§8. Goldman Lie 代数の中心について

$\mathfrak{g}$: Lie algebra

$Z(\mathfrak{g}) := \{Z \in \mathfrak{g} ; {}^\forall X \in \mathfrak{g}, [X, Z] = 0\}$ center of $\mathfrak{g}$

S : connected oriented surface

$\hat{\pi} = \hat{\pi}(S) \overset{\text{def}}{=} [S^1, S] = \pi_1(S)/_{\text{conj}}$

$\mathbb{Q}\hat{\pi}$: Goldman Lie algebra

$1 \in \hat{\pi}$ the constant loop

$1 \in Z(\mathbb{Q}\hat{\pi})$

$Z(\mathbb{Q}\hat{\pi})$ を求めよう

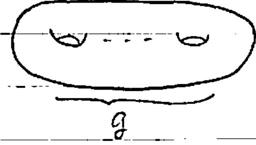
定理 8.1. (Goldman : Theorem 5.17 (i) p.299)

$\alpha, \beta \in \hat{\pi}$, α は SCC で代表されている

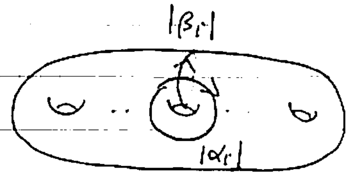
このとき

$[\alpha, \beta] = 0 \iff \alpha \cap \beta = \phi$ (free homotopy で動かして disjoint にできる)

((証明略) Weil Petersson geometry on the Teichmüller space)

系 8.2 $S = \Sigma_g =$  , $g \geqq 2$, のとき

$$\hat{\pi} \cap Z(\mathbb{Q}\hat{\pi}) = \{1\}$$



証明 $\beta \in \hat{\pi} \cap Z(\mathbb{Q}\hat{\pi})$ とする

$\alpha = (|\alpha_i|, |\beta_i|$ のひとつ$)$ について

Thm 8.1 により $\alpha \cap \beta = \phi$

S に双曲計量を入れて $|\alpha_i|, |\beta_i|, \beta$ をすべて測地線にとると

集合として

$$\beta \subset S \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{g} (|\alpha_i| \cup |\beta_i|)\right) \approx \mathring{D}^2 \simeq *$$

ゆえに $\beta = 1$ //

$Z(\mathbb{Q}\hat{\pi}) \overset{?}{=} \mathbb{Q}1$

__定理8.3__ (Etingof ; Chas-Sullivan 予想)

$S=\Sigma_g$ のとき $Z(\mathbb{Q}\hat{\pi})=\mathbb{Q}1$.

__証明のあらすじ__ $N \geq 1$

$M_N := \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), GL_N(\mathbb{C}))/GL_N(\mathbb{C})$ symplectic manifold

$C^\infty(M_N)$ Poisson bracket について Lie algebra

$Z(C^\infty(M_N)) = \mathbb{R}$ (constant function)

trace function による Lie alg. homom

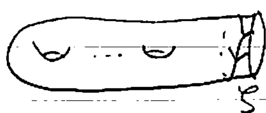
$$\mathbb{Q}\hat{\pi} \to C^\infty(M_N),\ \alpha \mapsto ([\phi] \mapsto \mathrm{trace}\,\phi(\alpha))$$

$(N \to \infty)$

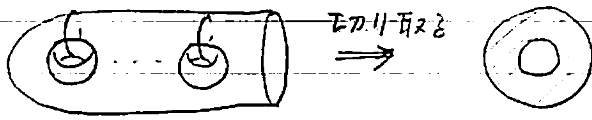
これらを使う //

(一般化された) Chas-Sullivan 予想

すべての曲面 S について $Z\mathbb{Q}\hat{\pi} = \mathbb{Q}(\hat{\pi} \cap Z\mathbb{Q}\hat{\pi})$ が成立つか?

$S = \Sigma_{g,1} =$  のとき

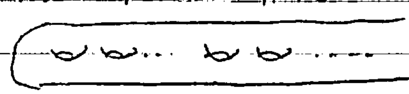
__系8.4__ $\hat{\pi} \cap Z(\mathbb{Q}\hat{\pi}) = \{|\zeta^n| ; n \in \mathbb{Z}\}$

(証明 

)

Chas-Sullivan 予想は $\Sigma_{g,1}$ について未解決

__ここでやること__ $g \to \infty$ としたときの limit を証明する

$\Sigma_{\infty,1} \overset{\mathrm{def}}{=} \varinjlim_{g \to \infty} \Sigma_{g,1} =$ 

__定理8.5.__ (Kuno-K.)

$$Z\mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma_{\infty,1}) = \mathbb{Q}1$$

Thm A (と Thm B を少し) 使う

まず $g \geq 1$ を fix して $S = \Sigma_{g,1}$ について

$$Z(\mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma_{g,1}))$$

をしらべる

$\pi = \pi_1(\Sigma_{g,1}, *)$, $* \in \partial\Sigma_{g,1}$

$H = H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbb{Q})$, ...

$\theta : \pi \to \hat{T}$ symplectic expansion

$\lambda_\theta : \mathbb{Q}\hat{\pi} \to N(\hat{T}_1) = \mathfrak{a}_g^-$, $u \mapsto \lambda_\theta(u) := N\theta(u)$

定理A(再)

(1) $-\lambda_\theta$: Lie algebra homom

(2) $\mathrm{Ker}\,\lambda_\theta = \mathbb{Q}1$

(3) $\mathrm{Image}\,\lambda_\theta \overset{\text{dense}}{\subset} \mathfrak{a}_g^-$

$$\mathbb{Q}\hat{\pi}(p) := \lambda_\theta^{-1} N(\hat{T}_p) = (N\theta)^{-1} N(\hat{T}_p), \quad p \geq 1$$

Lie subalgebra ($\because$ $N(\hat{T}_p) < N(\hat{T}_1) = \mathfrak{a}_g^-$ Lie subalgebra)

系8.6. (1) $\bigcap_{p=1}^{\infty} \mathbb{Q}\hat{\pi}(p) = \mathbb{Q}1$

(2) $Z(\mathbb{Q}\hat{\pi}) \subset \lambda_\theta^{-1} Z(\mathfrak{a}_g^-)$

証明 (1) $\bigcap_{p=1}^{\infty} N(\hat{T}_p) = 0$, $\mathrm{Ker}\,\lambda_\theta = \mathbb{Q}1$

(2) $\mathrm{Image}\,\lambda_\theta \overset{\text{dense}}{\subset} \mathfrak{a}_g^-$ //

補題8.7. θ': 別の(symplectic とは限らない) Magnus expansion

$$\mathbb{Q}\hat{\pi}(p) = (N\theta')^{-1} N(\hat{T}_p)$$

つまり $\mathbb{Q}\hat{\pi}(p)$ は θ のとり方によらない

証明のあらすじ 次の2つの事実を使う

① $\exists U : \hat{T} \to \hat{T}$ alg. isom s.t. $\theta' = U \circ \theta$, $U(\hat{T}_p) = \hat{T}_p$ ($\forall p \geq 1$) (cf. pf of Thm 5.1)

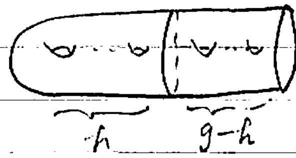
② $0 \to \mathbb{Q}1 + [\hat{T}, \hat{T}] \to \hat{T} \to N(\hat{T}_1) \to 0$ (exact) //

レポート問題8 $\mathbb{Q}\hat{\pi}(p) = |\mathbb{Q}1 + (I\pi)^p|$ を示せ —

(〆なし)

$1 \le h \le g$

$i_g^h : \Sigma_{h,1} \hookrightarrow \Sigma_{g,1}$ inclusion



$i_g^h : \mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma_{h,1}) \longrightarrow \mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma_{g,1})$ 単射準同型
要証明

系8.8 $(i_g^h)^{-1}\left(\mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma_{g,1})(p)\right) = \mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma_{h,1})(p)$

($\mathbb{Q}\hat{\pi}(p)$ に入るという性質は容れもの $\mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma_{h,1})$ によらない)

$\boxed{Z(\mathfrak{a}_g^-) \text{ を求めたい}}$

($\mathfrak{a}_g := N(\hat{T}_2) < \mathfrak{a}_g^-$ subalgebra)

degree 2 part に着目する

$\mathfrak{sp} = N(H^{\otimes 2}) < \mathfrak{a}_g^-$ だから

$Z(\mathfrak{a}_g^-) < (\mathfrak{a}_g^-)^{\mathfrak{sp}} = \mathfrak{a}_g^{\mathfrak{sp}}$ (∵ $H^{\mathfrak{sp}} = 0$)

ゆえに

$$Z(\mathfrak{a}_g^-) < Z(\mathfrak{a}_g^{\mathfrak{sp}})$$

現状: $Z(\mathfrak{a}_g^{\mathfrak{sp}})$ は未だ決定できていないが $Z(\text{"}\lim_{g\to\infty}\text{"}\,\mathfrak{a}_g)$ は分かった

$\text{"}\lim_{g\to\infty}\text{"}\,\mathfrak{a}_g^{\mathfrak{sp}}$ = the Lie algebra of oriented chord diagrams

$\mathfrak{a}_g^{\mathfrak{sp}} < \prod_{n=2}^{\infty} (H^{\otimes n})^{\mathfrak{sp}}$

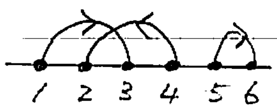
定理8.9 (Weyl)

$$(H^{\otimes n})^{\mathfrak{sp}} = \begin{cases} 0 & \text{if } n\text{: odd} \\ \text{spanned by "linear chord diagrams" of } n/2 \text{ chords} & \text{if } n\text{: even and } n \le 2g \end{cases}$$

$C = \{(i_1, j_1), \cdots, (i_m, j_m)\}$ labeled linear chord diagram
l.c.d.

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \{i_1, \cdots, i_m, j_1, \cdots, j_m\} = \{1, 2, \cdots, 2m\}$

(label = 各edge の向き)

(ex) 

$\{(1,3), (4,2), (5,6)\}$

$\mapsto a(C) := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2m-1 & 2m \\ i_1 & j_1 & \cdots & 2m & 1 \end{pmatrix} \omega^{\otimes m} \in (H^{\otimes 2m})^{Sp}$

ここで $\omega = \sum_{i=1}^{g} A_i B_i - B_i A_i \in H^{\otimes 2}$ symplectic form

$\{A_i, B_i\}_{i=1}^{g} \subset H$ symplectic basis

$\Big($ 例 $\sum_{i,j,k} A_i B_j B_i A_j (A_k B_k - B_k A_k) - B_i B_j A_i A_j (A_k B_k - B_k A_k)$
$- A_i A_j B_i B_j (A_k B_k - B_k A_k) + B_i A_j A_i B_j (A_k B_k - B_k A_k) \Big)$

$\mathcal{L}\mathcal{C}_m := \mathbb{Q}\{$labeled l.c.d. of m chords$\}/\sim$

ただし  $\sim -$ 

$a : \mathcal{L}\mathcal{C}_m \xrightarrow{\cong} (H^{\otimes 2m})^{Sp}$ isomorphism if $m \leq g$ 「安定同型」
(∵ Thm 8.9)

$\nu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2m-1 & 2m \\ 2 & 3 & & 2m & 1 \end{pmatrix} \curvearrowright \mathcal{L}\mathcal{C}_m$

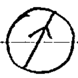
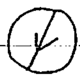
$C = \{(i_1, j_1), \cdots, (i_m, j_m)\} \mapsto \nu C = \{(\nu i_1, \nu j_1), \cdots, (\nu i_m, \nu j_m)\}$

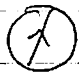
$\langle \nu \rangle \cong \mathbb{Z}/2m$

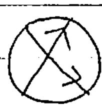
labeled chord diagram $\overset{\text{def}}{=} \langle \nu \rangle$-orbit of a labeled l.c.d.

$N(a(C)) = \sum_{k=0}^{2m-1} a(\nu^k C) \in N(\hat{T}_1) = \mathfrak{a}_g^-$

$\mathcal{C} := \bigoplus_{m=1}^{\infty} \mathcal{C}_m, \quad \mathcal{C}_m := \mathcal{L}\mathcal{C}_m^{\langle \nu \rangle}$ the Lie algebra of oriented chord diagrams

例1  $\underset{}{\overset{\text{回転}}{=}}$  $= -$ 

ゆえに  $= 0 \in \mathcal{C}_1$. とくに $\mathcal{C}_1 = 0$

例2  $\underset{\text{回転}}{=}$  $= -$ 

ゆえに  $= 0 \in \mathcal{C}_2$

$a : \mathcal{C} \to \mathfrak{a}_g^{Sp}$ 「安定同型」

$\mathfrak{a}_g^{Sp}$ の Lie bracket が $\mathcal{C}$ に遺伝する

No.

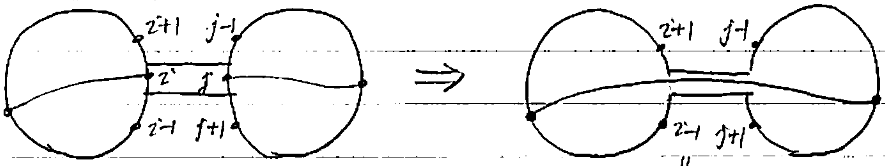
Date

計算によって次がわかる

補題8.10 D (resp. D′) : labeled chord diagram of m (resp. n) chords

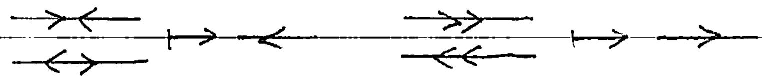
$$[a(D), a(D')] = \sum_{i=1}^{2m} \sum_{j=1}^{2m} a(\mathscr{D}(D,i,D',j)) \in \mathfrak{a}_g^-$$

ここで



$\| \; \mathscr{D}(D,i,D',j)$

向きは次で定める



レポート問題9 補題8.10を示せ.

$\mathscr{C}$ 上の bracket を

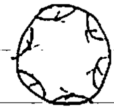
$$[D, D'] := \sum_{i=1}^{2m} \sum_{j=1}^{2n} \mathscr{D}(D,i,D',j) \in \mathscr{C}_{m+n-1}$$

と定義すれば

$\mathscr{C}$: Lie代数

$a : \mathscr{C} \longrightarrow \mathfrak{a}_g^{sp}$ Lie代数の安定同型

となる. 中心は次の通り

定理8.11 $Z(\mathscr{C}) = \bigoplus_{m=2}^{\infty} \mathbb{Q}\Omega_m$ (ただし $\Omega_m =$  $\in \mathscr{C}_m$)

(証明略; arXiv:1009.4985 v2)

議論を精密にして次がえられる

系8.12 $m(g) := \left[\frac{g-1}{4}\right] + 1$ について

$\forall u \in Z(\mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma_{g,1})) \; \exists f(s) \in \mathbb{Q}[s] \subset \mathbb{Q}\pi$

s.t. $u \equiv |f(s)| \mod \mathbb{Q}\hat{\pi}(m(g))$

($\Sigma_{g,1}$ についての Chas-Sullivan 予想の状況証拠とも考えられる)

背理法で定理8.5 $Z(\mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma_{\infty,1}))=\mathbb{Q}1$ を証明する

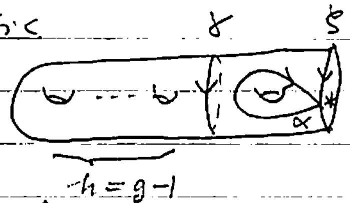
$\exists u\in Z(\mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma_{\infty,1}))\setminus\mathbb{Q}1$ と仮定して矛盾を導く

$\exists g_0\geq 1,\ u\in\mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma_{g_0,1})$

$\exists p\geq 2,\ u\in\mathbb{Q}\hat{\pi}(p-1)\setminus\mathbb{Q}\hat{\pi}(p)$ $\left(\because u\notin\mathbb{Q}1=\bigcap_{p=1}^{\infty}\mathbb{Q}\hat{\pi}(p)\right)$

$h(\geq g_0)$ を $2m(h)\geq p$ となるようにとる

$g:=h+1$ とおく

$\Sigma_{g,1}=$  $\alpha\in\pi_1(\Sigma_{g,1},*)$, $*\in\partial\Sigma_{g,1}$

$\theta:\pi_1(\Sigma_{g,1})\to\hat{T}$ symplectic expansion

① $u\in Z\mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma_{g,1})$

$\Downarrow$ Cor 8.12

$\exists f_g(\xi)\in\mathbb{Q}[\xi]$ s.t. $u\equiv|f_g(\xi)|\ \mathrm{mod}\ \mathbb{Q}\hat{\pi}(p)$

$$N\theta(f_g(\xi))\equiv N\theta(u)\not\equiv 0\ \mathrm{mod}\ N(\hat{T}_p)$$

$$\begin{array}{c}|||\end{array}$$

$$N\theta_{p-1}(f_g(\xi))=C\,N(\omega^{(p-1)/2})\quad(0\neq\exists C\in\mathbb{Q})$$

$\theta(\alpha)=1+A+\text{higher terms}\in\hat{T}$, $A:=[\alpha]$

$$\underset{\notin\hat{T}_{p-1}}{(N\theta(f_g(\xi)))\theta(\alpha)}=\frac{1}{2}(p-1)C\{\underset{\neq 0}{\omega^{(p-3)/2}A-A\omega^{(p-3)/2}}\}+\text{higher terms}$$

② $u\in Z\mathbb{Q}\hat{\pi}(\Sigma_{h,1})$

$\Downarrow$ Cor 8.12

$\exists f_h(\gamma)\in\mathbb{Q}[\gamma]$ s.t. $u\equiv|f_h(\gamma)|\ \mathrm{mod}\ \mathbb{Q}\hat{\pi}(p)$

$\gamma\cap\alpha=\phi$, 定理Bにより

$$(N\theta(f_h(\xi)))\theta(\alpha)=0$$

他方 $|f_g(\xi)|\equiv u\equiv|f_h(\gamma)|\ \mathrm{mod}\ \mathbb{Q}\hat{\pi}(p)$

ゆえに

$$\underset{①\ \notin\hat{T}_{p-1}}{(N\theta(f_g(\xi)))\theta(\alpha)}\equiv\underset{②\ =0}{(N\theta(f_h(\gamma)))\theta(\alpha)}\ \mathrm{mod}\ \hat{T}_{p-1}$$

これは矛盾。

定理8.5が示された //

No.

Date