

補題 4.5. 任意の $\delta \in V(M)$ に対し, 作用 $\Gamma_\delta \curvearrowright V(M) \setminus \{\delta\}$ の各軌道は無限個の元から成る.

定理 4.3 の (i) $\Rightarrow$ (ii) の証明に移る. $K = \Gamma\alpha$, $L = \Gamma\beta \subset V(M)$ に対し, 2 つの作用

$$\alpha_0 \colon \Gamma \curvearrowright (X_0, \mu_0)^K, \quad \beta_0 \colon \Gamma \curvearrowright (Y_0, \nu_0)^L$$

が共役であると仮定する. つまり, 同型写像 $f \colon (X_0, \mu_0)^K \xrightarrow{\simeq} (Y_0, \nu_0)^L$ と同型 $F \colon \Gamma \xrightarrow{\simeq} \Gamma$ で,

$$f(\gamma x) = F(\gamma) f(x), \quad \forall \gamma \in \Gamma,\ \mu_0^K\text{-a.e. } x \in X_0^K$$

となるものが存在するとする. Ivanov による写像類群の自己同型に関する定理 ([Iv, Theorem 8.5.A]) から, $g \in \Gamma(M)^\diamond$ で,

$$F(\gamma) = g\gamma g^{-1}, \quad \forall \gamma \in \Gamma$$

なるものが唯一存在する. $F(\Gamma_\alpha) = \Gamma_{g\alpha}$ であることに注意する.

主張 1. $g\alpha \in L$ である. (これより, $\Gamma = F(\Gamma) = g\Gamma g^{-1}$ であることを用いると, $gK = L$ がわかる.)

証明. $g\alpha \notin L$ とする. 作用 $\Gamma_{g\alpha} \curvearrowright L$ の全ての軌道は無限個の元から成る (補題 4.5) から, 作用 $\Gamma_{g\alpha} \curvearrowright (Y_0, \nu_0)^L$ はエルゴード的である (補題 4.1 (i)). 一方, 作用 $\Gamma_\alpha \curvearrowright (X_0, \mu_0)^K$ はエルゴード的ではない. なぜならば, Borel 部分集合 $A \subset X_0$ で, $0 < \mu_0(A) < 1$ なるものをとると,

$$\{(x_k)_{k \in K} \in X_0^K : x_\alpha \in A\}$$

は Γ_α の作用で不変で, その測度は $\mu_0(A)$ と一致する. これは, f と F を通して, 2 つの作用 $\Gamma_\alpha \curvearrowright (X_0, \mu_0)^K$, $\Gamma_{g\alpha} \curvearrowright (Y_0, \nu_0)^L$ が共役になることに反する. $\square$

主張 2.

- 作用 $\Gamma_\alpha \curvearrowright (X_0, \mu_0)^K$ に関して, 射影

$$(X_0, \mu_0)^K \to (X_0, \mu_0), \quad (x_k)_{k \in K} \mapsto x_\alpha$$

  はエルゴード分解を与える.

- 作用 $\Gamma_{g\alpha} \curvearrowright (Y_0, \nu_0)^L$ に関して, 射影

$$(Y_0, \nu_0)^L \to (Y_0, \nu_0), \quad (y_l)_{l \in L} \mapsto y_{g\alpha}$$

  はエルゴード分解を与える.

補題 4.1 (i) と補題 4.5 より, 作用 $\Gamma_\alpha \curvearrowright (X_0, \mu_0)^{K \setminus \{\alpha\}}$ がエルゴード的であることがわかるので, $(X_0, \mu_0)^K \simeq (X_0, \mu_0)^{K \setminus \{\alpha\}} \times (X_0, \mu_0)$ と分解して, 補題 4.2 を適用することで主張 2 は示せる. エルゴード分解の一意性を用いると, (X_0, μ_0) と (Y_0, ν_0) が確率空間として同型であることがわかる. これで, 定理 4.3 の (i) $\Rightarrow$ (ii) が証明された.

参考文献

[F1] A. Furman, Orbit equivalence rigidity, *Ann. of Math. (2)* **150** (1999), 1083–1108.

[F2] A. Furman, On Popa's cocycle superrigidity theorem, *Int. Math. Res. Not. IMRN* **2007**, no. 19, Art. ID rnm073, 46 pp.

[Ga] D. Gaboriau, On orbit equivalence of measure preserving actions, in *Rigidity in dynamics and geometry* (Cambridge, 2000), 167–186, Springer, Berlin, 2002.

[Gl] E. Glasner, *Ergodic theory via joinings*, Math. Surveys Monogr., 101. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[Io] A. Ioana, Cocycle superrigidity for profinite actions of weakly rigid groups, preprint.

[Iv] N. V. Ivanov, Mapping class groups, in *Handbook of geometric topology*, 523–633, North-Holland, Amsterdam, 2002.

[Ke] A. S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Grad. Texts in Math., 156. Springer-Verlag, New York, 1995.

[K1] Y. Kida, Measure equivalence rigidity of the mapping class groups, preprint, to appear in *Ann. of Math.*

[K2] Y. Kida, Orbit equivalence rigidity for ergodic actions of the mapping class group, *Geom. Dedicata* **131** (2008), 99–109.

[K3] Y. Kida, Classification of certain generalized Bernoulli actions of mapping class groups, preprint.

[K4] Y. Kida, Introduction to measurable rigidity of mapping class groups, preprint, to appear in *Handbook of Teichmüller theory* (A. Papadopoulos, ed.), Volume II.

[木 1] 木田 良才, Measurable rigidity for mapping class groups, 2007 年度第 54 回幾何学シンポジウム, アブストラクト.

[木 2] 木田 良才, Orbit equivalence and measurable group theory, 2008 年度日本数学会年会, 幾何学分科会特別講演アブストラクト.

[MS] N. Monod and Y. Shalom, Orbit equivalence rigidity and bounded cohomology, *Ann. of Math. (2)* **164** (2006), 825–878.

[P1] S. Popa, Cocycle and orbit equivalence superrigidity for malleable actions of w-rigid groups, *Invent. Math.* **170** (2007), 243–295.

[P2] S. Popa, On the superrigidity of malleable actions with spectral gap, preprint, to appear in *J. Amer. Math. Soc.*

[PV] S. Popa and S. Vaes, Strong rigidity of generalized Bernoulli actions and computations of their symmetry groups, *Adv. Math.* **217** (2008), 833–872.

[S] Y. Shalom, Measurable group theory, in *European Congress of Mathematics*, 391–423, Eur. Math. Soc., Zürich, 2005.

[Z] R. J. Zimmer, *Ergodic theory and semisimple groups*, Monogr. Math., 81. Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.