(作成: 10/11/02)

No. 2-1

Date 10·12·14

§2. Lie 代数の復習

この§でやること

- Lie 代数の定義と例
- Poisson bracket
- homological Goldman Lie algebra (これからやることのひな形)

K : 体

(注意. ここでは係数環は体 (ほとんどすべて $\mathbb{Q}$, ときどき $\mathbb{R}$) で考えるが、多くの場合単位元をもつ可換環でなりたつ)

定義 $\mathfrak{g}$: Lie algebra $/K$

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

0) $\mathfrak{g}$: vector space $/K$

$[\,,\,] : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, K-bilinear map

1) (anti-symmetry) $\forall X, \forall Y \in \mathfrak{g}$

$[X, Y] = -[Y, X]$

2) (Jacobi identity) $\forall X\ \forall Y\ \forall Z \in \mathfrak{g}$

$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]$ (Leibniz' rule)

(または $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$).

$\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$: Lie algebras $/K$

定義 $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$: Lie algebra homomorphism

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

1) $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$: K-linear map

2) $\forall X, \forall Y \in \mathfrak{g}$, $f([X, Y]) = [f(X), f(Y)]$

$V, V' \subset \mathfrak{g}$ K-linear subspaces

$[V, V'] \overset{\text{def}}{=}$ ($\{[X, Y] ; X \in V, Y \in V'\}$ の生成する K-linear subspace)

定義 $\mathfrak{h} < \mathfrak{g}$ Lie subalgebra

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

0) $\mathfrak{h} < \mathfrak{g}$ K-vector subspace

1) $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] < \mathfrak{h}$

さらに $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] < \mathfrak{h}$ をみたすとき ideal という

No.

Date

次の2つを知りたい

$H_1(\mathfrak{g}) \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ abelianization

$Z(\mathfrak{g}) \overset{\text{def}}{=} \{ Z \in \mathfrak{g} ; \forall X \in \mathfrak{g}\ [X, Z] = 0 \}$ center ---▷ idealになる

centerはfunctorでないことに注意する

例1 A : associative K-algebra

$[x, y] := xy - yx \quad x, y \in A \quad \Rightarrow$ Lie algebra

(anti-symmetry) 明らか

(Jacobi identity)

$$\begin{aligned}
&[[x,y],z] + [y,[x,z]] \\
&= (xy - yx)z - z(xy - yx) + y(xz - zx) - (xz - zx)y \\
&= xyz + zyx - yzx - xzy = [x, yz - zy] \\
&= [x, [y,z]] \quad /\!/
\end{aligned}$$

例2 $\mathrm{End}(A) = \{ u : A \to A : K\text{-linear map} \}$

合成と和について associative K-algebra $\Rightarrow$ Lie algebra

$$\mathrm{Der}(A) := \left\{ D \in \mathrm{End}(A) ; \begin{array}{l} \forall x, \forall y \in A \\ D(xy) = (Dx)y + x(Dy) \end{array} \right\}$$

derivation.

$\mathrm{Der}(A) < \mathrm{End}(A)$ Lie subalgebra

$$\begin{aligned}
&(\because)\ D_1, D_2 \in \mathrm{Der}(A),\ x, y \in A \\
&[D_1, D_2](xy) = D_1 D_2(xy) - D_2 D_1(xy) \\
&= D_1((D_2 x)y + x(D_2 y)) - D_2((D_1 x)y + x(D_1 y)) \\
&= \cdots \text{ Leibniz rule } \cdots \\
&= ([D_1, D_2]x)y + x([D_1, D_2]y) \quad /\!/
\end{aligned}$$

$a \in A$

$\mathrm{Der}_a(A) := \{ D \in \mathrm{Der}(A) ; Da = 0 \} < \mathrm{Der}(A)$

subalgebra (明らか)

例3 $K = \mathbb{R}$

M : C^∞ mfd. $A = C^\infty(M)$

$\mathrm{Vect}(M) := \mathrm{Der}(C^\infty(M))$ vector fields

さらに $M = G$ Lie group. $G \curvearrowright C^\infty(M)$ 左移動.

$\mathrm{Lie}\, G := \mathrm{Der}(C^\infty(M))^G = \{ D \in \mathrm{Der}(C^\infty(G)) : \forall g \in G \;\; g D g^{-1} = D \}$

$< \mathrm{Vect}(G)$ Lie subalgebra

Poisson bracket

$n \geqq 1$

定義 (M, ω) : $2n$-dim symplectic manifold

$\overset{\text{def}}{\iff}$
- 0) M : $2n$-dim. C^∞ mfd
  $\omega \in \Omega^2(M)$ 2-form
- 1) $\omega : TM \xrightarrow{\cong} T^*M$, $v \longmapsto i_v(\omega) = \omega(v, \cdot)$ (non-degen.)
- 2) $d\omega = 0$ (closed)

((注) m次交代行列が正則 $\Rightarrow$ m : 偶数)

$f, g \in C^\infty(M)$

$H_f := -\omega^{-1}(df) \in \mathrm{Vect}(M)$ Hamiltonian vector field

いいかえると $i_{H_f}\omega = -df$. このとき

$H_f \in \mathrm{Vect}_\omega(M) := \{ X \in \mathrm{Vect}(M) ; \mathcal{L}_X \omega = 0 \}$

($\because$ $\mathcal{L}_{H_f}\omega = d i_{H_f}\omega + i_{H_f} d\omega = -ddf + 0 = 0$ //)

$\{f, g\} := H_f(g) = (dg)(H_f) = -(i_{H_g}\omega)(H_f) = \omega(H_f, H_g)$

Poisson bracket

$H_{\{f,g\}} = [H_f, H_g]$

($\because$ $i_{[H_f, H_g]}\omega = \mathcal{L}_{H_f} i_{H_g}\omega - i_{H_g}\mathcal{L}_{H_f}\omega = -\mathcal{L}_{H_f} dg - 0$
$= -dH_f g = -d\{f, g\}$ //)

$C^\infty(M)$ は Poisson bracket に関して Lie 代数をなす

($\because$) (anti-symmetry) 明らか.

(Jacobi identity)

$\{f, \{g, h\}\} = -\{\{g, h\}, f\} = -H_{\{g,h\}} f$

$= -[H_g, H_h] f = -H_g(H_h f) + H_h(H_g f)$

$= -\{g, \{h, f\}\} + \{h, \{g, f\}\} = \{g, \{f, h\}\} + \{\{f, g\}, h\}$ //

No.

Date

レポート問題3[4]

(1) $b_0(M)=1,\ b_1(M)=0$ ならば次の完全列が成立つことを示せ

$$0 \to \mathbb{R} \to C^\infty(M) \xrightarrow{H} \mathrm{Vect}_\omega(M) \to 0 \quad (\text{exact})$$

(2) $M=\mathbb{R}^{2n}$, 座標 $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)$.

$\omega=\sum_{i=1}^{n} dx_i\wedge dy_i$ のとき $\forall f\in C^\infty(M)$ について

$$H_f=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_i}-\frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

が成立つことを示せ. とくに $\{f,g\}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial y_i}-\frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}$ である.

homological Goldman Lie algebra

$H_{\mathbb{Z}}=H_1(\Sigma_{g,1};\mathbb{Z})$ 交叉形式をもつ

$\mathbb{Q}H_{\mathbb{Z}}:=$ 集合 $H_{\mathbb{Z}}$ を基底とする自由 $\mathbb{Q}$ 線型空間.

加法群 $H_{\mathbb{Z}}$ の群環

$X\in H_{\mathbb{Z}} \mapsto [X]\in H_{\mathbb{Z}}$ 基底元

homological Goldman bracket $X,Y\in H_{\mathbb{Z}}$

$$[[X],[Y]] \overset{\text{def}}{=} (X\cdot Y)[X+Y]$$

補題2.1. $\mathbb{Q}H_{\mathbb{Z}}$: Lie algebra

証明 (anti-symmetry) $\Leftarrow X\cdot Y=-Y\cdot X$

(Jacobi identity)

$$[[[X],[Y]],[Z]]=(X\cdot Y)((X+Y)\cdot Z)[X+Y+Z]$$

$$+)\quad [[Y],[[X],[Z]]]=(X\cdot Z)(Y\cdot(X+Z))[X+Y+Z]$$

$$[[X],[[Y],[Z]]]=(X\cdot(Y+Z))(Y\cdot Z)[X+Y+Z] \quad //$$

abelianization について

補題2.2. 線型写像

$$\varphi:\mathbb{Q}H_{\mathbb{Z}}\to\mathbb{Q},\quad \varphi([X])\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}1 & \text{if } X=0\\ 0 & \text{if } X\neq 0\end{cases}$$

は同型 $H_1(\mathbb{Q}H_{\mathbb{Z}})\cong\mathbb{Q}$ を与える.

証明 $\varphi([\mathbb{Q}H_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Q}H_{\mathbb{Z}}]) = 0$

(∵) $\forall X, \forall Y \in H_{\mathbb{Z}}$

$\varphi([[X],[Y]]) = (X\cdot Y)\varphi([X+Y])$

ここで $X+Y \neq 0$ ならば $\varphi([X+Y]) = 0$

$X+Y=0$ ならば $X\cdot Y = X\cdot(-X) = 0$ //

$0 \neq \forall X \in H_{\mathbb{Z}}$ をとる

$\exists Y \in H_{\mathbb{Z}}, \exists \nu \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ s.t. $X\cdot Y = \nu$

このとき $\frac{1}{\nu}[[X-Y],[Y]] = \frac{1}{\nu}((X-Y)\cdot Y)[X-Y+Y] = [X]$

ゆえに $[X] \in [\mathbb{Q}H_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Q}H_{\mathbb{Z}}]$ 　以上をあわせて $\varphi : H_1(\mathbb{Q}H_{\mathbb{Z}}) \cong \mathbb{Q}$ //

とくに $\mathbb{Q}(H_{\mathbb{Z}}\setminus\{0\}) < \mathbb{Q}H_{\mathbb{Z}}$ ideal である.

レポート問題4ª $H_1(\mathbb{Z}H_{\mathbb{Z}})$ が無限生成であることを示せ —

◎ Poisson bracket を用いて中心 $Z(\mathbb{Q}H_{\mathbb{Z}})$ を求める.

$\mathbb{R}^{2g}\ (\cong H \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$ 座標 $(x_1,\dots,x_g,y_1,\dots,y_g) \leftrightarrow \{A_1,\dots,A_g,B_1,\dots,B_g\}$

$f, h \in C^\infty(\mathbb{R}^{2g})$

$$\{f,h\} = \sum_{i=1}^{g} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial h}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial h}{\partial x_i} \quad \text{Poisson bracket}$$

線型写像

$\rho : \mathbb{Q}H_{\mathbb{Z}} \to C^\infty(\mathbb{R}^{2g}),\ [X] \mapsto e^{X\cdot Z}$ 　ただし $Z = \sum x_i A_i + y_i B_i$

を考える.

補題 2.3 (1) (Goldman) ρ : Lie algebra homomorphism

(2) ρ : injective

証明 (1) $X = \sum \xi_i' A_i + \xi_i'' B_i$, $Y = \sum \eta_i' A_i + \eta_i'' B_i$ $\in H_{\mathbb{Z}}$ 　$\xi_i', \xi_i'', \eta_i', \eta_i'' \in \mathbb{Z}$

$X\cdot Z = \sum \xi_i' y_i - \xi_i'' x_i$

$Y\cdot Z = \sum \eta_i' y_i - \eta_i'' x_i$

$$\{e^{X\cdot Z}, e^{Y\cdot Z}\} = \sum\left(\frac{\partial}{\partial x_i}e^{X\cdot Z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y_i}e^{Y\cdot Z}\right) - \sum\left(\frac{\partial}{\partial y_i}e^{X\cdot Z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}e^{Y\cdot Z}\right)$$

$$= \left(\sum -\xi_i''\eta_i' - \xi_i'(-\eta_i'')\right)e^{(X+Y)\cdot Z} = (X\cdot Y)\,e^{(X+Y)\cdot Z} \quad /\!/ (1)$$

No.
Date

(2) $X_1, \cdots, X_n \in H_{\mathbb{Z}}$ 相異なる n 個の元について

$$\{e^{X_1 \cdot Z}, \cdots, e^{X_n \cdot Z}\} : \text{線型独立}$$

を示せばよい。Vandermonde の行列式により

$$\det\left((X_i \cdot Z)^k\right)_{\substack{1\le i\le n \\ 0\le k\le n-1}} = \prod_{i<j}\left((X_i\cdot Z)-(X_j\cdot Z)\right) = \prod_{i<j}\left((X_i - X_j)\cdot Z\right)$$

ここで 仮定 $X_i - X_j \neq 0$ より 交叉形式についての直交補空間 $(X_i - X_j)^\perp$ は余次元 1. とくに $\mathbb{R}^{2g} \setminus (X_i - X_j)^\perp \overset{\text{open dense}}{\subset} \mathbb{R}^{2g}$ ゆえに

$$\bigcap_{i<j}\left(\mathbb{R}^{2g}\setminus (X_i-X_j)^\perp\right) \subset \mathbb{R}^{2g} \text{ open dense.}$$

ゆえに $\det\left((X_i \cdot Z)^k\right) \neq 0$.

$e^{X_i \cdot Z} = \sum \frac{1}{k!}(X_i \cdot Z)^k$ の原点での Taylor 展開を考えて

$\{e^{X_1 \cdot Z}, \cdots, e^{X_n \cdot Z}\}$: 線型独立 //

系 2.4 $Z(\mathbb{Q}H_{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Q}[0]$.

証明 ($\supset$) 明らか. ($\subset$) $u \in Z(\mathbb{Q}H_{\mathbb{Z}})$ とする.

$\rho([B_i]) = e^{-x_i}$ だから

$$0 = \rho([[B_i], u]) = \{e^{-x_i}, \rho(u)\} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} e^{-x_i}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\rho(u)\right)$$

$$= -e^{-x_i}\frac{\partial}{\partial y_i}\rho(u). \quad \text{ゆえに } \frac{\partial}{\partial y_i}\rho(u) = 0$$

同様に $\rho([A_i]) = e^{y_i}$ だから $\frac{\partial}{\partial x_i}\rho(u) = 0$

あわせて $\rho(u) = \text{const} = c_0$ とおく $= \rho(c_0[0])$

ρ : inj より $u = c_0[0] \in \mathbb{Q}[0]$ //

これからやること

Goldman Lie 代数について ρ のような「よい」Lie 代数準同型を定義して それを使って 中心 その他をしらべる

$C^\infty(\mathbb{R}^{2g})$ の代わりになるもの

Goldman, Etingof, …

$\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), G)/G$ $\quad G$: reductive Lie group

Kuno-K.

$$\mathrm{Der}_\omega(\hat{T}), \quad \left(\begin{array}{l}\hat{T} = \prod_{m=0}^{\infty} H^{\otimes m} \\ \omega = \sum A_i B_i - B_i A_i \in H^{\otimes 2} \subset \hat{T}\end{array}\right)$$