(作成 10/11/05)

§7. The logarithms of Dehn twists

Dehn twist t_C の $\hat{T}$ $(\cong \widehat{\mathbb{Q}\pi})$ 上の作用つまり $T^\theta(t_C)$ を記述する.

$g \geq 1$, $\Sigma = \Sigma_{g,1}$, $* \in \partial\Sigma$

$\pi = \pi_1(\Sigma, *)$, $H = H_1(\Sigma; \mathbb{Q})$, ...

unoriented loop の不変量 $L^\theta(x)$

$\theta : \pi \to \hat{T}$ symplectic expansion

$\ell = \ell^\theta := \log\theta : \pi \to \hat{\mathcal{L}}$

$x \in \pi$

$$\ell(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \ell_p(x), \quad \ell_p(x) \in \mathcal{L}_p, \quad \ell_1(x) = [x]$$

$$L(x) = L^\theta(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2} N(\ell(x)\ell(x)) = \lambda_\theta\left(\frac{1}{2}(\log x)^2\right) \in N(\hat{T}_1) = \mathfrak{a}_g^-$$

$\left(\frac{1}{2}(\log x)^2 = \int \frac{1}{x}\log x \, dx \right.$, $\frac{1}{2}(\log x)^2$ がでてくる理由$\Big)$

$$L(x) = \sum_{m=2}^{\infty} L_m(x), \quad L_m(x) \in N(H^{\otimes m})$$

$$L_m(x) = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{m-1} N(\ell_p(x)\,\ell_{m-p}(x))$$

$\ell_1(x), \cdots, \ell_{m-1}(x)$ で決まる. つまり $\theta \bmod \hat{T}_m$ で決まる.

Thm 5.4 より

$$L_m : N_{m-1} = \pi/\Gamma_m \to N(H^{\otimes m})$$

とくに $m=2$ のとき $X = [x]$ とおくと

$$L_2 = L_2(x) = X^2$$

$$L_2(Z) = X^2(Z) = (Z \cdot X)X \quad (\forall Z \in H)$$

$$L_2^2(Z) = X^2((Z\cdot X)X) = (Z\cdot X)(X \cdot X)X = 0$$

補題 7.1. $x, y \in \pi$

(1) $L(xyx^{-1}) = L(y)$

(2) $L(x^{-1}) = L(x)$

したがって L は Σ 上の unoriented (free) loop の不変量である

証明 (1) $N(uv) = N(vu) \quad \forall u, \forall v \in \hat{T}$

$$\ell(xyx^{-1}) = \log(\theta(x)\theta(y)\theta(x)^{-1})$$
$$= \theta(x)(\log\theta(y))\theta(x)^{-1} \quad (\because\ \theta(x)\text{の共役は代数準同型})$$
$$= \theta(x)\ell(y)\theta(x)^{-1}$$
$$L(xyx^{-1}) = \frac{1}{2}N(\theta(x)\ell(y)\theta(x)^{-1}\theta(x)\ell(y)\theta(x)^{-1})$$
$$\cancel{= \frac{1}{2}N(\theta(x)\ell(y)\ell(y)\theta(x)^{-1}) = \frac{1}{2}N(\theta(x)^{-1}\theta(x)\ell(y)\ell(y))}$$
$$= \frac{1}{2}N(\ell(y)\ell(y)) = L(y)$$

(2) $\ell(x^{-1}) = \log(\theta(x)^{-1}) = -\log\theta(x) = -\ell(x)$

$$L(x^{-1}) = \frac{1}{2}N(-\ell(x))(-\ell(x)) = L(x) \quad //$$

とくに $C \subset \Sigma$, SCC について
$$L(C) = L^\theta(C) \in \mathfrak{a}_g^- = \mathrm{Der}_\omega(\hat{T})$$
が定義できる。

定理 7.2 (The logarithms of Dehn twists; Kuno-K.)

$\theta: \pi \to \hat{T}$ symplectic expansion

$C \subset \Sigma$ SCC

$$\Rightarrow e^{-L^\theta(C)} = T^\theta(t_C) \text{ on } \hat{T} \ (\overset{\theta}{\cong} \widehat{\mathbb{Q}\pi})$$

ただし $T^\theta: \mathcal{M}_{g,1} \to \mathrm{Aut}(\hat{T})$ the total Johnson map

$t_C \in \mathcal{M}_{g,1}$ the right handed Dehn twist along C

$$e^{-L^\theta(C)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} L^\theta(C)^k$$

つまり $-L^\theta(C)$ こそが Dehn twist t_C の logarithm である

(注) θ が symplectic でないとき、この公式は成り立たない

例 $L^\theta(C) = \sum_{m=2}^{\infty} L_m$, $Z \in H$, $m \geq 3 \Rightarrow L_m Z \in \hat{T}_2$

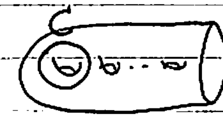
mod $\hat{T}_2$ で計算すると
$$e^{-L^\theta(C)} Z \equiv e^{-L_2} Z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} L_2^k Z = (1 - L_2) Z$$
$$\equiv Z - (Z \cdot [C])[C]$$

transvection, Prop 1.13 と match している

証明 場合分け (I) non-separating case (II) separating case

(I) $C \subset \Sigma$ separating の場合

$\exists \{\alpha_1, \cdots, \alpha_g, \beta_1, \cdots, \beta_g\} \subset \pi$ symplectic generator



s.t. $|\alpha_1| = C$ (∵ Prop 1.9)

$\theta(\alpha_i), \theta(\beta_i)$ 上で $C = |\alpha_1|$ について等式が成り立つことを言えばよい (∵ Cor 5.3)

$i \geq 2$ のとき $|\alpha_1| \cap \beta_i = \phi$ だから

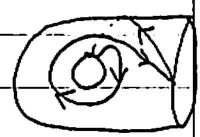
$T^\theta(t_C)\theta(\beta_i) = \theta(t_C\beta_i) = \theta(\beta_i)$

$L^\theta(C)\theta(\beta_i) = 0$ (∵ Cor 6.3) 一致している

$e^{-L^\theta(C)}\theta(\beta_i) = \theta(\beta_i)$

$\theta(\alpha_i)$, $i \geq 1$, についても同様 (∵ $|\alpha_1| \cap \alpha_i = \phi$)

β_1 を考える



$t_C(\beta_1) = \beta_1\alpha_1$ (右図)

$T^\theta(t_C)\theta(\beta_1) = \theta(\beta_1)\theta(\alpha_1)$

他方 $L^\theta(\alpha_1)\theta(\beta_1)$ を計算する

$\sigma(|\alpha_1^n|)(\beta_1) = n\beta_1\alpha_1^n$ (Lem 3.5)

$f(x)$: $x-1$ についての形式的巾級数 について

$\sigma(|f(\alpha_1)|)(\beta_1) = \beta_1\alpha_1 f'(\alpha_1)$

$f(x) = \frac{1}{2}(\log x)^2$ ならば $xf'(x) = \log x$

$L^\theta(\alpha_1)\theta(\beta_1) = -\theta(\beta_1)\log\theta(\alpha_1)$ (∵ Thm B)

$= -\theta(\beta_1)\ell(\alpha_1)$

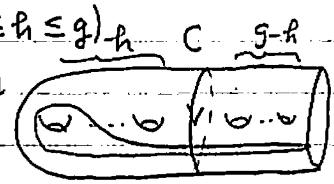
$L^\theta(\alpha_1)^k\theta(\beta_1) = \theta(\beta_1)(-\ell(\alpha_1))^k$ (∵ $L^k(\alpha_1)\ell(\alpha_1) = 0$)

$$e^{-L^\theta(\alpha_1)}\theta(\beta_1) = \sum \frac{(-1)^k}{k!} L^\theta(\alpha_1)^k\theta(\beta_1) = \sum \frac{1}{k!}\theta(\beta_1)\ell(\alpha_1)^k$$

$$= \theta(\beta_1)\theta(\alpha_1) = T^\theta(t_C)\theta(\beta_1)$$

以上で (I) が示された //(I)

(II) $\Sigma \setminus \mathring{N}(C) = \Sigma_{h,1} \sqcup \Sigma_{g-h,2}$, $(0 \leq h \leq g)$



$\exists \{\alpha_1, \cdots, \alpha_g, \beta_1, \cdots, \beta_g\} \subset \pi$ sympl. generator

s.t. $C = |\gamma_h|$, $\gamma_h = \prod_{i=1}^{h} [\alpha_i, \beta_i]$

(∵ Prop 1.9)

No.

Date

$\gamma_h = \gamma$ とかく

$$t_C(\alpha_i) = \begin{cases} \gamma^{-1}\alpha_i\gamma & (i \leq h) \\ \alpha_i & (h+1 \leq i) \end{cases}$$

$$t_C(\beta_i) = \begin{cases} \gamma^{-1}\beta_i\gamma & (i \leq h) \\ \beta_i & (h+1 \leq i) \end{cases}$$

$h+1 \leq i$ のとき, $\theta(\alpha_i), \theta(\beta_i)$ の上で等式は明らか

$i \leq h$ とする.

$$\sigma(|\gamma^n|)(\alpha_i) = -n\gamma^n\alpha_i + n\alpha_i\gamma^n$$

$f(x)$: $x-1$ についての形式的巾級数

$$\sigma(|f(\gamma)|)(\alpha_i) = -\gamma f'(\gamma)\alpha_i + \alpha_i\gamma f'(\gamma)$$

$f(x) = \frac{1}{2}(\log x)^2$ については

$$= -(\log\gamma)\alpha_i + \alpha_i(\log\gamma)$$

Thm B を使うと

$$-L^\theta(C)\,\theta(\alpha_i) = -\ell(\gamma)\theta(\alpha_i) + \theta(\alpha_i)\ell(\gamma)$$
$$= [-\ell(\gamma), \theta(\alpha_i)] = \mathrm{ad}(-\ell(\gamma))\,\theta(\alpha_i)$$
$$(-L^\theta(C))^k\,\theta(\alpha_i) = \mathrm{ad}(-\ell(\gamma))^k\,\theta(\alpha_i)$$
$$e^{-L^\theta(C)}\theta(\alpha_i) = e^{\mathrm{ad}(-\ell(\gamma))}(\theta(\alpha_i)) = e^{-\ell(\gamma)}\theta(\alpha_i)e^{\ell(\gamma)}$$
$$= \theta(\gamma)^{-1}\theta(\alpha_i)\theta(\gamma) = T^\theta(t_C)\,\theta(\alpha_i)$$

$\theta(\beta_i)$ についても同様 // (III) // Thm 7.2

$L_m : N_{m-1} \to N(H^{\otimes m})$ を使うと次がわかる

<u>系 7.3.</u> t_C の $N_k = \pi/\Gamma_{k+1}$ への作用は

C の N_k における共役類だけできまる