(作成 10/11/04)

No. 4-1

Date 10・12・15

§4. 形式的 symplectic 幾何

交叉形式の代数的精密化

この§でやること

- 完備 tensor 代数 $\widehat{T}$
- 完備自由 Lie 代数 $\widehat{\mathcal{L}}$
- $\mathfrak{a}_g^- = \mathrm{Der}_\omega(\widehat{T})$ の構造について
  (あとで Lie 代数準同型 $\lambda_g : \mathbb{Q}\widehat{\pi}(\Sigma_{g,1}) \to \mathfrak{a}_g^-$ をつくる)
- Kontsevich の形式的 symplectic 幾何

参考文献 (§§4-5)

◎ ブルバキ「リー群とリー環」第2章 自由リー環

◎ D. Quillen "Rational homotopy theory" Ann. of Math. 90 (1969) pp 205-295 より Appendix A. Complete Hopf Algebras

完備 tensor 代数 $\widehat{T}$ について

しばらくの間, 一般に

H : 有限次元 $\mathbb{Q}$ 線型空間

とする.

$$H^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(H, \mathbb{Q})$$

$$\widehat{T} := \prod_{m=0}^{\infty} H^{\otimes m}$$ 完備 tensor 代数 (非可換形式的巾級数環)

かけ算 = tensor 積. このとき $\otimes$ は省略する.

$\longrightarrow$ 結合代数 とくに Lie 代数

$\widehat{T}$ の位相

$$\widehat{T}_p := \prod_{m \geq p} H^{\otimes m} \subset \widehat{T}$$ two-sided ideal $p \geq 1$

$$\bigcap_{p=1}^{\infty} \widehat{T}_p = 0, \quad \widehat{T} = \varprojlim_{p\to\infty} \widehat{T}/\widehat{T}_p$$

$\varepsilon : \widehat{T} \to H^{\otimes 0} = \mathbb{Q}$ projection, algebra homomorphism

augmentation とよぶ

$$\mathrm{Ker}\,\varepsilon = \widehat{T}_1$$

No.

Date . .

$u\in\hat{T}$ の基本近傍系に $\{u+\hat{T}_p ; p\geq 0\}$ をとって位相を入れる

$T := \bigoplus_{m=0}^{\infty} H^{\otimes m} \subset \hat{T}$ tensor代数. 有限和 (非可換多項式環)

$T \overset{dense}{\subset} \hat{T}$

(∵) $\forall u\in\hat{T},\ \forall p\geq 0\quad (u+\hat{T}_p)\cap T \neq \phi$)

T ではなく $\hat{T}$ を考える理由

(その1) $1+\hat{T}_1$ は乗法群をなす. "Magnus群" (§5でこのことを使う)

(∵) $u\in\hat{T}_1\quad (1+u)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k u^k \in \hat{T}$ // ($u\neq 0$ なら $\notin T$)

(その2) exp, log が使える (§2の ρ は exp であることに注意)

$\exp : \hat{T}_1 \to 1+\hat{T}_1,\ u \mapsto \exp(u) = e^u = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}u^k$

$\log : 1+\hat{T}_1 \to \hat{T}_1,\quad v \mapsto \log v = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(v-1)^k$

互いに逆になっている。とくに全単射

(∵) 複素数での $\log(\exp z) = z,\ \exp(\log w) = w$ を
Taylor展開してえられる係数の関係式を使う //

derivation を考える

$\mathrm{Der}(\hat{T}) := \{D : \hat{T}\to\hat{T} ;$ continuous derivation $\}$

$\forall p\geq 0\ \exists q\geq 0\quad D(\hat{T}_q)\subset\hat{T}_p$

補題4.1. $\mathrm{Der}(\hat{T}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(H,\hat{T}) = H^*\otimes\hat{T},\quad D\mapsto D|_H$

H は algebra として T を自由生成し. $T\overset{dense}{\subset}\hat{T}$ ということ

省略

証明 単射 $D|_H = 0$ とする

$D(X_1\cdots X_p) = 0\quad \forall p\geq 1,\ \forall X_i\in H$

ゆえに $D|_T = 0$. $T\overset{dense}{\subset}\hat{T}$ より $D = 0$

($Du\neq 0$ とする. $\exists p\geq 0\quad Du\notin\hat{T}_p$. $\exists q\geq 0\ D(\hat{T}_q)\subset\hat{T}_p$
$u = u'+u''$. $u'\in T$. $u''\in\hat{T}_q\quad Du = Du''\in\hat{T}_p$ 矛盾)

全射 $\forall f\in\mathrm{Hom}(H,\hat{T})\quad D\in\mathrm{Der}(\hat{T})$ をつくる

$D1 \overset{def}{=} 0\quad$ (cf. $D1 = D(1\cdot 1) = 1(D1)+(D1)1 = 2D1$)

$D(X_1\cdots X_p) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{p} X_1\cdots X_{i-1}(DX_i)X_{i+1}\cdots X_p$, $X_i\in H$, $p\geq 1$

省略

$D : T \to \hat{T}$ derivation

$\forall p \geq 1 \quad D(T \cap \hat{T}_{p+1}) \subset \hat{T}_p$

$p \geq 0$ について $D^{(p)} : \hat{T} \to H^{\otimes p}$ を次で定める.

$u \in \hat{T},\ u = u' + u'',\ u' \in T,\ u'' \in \hat{T}_{p+2}$

$D^{(p)} u := (Du'$ の $H^{\otimes p}$ 成分$) \in H^{\otimes p}$

(well-defined)

$u = u' + u'' = \mathring{u}' + \mathring{u}''. \quad u', \mathring{u}' \in T,\ u'', \mathring{u}'' \in \hat{T}_{p+2}$

$\mathring{u}' - u' = u'' - \mathring{u}'' \in T \cap \hat{T}_{p+2}$

ゆえに $D(\mathring{u}' - u') \in \hat{T}_{p+1}$ //

そこで $u \in \hat{T}$ について

$$Du \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{p=0}^{\infty} D^{(p)} u \in \hat{T}$$

とおけば $D|_T$ はもとの D に一致し derivation で $D|_H = f$ となる //

(注) 同様に考えて $\mathrm{Der}(T) = \mathrm{Hom}(H, T)$ が成り立つ

完備自由Lie代数 $\hat{\mathcal{L}}$ について

・antipode

$\iota : \hat{T} \to \hat{T} \quad \iota(X_1 \cdots X_p) = (-1)^p X_p \cdots X_1$ antipode

$\iota(uv) = (\iota v)(\iota u) \quad \forall u, \forall v \in \hat{T}$ anti-automorphism

M : 右 $\hat{T}$ module

$w \in M,\ u \in \hat{T},\ uw \overset{\mathrm{def}}{=} w\iota(u) \Rightarrow M$: 左 $\hat{T}$ module

逆も同様

・coproduct

$$\hat{T} \hat{\otimes} \hat{T} := \varprojlim_m \hat{T} \otimes \hat{T} \Big/ \Big(\sum_{p+q=m} \hat{T}_p \otimes \hat{T}_q \Big) = \prod_{m=0}^{\infty} \Big(\bigoplus_{p+q=m} H^{\otimes p} \otimes H^{\otimes q} \Big)$$

完備tensor積　これも結合代数となっている

$\hat{T}$ と同様の位相を入れる

$\Delta : \hat{T} \to \hat{T} \hat{\otimes} \hat{T}$ coproduct

$\Delta(X) \overset{\mathrm{def}}{=} X \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} X \quad (\forall X \in H)$

連続な代数準同型となるように一意的に拡張する

$\rightsquigarrow$ 次数を保つ

補題4.2. $u\in\hat{T}_1$ について次は同値

$$\Delta u = u\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}u$$

$$\iff \Delta(e^u) = e^u\hat{\otimes}e^u$$

証明 $u\hat{\otimes}1$ と $1\hat{\otimes}u$ は可換なので

$$e^{u\hat{\otimes}1+1\hat{\otimes}u} = e^{u\hat{\otimes}1}e^{1\hat{\otimes}u} = (e^u\hat{\otimes}1)(1\hat{\otimes}e^u) = e^u\hat{\otimes}e^u$$

他方, $e^{\Delta u} = \Delta(e^u)$ (∵ Δ: continuous algebra homom) ゆえに

$$\Delta u = u\hat{\otimes}1+1\hat{\otimes}u \iff e^{\Delta u} = e^{u\hat{\otimes}1+1\hat{\otimes}u} \iff \Delta(e^u) = e^u\hat{\otimes}e^u$$

//

$\hat{\mathcal{L}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{u\in\hat{T}_1 : \Delta u = u\hat{\otimes}1+1\hat{\otimes}u\}$ 完備自由Lie代数

(完備Hopf代数$\hat{T}$のprimitive part)

$\hat{\mathcal{L}}\subset\hat{T}$ Lie subalgebra

(∵) $u, v\in\hat{\mathcal{L}}$

$$\Delta(uv) = (\Delta u)(\Delta v) = (u\hat{\otimes}1+1\hat{\otimes}u)(v\hat{\otimes}1+1\hat{\otimes}v)$$
$$= uv\hat{\otimes}1 + u\hat{\otimes}v + v\hat{\otimes}u + 1\hat{\otimes}uv$$
$$\Delta(uv-vu) = (uv-vu)\hat{\otimes}1 + 1\otimes(uv-vu)$$

//

$\hat{\mathcal{L}} = \prod_{p=1}^{\infty}\mathcal{L}_p$, $\mathcal{L}_p := \hat{\mathcal{L}}\cap H^{\otimes p}$, $\hat{\mathcal{L}}\cap\hat{T}_p$ によって位相を入れる

$\mathcal{L}_1 = H$,

$\mathcal{L}_2 = \Lambda^2 H$

(∵) $X, Y\in H$ について

$$\Delta(XY) - (XY)\hat{\otimes}1 - 1\hat{\otimes}(XY) = X\hat{\otimes}Y + Y\hat{\otimes}X$$ symmetrizer //

$\mathcal{L} := \bigoplus_{p=1}^{\infty}(\hat{\mathcal{L}}\cap H^{\otimes p}) \subset \hat{\mathcal{L}}$ dense Lie subalgebra

有限和, Hの自由Lie代数

補題4.3 $\mathcal{L}$はLie代数としてHで生成される. さらに

$\forall\mathfrak{g}$: Lie代数 $\forall f: H\to\mathfrak{g}$, $\mathbb{Q}$-linear map

$\exists!\,\hat{f}: \mathcal{L}\to\mathfrak{g}$: Lie algebra homom. s.t. $\hat{f}|H = f$

$$\begin{tikzcd} H \arrow[d] \arrow[dr, "\forall"] & \\ \mathcal{L} \arrow[r, "\exists!"'] & \mathfrak{g} \end{tikzcd}$$

(証明略)

(cf) ブルバキ「リー群とリー環」ch 2, §3, n°1, Cor 2.

$\exp(\hat{\mathcal{L}}) \subset 1 + \hat{T}_1$ 乗法に関して部分群 "Hausdorff群"

(∵) $u, v \in \hat{\mathcal{L}}$

$(e^u)^{-1} = e^{-u}$ 逆元で閉じている

$\Delta(e^u e^v) = (\Delta e^u)(\Delta e^v) = (e^u \hat{\otimes} e^u)(e^v \hat{\otimes} e^v) = e^u e^v \hat{\otimes} e^u e^v$

積で閉じている//

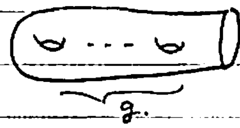
$\exp(\hat{\mathcal{L}})$ の元を group-like element という

$\mathrm{Der}(\hat{\mathcal{L}}) := \{D : \hat{\mathcal{L}} \to \hat{\mathcal{L}} : \text{continuous derivations}\}$

$D([u,v]) = [Du, v] + [u, Dv] \quad (\forall u, \forall v \in \hat{\mathcal{L}})$

補題4.4 $\mathrm{Der}(\hat{\mathcal{L}}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(H, \hat{\mathcal{L}}),\ D \mapsto D|_H$

(証明略) Lem 4.3 を使って Lem 4.1 と同様に示す//

◎ ここから $g \geq 1$ fixed. $\Sigma = \Sigma_{g,1} =$ 

$H = H_1(\Sigma; \mathbb{Q})$ 交叉形式をもつ

$\theta : H \xrightarrow{\cong} H^*,\ X \mapsto (Y \mapsto Y \cdot X)$ 同一視

$\mathrm{Der}(\hat{T}) = H^* \otimes \hat{T} \xrightarrow{\theta^{-1} \otimes 1_{\hat{T}}} H \otimes \hat{T} = \hat{T}_1$ 同一視する

具体的には $X_1, \cdots, X_p, Y \in H$ について

$(X_1 \cdots X_p)(Y) = (Y \cdot X_1) X_2 \cdots X_p$

とみている

$\{A_i, B_i\}_{i=1}^{g} \subset H$ symplectic basis

$A_i \cdot B_j = \delta_{ij},\ A_i \cdot A_j = B_i \cdot B_j = 0 \quad (1 \leq i, j \leq g)$

$\omega := \sum_{i=1}^{g} A_i B_i - B_i A_i \in \mathcal{L}_2 \subset H^{\otimes 2} \subset \hat{T}$

symplectic form.

symplectic basis のとり方によらない

(∵ $H \otimes H \xrightarrow[\cong]{\theta \otimes 1_H} H^* \otimes H \quad \omega \mapsto -1_H$).

No.

Date

symplectic derivations の Lie 代数

$$\mathfrak{a}_g^- := \mathrm{Der}_\omega(\hat{T}) = \{D \in \mathrm{Der}(\hat{T});\ D\omega = 0\}$$

$\mathfrak{a}_g^- < \mathrm{Der}(\hat{T}) = \hat{T}_1$ とみたとき $\mathfrak{a}_g^-$ はどのように見えるか?

$\Longrightarrow$ 巡回群があらわれる. $\Rightarrow$ fatgraph につながる

<u>cyclic symmetry</u>

$D = X_1 \cdots X_p$, $p \geq 1$, $X_j \in H$, のとき

$$D\omega = D(\Sigma A_i B_i - B_i A_i) = \Sigma(DA_i)B_i - (DB_i)A_i + \Sigma A_i(DB_i) - B_i(DA_i)$$

$$= \Sigma(A_i \cdot X_1)X_2 \cdots X_p B_i - (B_i \cdot X_1)X_2 \cdots X_p A_i$$

$$+ \Sigma A_i(B_i \cdot X_1)X_2 \cdots X_p - B_i(A_i \cdot X_1)X_2 \cdots X_p$$

$$= X_2 \cdots X_p X_1 - X_1 X_2 \cdots X_p$$

つまり

$\nu: \hat{T}_1 \to \hat{T}_1$, $\nu(X_1 X_2 \cdots X_p) \overset{\mathrm{def}}{=} X_2 \cdots X_p X_1$, linear map

について $u \in \hat{T}_1 \mapsto D \in \mathrm{Der}(\hat{T})$ とするとき

$$D\omega = \nu u - u$$

が成立つ. (cyclic symmetry があらわれた).

$N: \hat{T} \to \hat{T}_1$ linear map "cyclic symmetrizer"

$$N|_{H^{\otimes 0}} \overset{\mathrm{def}}{=} 0$$

$$N|_{H^{\otimes p}} \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{j=0}^{p-1} \nu^j$$

さっきの状況で

$$D\omega = 0 \Leftrightarrow \nu u = u \Leftrightarrow u \in N(\hat{T}_1)$$

したがって

$$\mathfrak{a}_g^- = \mathrm{Der}_\omega(\hat{T}) = N(\hat{T}_1) \quad \cdots\cdots ①$$

となる. 同様に

$$\mathrm{Der}_\omega(T) = N(\hat{T}_1) \cap T \quad \cdots\cdots ②$$

となる.

同一視①の下で Lie bracket はどのように見えるか？

$\hat{T}_1 = \hat{T} \otimes H$ とみることにして

$(\cdot) : \hat{T}_1 \otimes \hat{T}_1 \to \hat{T} \otimes \hat{T},\ u_1 \otimes X_1 \otimes u_2 \otimes X_2 \mapsto (X_1 \cdot X_2)\, u_1 \otimes u_2, \left(\begin{array}{l} u_i \in \hat{T} \\ X_i \in H \end{array} \right)$

$\mathfrak{B} : \hat{T} \otimes \hat{T} \to N(\hat{T}_1),\ u \otimes v \mapsto N(uv)$

とおく．

補題 4.5. $X_i, Y_j \in H$ について

$$[N(X_1 \cdots X_p), N(Y_1 \cdots Y_q)]$$
$$= N((N(X_1 \cdots X_p))(Y_1 \cdots Y_q))$$
$$= -\mathfrak{B}(N(X_1 \cdots X_p) \cdot N(Y_1 \cdots Y_q))$$
$$= -\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} (X_i \cdot Y_j)\, N(X_{i+1} \cdots X_p X_1 \cdots X_{i-1} Y_{j+1} \cdots Y_q Y_1 \cdots Y_{j-1})$$

レポート問題 5ª 補題 4.5 を示せ

$\mathfrak{a}_g^- = N(\hat{T}_1)$ の 2 次の部分 $N(H^{\otimes 2})$ について

$$N(H^{\otimes 2}) = \mathrm{Sym}^2 H \subset H^{\otimes 2} = H^* \otimes H = \mathrm{Hom}(H, H) = \mathfrak{gl}(H)$$

$$\mathfrak{sp}(H) \overset{\mathrm{def}}{=} \{ f \in \mathrm{Hom}(H,H) ;\ {}^\forall X, {}^\forall Y \in H,\ f(X) \cdot Y + X \cdot f(Y) = 0 \}$$

symplectic group の Lie 代数

補題 4.6. $\mathfrak{sp}(H) = \mathrm{Sym}^2 H = N(H^{\otimes 2})$

証明 $f \in \mathfrak{gl}(H) = H^{\otimes 2}$ について

$$((f(\omega))(X))(Y) = X \cdot f(Y) + f(X) \cdot Y \quad ({}^\forall X, {}^\forall Y \in H)$$

(∵) $f = Z_1 Z_2$, $Z_i \in H$, について示せばよい

$$f(X) = (X \cdot Z_1) Z_2$$
$$f(\omega) = Z_2 Z_1 - Z_1 Z_2$$
$$(f(\omega)(X))(Y) = ((X \cdot Z_2) Z_1 - (X \cdot Z_1) Z_2)(Y)$$
$$= (X \cdot Z_2)(Y \cdot Z_1) - (X \cdot Z_1)(Y \cdot Z_2)$$
$$= X \cdot f(Y) - Y \cdot f(X) \quad //$$

したがって $f(\omega) = 0 \iff f \in \mathfrak{sp}(H)$ //

No.

Date

Kontsevichの形式的symplectic幾何

$\mathfrak{h}_g := \mathfrak{l}_g,\ \mathfrak{a}_g,\ \mathfrak{c}_g$: 3つのLie代数

$\mathfrak{l}_g := \mathrm{Der}_\omega(\mathcal{L})$ "Lie"

$\mathfrak{a}_g := N(\hat{T}_2) \cap T < \mathrm{Der}_\omega(T)$ "associative"

$\mathfrak{c}_g := \{v \in \mathrm{Vect}_\omega(H) ;\ v(0) = 0\}$ "commutative"

いずれも $\mathfrak{sp} = \mathfrak{sp}(H)$ との半直積で書ける

$\mathfrak{h}_g = \mathfrak{h}_g^+ \rtimes \mathfrak{sp}$. たとえば $\mathfrak{a}_g^+ = N(\hat{T}_3) \cap T$ など

$\mathfrak{sp}$: semi-simple ゆえ homology群は分解する

$H_*(\mathfrak{h}_g) = H_*(\Lambda^* \mathfrak{h}_g) = H_*((\Lambda^* \mathfrak{h}_g^+)^{\mathfrak{sp}}) \otimes H_*(\mathfrak{sp})$

ここで $(\Lambda^* \mathfrak{h}_g^+)^{\mathfrak{sp}} \subset T^{\mathfrak{sp}}$ に注意する

Weyl $T^{\mathfrak{sp}}$ は ω の代数的結合で書ける

Kontsevichのアイディア : ω をedgeと見ればgraphができる

(cf) 森田によるtrivalent graphを使ったMM類の構成)

$H_*(\mathfrak{h}_\infty)$: Hopf algebra ($\mathfrak{h}_{g_1} \oplus \mathfrak{h}_{g_2} \to \mathfrak{h}_{g_1+g_2}$ を使う)

定理 (Kontsevich)

$$\mathrm{Prim}\, H_*(\mathfrak{l}_\infty) = \mathrm{Prim}\, H_*(\mathfrak{sp}_\infty) \oplus \bigoplus_{n \geq 2} H^{2n-2-*}(\mathrm{Out}\, F_n)$$

$$\mathrm{Prim}\, H_*(\mathfrak{a}_\infty) = \mathrm{Prim}\, H_*(\mathfrak{sp}_\infty) \oplus \bigoplus_{\substack{m>0 \\ 2-2g-m<0}} H^{4g-4+2m-*}(\mathbb{M}_g^m / \mathfrak{S}_m)$$

$$\mathrm{Prim}\, H_*(\mathfrak{c}_\infty) = \mathrm{Prim}\, H_*(\mathfrak{sp}_\infty) \oplus \bigoplus_{n \geq 2} (\text{Graph homology})^{(n)}_*$$

ただし. F_n : free group of rank n

$\mathrm{Out}(F_n) = \mathrm{Aut}(F_n) / \text{conjugate}$

$\mathbb{M}_g^m :=$ the moduli space of compact Riemann surfaces of genus g with m marked pts.