Riccati 方程式の練習

Riccati 方程式の練習をしよう。ここではすべて

$$x(t) = at + b, \quad a, b: \text{定数},$$

という形の特解があるものを考える。

最初に、次の方程式を解く。

$$\frac{dx}{dt} + 2t^2(t+1) - 1 - 2t(2t+1)x + 2tx^2 = 0 \tag{1}$$

$x(t) = at + b$ を方程式 (1) に代入して、定数 a, b を解くと、$x(t) = t$ および $t+1$ が解であることが分かる。(この部分の計算は省略する。)

そこで特解として $y(t) = t$ を用いる。(もちろん $y(t) = t+1$ を使ってもよいが、そちらの解き方も省略する。) 方程式 (1) の解 $x(t)$ について $z(t) = x(t) - t$ とおく。$x(t) = z(t) + t$ を方程式に代入すると

$$\frac{dz}{dt} - 2tz + 2tz^2 = 0 \tag{1a}$$

となる。これは Bernoulli 方程式であるから、両辺を z^2 で割る。(ここで、方程式 (1a) は $z(t) = 0$ を解にもつ一階の方程式である。そこで、常微分方程式の初期値問題の解の一意性から、ある点 $t = t_0$ で $z(t_0) = 0$ を充たせば、すべての t について $z(t) = 0$ となる。つまり、0 以外の解は、つねに $z(t) \neq 0$ である。したがって z^2 で割り算をしても厳密性は失われないのである。) すると方程式 (1a) は

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{z}\right) - 2t\frac{1}{z} + 2t = 0 \tag{1b}$$

となる。したがって

$$\frac{d}{dt}\left(e^{t^2}\frac{1}{z}\right) = 2te^{t^2} = \frac{d}{dt}(e^{t^2})$$

となり、定数 C について $e^{t^2}\frac{1}{z} = e^{t^2} + C$ つまり $z = \frac{1}{1+Ce^{-t^2}}$ となる。以上により

$$x(t) = t + \frac{1}{1+Ce^{-t^2}}, \quad (C\text{: 定数}),$$

となる。ここで $C = 0$ ならば、先ほど求めたもう一つの特解 $t+1$ が出てくることに注意する。他方、$C \to \infty$ とすると、特解 t が得られる。また、$C < -1$ のとき、有限の時間で解が発散することにも注意する。

次に、1 年生の積分の復習を兼ねて、次の方程式を解いてみる。

$$(t^2+1)\frac{dx}{dt} - 1 - 3tx + 2x^2 = 0 \tag{2}$$

まず、$x(t) = at + b$, a, b: 定数, を代入してみる。a と b の方程式になおるが、$a = 1$ かつ $b = 0$ だけが解であることがわかる。とくに特解として $y(t) = t$ が得られる。方程式 (1) の解 $x(t)$ について $z(t) = x(t) - t$ とおく。$x(t) = z(t) + t$ を方程式に代入すると

$$(t^2+1)\frac{dz}{dt} + tz + 2z^2 = 0 \tag{2a}$$

となる。これは Bernoulli 方程式であるから、両辺を $(t^2+1)z^2$ で割る。（この割り算が厳密性を損ねないのは方程式 (1) と同じ理由による。）方程式 (1a) は

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{z}\right)+\left(\frac{t}{1+t^2}\right)\frac{1}{z}+\frac{2}{1+t^2}=0 \tag{2b}$$

となる。いま、

$$\exp(-\int\frac{t}{1+t^2}dt)=\exp(-\frac{1}{2}\log(1+t^2)+C')=e^{C'}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

（C' は定数）だから $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{z}$ を考えればよい。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{z}\right)=2\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^3$$

となる。$t=\tan\theta$ という変数変換によって

$$\int 2(1+t^2)^{-3/2}dt=\int 2\cos\theta\,d\theta=2\sin\theta+C=\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}+C$$

（C は定数）と不定積分できる。したがって

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{z}=\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}+C$$

となって、これを整理して

$$z=\frac{1}{2t+C\sqrt{1+t^2}}$$

したがって

$$x=t+\frac{1}{2t+C\sqrt{1+t^2}}$$

と一般解が求まる。$C\to\infty$ とすると特解 t が得られる。$-2<C<2$ のときは、有限の時間で解が発散することにも注意する。

最後に、次の Riccati 方程式を解く

$$(t+1)\frac{dx}{dt}-2t(t+1)^2-x+2tx^2=0. \tag{3}$$

$t=-1$ に特異点がある。面倒なので大雑把に解くことにする。まず、$at+b$, a,b: 定数, という形の解は $t+1$ と $-t-1$ の二つである。そこで $x=z+t+1$ を (3) に代入する。z についての Bernoulli 方程式

$$(t+1)\frac{dz}{dt}+(4t^2+4t-1)z+2tz^2=0$$

が得られる。いつものように $(t+1)z$ で割り算して

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{z}\right)+(4t-\frac{1}{t+1})\frac{1}{z}+\frac{2t}{t+1}=0$$

が得られる。いま

$$\exp(\int (4t - \frac{1}{t+1})dt) = \exp(2t^2 - \log(t+1) + C') = e^{C'} e^{2t^2} \frac{1}{t+1}$$

（C' は定数）だから $\frac{d}{dt}\left((t+1)e^{-2t^2}\right) = e^{-2t^2}(1 - 4t(t+1))$ に注意すると

$$\frac{d}{dt}\left((t+1)e^{-2t^2}\frac{1}{z}\right) = 2te^{-2t^2} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}e^{-2t^2}\right)$$

つまり、ある定数 C について

$$(t+1)e^{-2t^2}\frac{1}{z} = -\frac{1}{2}e^{-2t^2} + C$$

となる。これを整理して

$$x = t + 1 + \frac{t+1}{-\frac{1}{2} + Ce^{2t^2}}$$

が得られる。

2013 年 5 月 12 日, 河澄作成.