線型方程式の練習

簡単な線型方程式の練習をしよう。

最初に、微分方程式

$$(1) \qquad \begin{cases} x'(t) = & -7x(t) + 18y(t) + 2e^t \\ y'(t) = & -3x(t) + 8y(t) + e^t \end{cases}$$

をみたす解 $(x(t), y(t))$ をすべて求める。まず、行列 $\begin{pmatrix} -7 & 18 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求める。固有多項式は $\det \begin{pmatrix} \lambda+7 & -18 \\ 3 & \lambda-8 \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda-2)(\lambda+1)$ だから、固有値は 2 と -1 である。とくに対角化可能である。行列 $\begin{pmatrix} \lambda+7 & -18 \\ 3 & \lambda-8 \end{pmatrix}$ の λ に固有値を代入すると、固有 vector がわかる。この場合は、固有値 2 に属する固有 vector として $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれ、固有値 -1 に属する固有 vector として $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる。したがって、2 次元 vector に値をもつ未知函数 $u(t)$ についての斉次方程式

$$(1a) \qquad u'(t) = \begin{pmatrix} -7 & 18 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} u(t)$$

の解は $u(t) = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, ただし C_1 および C_2 は定数, という形をしている。また、定数 C_1 および C_2 は函数 $u(t)$ から一意的に定まる。

次に、特解をもとめる。1 は固有値ではない。とくに $I - \begin{pmatrix} -7 & 18 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -18 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$ の逆行列は $-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -7 & 18 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$ である。$-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -7 & 18 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ だから $e^t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ が特解である。以上により、方程式 (1) の解は次の形で与えられる

$$\begin{cases} x(t) & = 2C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{-t} - 2e^t \\ y(t) & = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} - e^t. \end{cases}$$

ここで定数 C_1 および C_2 は函数 $x(t)$ と $y(t)$ から一意的に定まる。

次に、微分方程式

$$(2) \qquad \begin{cases} x'(t) = & -7x(t) + 2y(t) + 2 \\ y'(t) = & -15x(t) + 4y(t) + 3e^t \end{cases}$$

をみたす解 $(x(t), y(t))$ をすべて求める。ここでも最初に、行列 $\begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -15 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値と固有 vector を求める。固有多項式は $(\lambda+2)(\lambda+1)$ だから、固有値は -2 と -1 である。とくに対角化可能である。固有値 -2 に属する固有 vector として $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ がとれ、固有値 -1

に属する固有 vector として $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ がとれる。したがって、2 次元 vector に値をもつ未知函数 $u(t)$ についての斉次方程式

$$u'(t) = \begin{pmatrix}-7 & 2\\-15 & 4\end{pmatrix} u(t) \tag{2a}$$

の解は $u(t) = C_1 e^{-2t}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, ただし C_1 および C_2 は定数, という形をしている。また、定数 C_1 および C_2 は函数 $u(t)$ から一意的に定まる。

次に特解をもとめる。2 次元 vector に値をもつ未知函数 $v_1(t)$ および $v_2(t)$ についての方程式

$$v_1{}'(t) - \begin{pmatrix}-7 & 2\\-15 & 4\end{pmatrix} v_1(t) = e^{0t}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \tag{2b}$$

および

$$v_2{}'(t) - \begin{pmatrix}-7 & 2\\-15 & 4\end{pmatrix} v_2(t) = e^{t}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} \tag{2c}$$

の解 $v_1(t)$ および $v_2(t)$ が分かれば、最初の方程式の解は (2a) の解 $u(t)$ と $v_1(t)$ および $v_2(t)$ の和 $u(t)+v_1(t)+v_2(t)$ として与えられる。いま、0 および 1 は固有値ではない。そこで特解として $v_1(t) = \begin{pmatrix}7 & -2\\15 & -4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-15\end{pmatrix}$ および $v_2(t) = e^t\begin{pmatrix}6 & -2\\15 & -3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ がとれる。以上により、方程式 (2) の解は次の形で与えられる

$$\begin{cases} x(t) & = 2C_1e^{2t} + C_2e^{-t} - 4 + e^t \\ y(t) & = 5C_1e^{2t} + 3C_2e^{-t} - 15 + 4e^t. \end{cases}$$

ここで定数 C_1 および C_2 は函数 $x(t)$ と $y(t)$ から一意的に定まる。

最後に、対角化できない行列に伴う微分方程式

$$\begin{cases} x'(t) = & -x(t) + 4y(t) + e^{2t} \\ y'(t) = & -x(t) + 3y(t) \end{cases} \tag{3}$$

をみたす解 $(x(t), y(t))$ をすべて求める。

行列 $\begin{pmatrix}-1 & 4\\-1 & 3\end{pmatrix}$ を A とおく。A の固有多項式は $(\lambda-1)^1$ であって 1 を重根をもつ。A は対角行列ではないから、対角化可能ではない。行列 $\begin{pmatrix}\lambda+1 & -4\\1 & \lambda-3\end{pmatrix}$ に $\lambda = 1$ を代入すると $\begin{pmatrix}2 & -4\\1 & -2\end{pmatrix}$ となるから $w_1 := \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ は固有 vector である。他方、w_1 と一次独立な固有 vector はとれない。$w_2 := \begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ とおくと $Aw_2 = w_1 + w_2$ となる。このとき、斉次方程式

$$u'(t) = Au(t) \tag{2a}$$

の一次独立な解として、$e^t w_1 = e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $e^t w_2 + te^t w_1 = e^t \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} + te^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる。

さて、特解については対角化可能な場合と同じである。2 は A の固有値ではないから、$2I - A$ は逆行列 $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ をもつ。したがって $e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ が特解となる。以上により、方程式 (3) の解は次の形で与えられる

$$\begin{cases} x(t) & = 2C_1 e^t + C_2(-3+2t)e^t - e^{2t} \\ y(t) & = C_1 e^t + C_2(-1+t)e^t - e^{2t}. \end{cases}$$

ここで定数 C_1 および C_2 は函数 $x(t)$ と $y(t)$ から一意的に定まる。

2013 年 6 月 9 日, 河澄作成.