１８年度Ｓセメスタ理科Ｉ類２年生 18-24

常微分方程式, 補足プリント, １８年７月　５日　河澄響矢

解の初期値に関する微分可能性の証明.

$N \geq 1$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $v_0 \in \mathbb{R}^N$, $\rho > 0$, $r > 0$, とし、

$$D := [t_0 - \rho, t_0 + \rho] \times D', \quad D' := \{v \in \mathbb{R}^N; \|v - v_0\| \leq r\}$$

とする。ここで $\|\cdot\|$ は $\mathbb{R}^N$ における Euclid ノルムである。F を D の近傍で定義され $\mathbb{R}^N$ に値をとる C^∞ 函数とし、v_0 の近傍の点 $w \in D'$ について

$$v(t, w) \in \mathbb{R}^N, \quad t \in [t_0 - \rho, t_0 + \rho]$$

を、初期値問題

$$(\sharp) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} v(t, w) = F(t, v(t, w)), \\ v(t_0, w) = w \end{cases}$$

の解とする。ここで ρ は充分小さく取り直す。このとき次が成り立つ。

定理 12. $v(t, w)$ は (t, w) について C^∞ 級である。

この補足プリントの目的はこの定理を証明することである。

F の $\mathbb{R}^N$ 方向のみについての Jacobi 行列を $J'F$ とする。これは D の近傍で定義された $N \times N$ 行列に値をもつ C^∞ 函数である。$s_0 \in \mathbb{R}$ とし、$\ell(s) \in D'$ を $s = s_0$ の近傍で定義された C^∞ 函数とする。変分方程式

$$(\sharp\sharp) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} \beta(t, s) = (J'F)(t, v(t, \ell(s)))\beta(t, s), \\ \beta(t_0, s) = \dfrac{d}{ds}\ell(s) \end{cases}$$

は線型方程式だから、定義域いっぱいまで延びる解 $\beta(t, s) \in \mathbb{R}^N$ をもつ。定理 3 により $\beta(t, s)$ は (t, s) について連続である。$(\sharp\sharp)$ により $\frac{\partial}{\partial t}\beta(t, s)$ も (t, s) について連続である。そこで

$$u(t, s) := v(t, \ell(s_0)) + \int_{s_0}^{s} \beta(t, \sigma) d\sigma$$

とおく。もし、等式

$$(*) \qquad u(t, s) = v(t, \ell(s))$$

が証明できれば $v(t, \ell(s))$ は s について C^1 級で $\frac{\partial}{\partial s} v(t, \ell(s)) = \beta(t, s)$ がわかる。

まず、等式 $(*)$ は $t = t_0$ で成り立つ。実際、

$$\begin{aligned} u(t_0, s) &= v(t_0, \ell(s_0)) + \int_{s_0}^{s} \beta(t_0, \sigma) d\sigma \\ &= \ell(s_0) + \int_{s_0}^{s} \frac{d}{d\sigma}\ell(\sigma) d\sigma = \ell(s) = v(t_0, \ell(s)) \end{aligned}$$

となるからである。つぎに、$\partial u/\partial t$ を計算する。Chain rule により

$$
\begin{aligned}
F(t,u(t,s)) &= F(t,u(t,s_0)) + \int_{s_0}^{s} \frac{d}{d\sigma} F(t,u(t,\sigma))d\sigma \\
&= F(t,u(t,s_0)) + \int_{s_0}^{s} (J'F)(t,u(t,\sigma))\frac{d}{d\sigma}u(t,\sigma)d\sigma \\
&= F(t,u(t,s_0)) + \int_{s_0}^{s} (J'F)(t,u(t,\sigma))\beta(t,\sigma)d\sigma
\end{aligned} \tag{1}
$$

となることに注意する。いま、$\frac{\partial}{\partial t}\beta(t,s)$ が (t,s) について連続であることから、s についての積分と t についての偏微分は順序交換できる。そこで

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(t,s) &= \frac{\partial v}{\partial t}(t,\ell(s_0)) + \int_{s_0}^{s} \frac{\partial \beta}{\partial t}(t,\sigma)d\sigma \\
&= F(t,v(t,\ell(s_0))) + \int_{s_0}^{s} (J'F)(t,v(t,\ell(\sigma)))\beta(t,\sigma)d\sigma \\
&= F(t,u(t,s_0)) + \int_{s_0}^{s} (J'F)(t,u(t,\sigma))\beta(t,\sigma)d\sigma \\
&\quad + \int_{s_0}^{s} \big((J'F)(t,v(t,\ell(\sigma))) - (J'F)(t,u(t,\sigma))\big)\beta(t,\sigma)d\sigma \\
&\overset{(1)}{=} F(t,u(t,s)) + \int_{s_0}^{s} \big((J'F)(t,v(t,\ell(\sigma))) - (J'F)(t,u(t,\sigma))\big)\beta(t,\sigma)d\sigma
\end{aligned} \tag{2}
$$

となる。いま F および $J'F$ は C^∞ だから Lipschitz 条件をみたす。つまり、定数 $K>0$ と $L'>0$ が存在して、任意の t,u,v について

$$
\begin{aligned}
&\|F(t,v)-F(t,u)\| \le K\|v-u\| \quad \text{および} \\
&\|(J'F)(t,v)-(J'F)(t,u)\| \le L'\|v-u\|
\end{aligned}
$$

がなりたつ。ここで下式左辺の $\|\cdot\|$ は $N\times N$ 行列の空間 $(\cong \mathbb{R}^{N^2})$ の Euclid ノルムである。また、$\beta(t,\sigma)$ は連続で $[t_0-\rho,t_0+\rho]\times[s_0-\varepsilon,s_0+\varepsilon]$ （ただし $0<\varepsilon\ll 1$）は有界閉集合だから、定数 $L''>0$ が存在して、任意の (t,s) について $\|\beta(t,s)\|\le L''$ である。

そこで $u(t_0,s)-v(t_0,\ell(s))=0$ に注意すると (2) により

$$
\begin{aligned}
\|u(t,s)-v(t,\ell(s))\| &= \|\int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial\tau}(u(\tau,s)-v(\tau,\ell(s)))d\tau\| \\
=&\|\int_{t_0}^{t}(F(\tau,u(\tau,s))-F(\tau,v(\tau,\ell(s))))d\tau \\
&+ \int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s}\big((J'F)(\tau,v(\tau,\ell(\sigma)))-(J'F)(\tau,u(\tau,\sigma))\big)\beta(\tau,\sigma)d\tau d\sigma\| \\
\le&|\int_{t_0}^{t} K\|u(\tau,s)-v(\tau,\ell(s))\|d\tau| \\
&+ L'L''|\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s}\|v(\tau,\ell(\sigma))=u(\tau,\sigma)\|d\tau d\sigma|
\end{aligned}
$$

となる。つまり $L:=L'L''>0$ および

$$
f(t,s) := \|u(t,s)-v(t,\ell(s))\| \ge 0
$$

とおくと $f(t,s)$ は (t,s) について連続であって、不等式

$$f(t,s) \leq K|\int_{t_0}^{t} f(\tau,\sigma)d\tau| + L|\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} f(\tau,\sigma)d\tau d\sigma| \tag{3}$$

がなりたつ。

ここで Gronwall の不等式と同様の以下の補題 A (ii) がなりたつ。

補題 A. I および $J \subset \mathbb{R}$ を有界閉区間とし、f および $g : I \times J \to \mathbb{R}$ を連続函数とする。

(i) $x \in I$ について

$$h(x) := \max_{y \in J} g(x,y)$$

とおく[1]とき、$h : I \to \mathbb{R}$ は連続である。

(ii) f はつねに 0 以上の値をとるとする。$x_0 \in I$ および $y_0 \in J$ とする。定数 $K \geq 0$ および $L \geq 0$ が存在して、任意の $(x,y) \in I \times J$ について

$$f(x,y) \leq K|\int_{x_0}^{x} f(\xi,y)d\xi| + L|\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(\xi,\eta)d\xi d\eta|$$

をみたすとする。このとき f は恒等的に 0 である $f(x,y) = 0$.

補題 A の証明. (i) $I \times J$ は有界閉集合だから g は一様連続である。つまり、任意の $\varepsilon > 0$ について、ある $\delta > 0$ が存在して、$|x' - x| + |y' - y| < \delta$ をみたす任意の $x, x' \in I$ と $y, y' \in J$ について $|g(x',y') - g(x,y)| < \varepsilon$ である。

任意の $x_1 \in I$ をとり、h が x_1 において連続であることを示す。まず、J は有界閉区間だから $y_1 \in J$ を $h(x_1) = g(x_1,y_1)$ をみたすようにとることができる。$x \in I$ が $|x - x_1| < \delta$ であるとする。任意の $y \in J$ について $g(x,y) < g(x_1,y) + \varepsilon \leq h(x_1) + \varepsilon$ である。そこで $h(x) < h(x_1) + \varepsilon$ となる。他方、$h(x_1) - \varepsilon = g(x_1,y_1) - \varepsilon < g(x,y_1) \leq h(x)$ だから $h(x_1) - \varepsilon < h(x)$ となる。以上をあわせて $|h(x) - h(x_1)| < \varepsilon$ となる。(i) が示された。

(ii)

$$g(x,y) := e^{-K|x-x_0|}|\int_{x_0}^{x} f(\xi,y)d\xi| \leq 0$$

とおく。このとき次がなりたつ

$$g(x,y) \leq L|\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} g(\xi,\eta)d\xi d\eta|. \tag{4}$$

実際、$x \geq x_0$ のとき

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}g(x,y) &= e^{-K|x-x_0|}f(x,y) - e^{-K|x-x_0|}K\int_{x_0}^{x} f(\xi,y)d\xi \\
&\leq e^{-K|x-x_0|}L|\int_{y_0}^{y}(\int_{x_0}^{x} f(\xi,\eta)d\xi)d\eta| = L|\int_{y_0}^{y} g(x,\eta)d\eta|
\end{aligned}$$

となるから、両辺を x_0 から x まで積分して (4) が得られる。$x \leq x_0$ のときは $g(x,y) = e^{K(x-x_0)}\int_{x}^{x_0} f(\xi,y)d\xi$ であることに注意する。そこで

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}g(x,y) &= -e^{K(x-x_0)}f(x,y) + e^{K(x-x_0)}K\int_{x}^{x_0} f(\xi,y)d\xi \\
&\geq -L|\int_{y_0}^{y} e^{K(x-x_0)}(\int_{x}^{x_0} f(\xi,\eta)d\xi)\eta| = -|L\int_{y_0}^{y} g(x,\eta)d\eta|
\end{aligned}$$

[1] ここで x をとめたとき $g(x,\cdot)$ は有界閉区間 J 上の連続函数だから最大値をもつ。

となるから、両辺を x から x_0 まで積分して (4) が得られる。

つぎに $h(x) := \max_{y\in J} g(x,y)$ とおく。(i) で示したことから $h(x)$ は連続である。また、$J=[y_0', y_0'']$ とする。このとき $|\int_{y_0}^{y} g(x,\eta)d\eta| \le (y_0''-y_0')h(x)$ である。そこで (4) 式により $g(x,y) \le L(y_0''-y_0')|\int_{x_0}^{x} h(\xi)d\xi|$ となるから左辺の y について最大値をとって

$$h(x) \le L(y_0''-y_0')|\int_{x_0}^{x} h(\xi)d\xi|$$

となる。これに Gronwall の不等式を適用して $h(x)$ が恒等的に 0 であることがわかる。$0 \le g(x,y) \le h(x) \le 0$ だから $g(x,y)$ も恒等的に 0 である。これは $|\int_{x_0}^{x} f(\xi,y)d\xi| = 0$ を意味するが、$f(x,y)$ は 0 以上の値をとる連続函数だから $f(x,y)$ も恒等的に 0 である。以上で (ii) が証明され、補題が示された。 □

したがって、我々の函数 $f(t,s)$ も $=0$ である。つまり

$$v(t,\ell(s)) = u(t,s) = v(t,\ell(s_0)) = \int_{s_0}^{s} \beta(t,\sigma)d\sigma$$

となり、$v(t,\ell(s))$ は s について偏微分可能で

$$\frac{\partial}{\partial s} v(t,\ell(s)) = \beta(t,s)$$

となる。以上で解 $v(t,w)$ が C^1 級であることが分かった。

以上により偏導関数は変分方程式 (♯♯) という線型方程式の階であることが分かった。したがって、2 階以上の偏導関数については次を示せば充分である。

補題 B. $N \ge 1$ とする。$A(t,s)$, $a(t,s)$ および $x(t,s)$ を $(t_0,s_0) \in \mathbb{R}^n$ の近傍で定義された連続函数で、$A(t,s)$ は $N\times N$ 行列に値をもち、$a(t,s)$ および $x(t,s)$ は N 次 vector に値をもつものとする。s に関する偏導函数 $\dfrac{\partial A}{\partial s}$, $\dfrac{\partial a}{\partial s}$ および $\dfrac{\partial x}{\partial s}$ が存在して連続であり、$x(t_0,s)$ は s について C^1 級であるとする。さらに、微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} x(t,s) = A(t,s)x(t,s) + a(t,s)$$

をみたすとする。

以上の仮定の下で、 $x(t,s)$ は s について C^1 級で、偏導関数 $\dfrac{\partial x}{\partial s}(t,s)$ は（$\gamma(t,s)$ を未知函数とする）非斉次線型方程式の初期値問題

$$(\flat) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\gamma(t,s) = A(t,s)\gamma(t,s) + \left(\dfrac{\partial}{\partial s}A(t,s)\right)x(t,s) + \dfrac{\partial a}{\partial s}(t,s), \\ \gamma(t_0,s) = \dfrac{\partial x}{\partial s}(t_0,s) \end{cases}$$

の解である。

補題 B の証明. 線型方程式は定義域いっぱいまで解が存在することに注意する。初期値問題 (♯) は解 $\gamma(t,s)$ をもつ。

$$y(t,s) := x(t,s) + \int_{s_0}^{s} \gamma(t,\sigma)d\sigma$$

とおく。$x(t,s)=y(t,s)$ を示したい。これは $t=t_0$ では成り立っている。実際、

$$
\begin{aligned}
&y(t_0,s)-x(t_0,s)=x(t_0,s_0)-x(t_0,s)+\int_{s_0}^{s}\gamma(t_0,\sigma)d\sigma\\
=&x(t_0,s_0)-x(t_0,s)+\int_{s_0}^{s}\frac{\partial x}{\partial s}(t_0,\sigma)d\sigma=0
\end{aligned}
$$

となるからである。他方、$\frac{\partial}{\partial t}\gamma(t,s)$ は連続だから、積分と偏微分の交換ができることに注意すると、

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(y(t,s)-x(t,s))=\frac{\partial}{\partial t}(x(t,s_0)-x(t,s))+\int_{s_0}^{s}\frac{\partial\gamma}{\partial t}(t,\sigma)d\sigma\\
=&A(t,s_0)x(t,s_0)-A(t,s)x(t,s)+a(t,s)-a(t,s_0)\\
&\quad+\int_{s_0}^{s}(A(t,\sigma)\gamma(t,\sigma)+\frac{\partial A}{\partial s}(t,\sigma)x(t,\sigma)+\frac{\partial a}{\partial s}(t,\sigma))d\sigma\\
=&(A(t,s_0)-A(t,s))x(t,s_0)+A(t,s)(x(t,s_0)-x(t,s))+0\\
&\quad+\int_{s_0}^{s}A(t,\sigma)\gamma(t,\sigma)d\sigma+\int_{s_0}^{s}\frac{\partial A}{\partial s}(t,\sigma)(x(t,\sigma)-x(t,s_0))d\sigma\\
&\quad+\int_{s_0}^{s}\frac{\partial A}{\partial s}(t,\sigma)x(t,s_0)d\sigma\\
=&0+A(t,s)(y(t,s)-x(t,s))-A(t,s)\int_{s_0}^{s}\gamma(t,\sigma)d\sigma\\
&\quad+\int_{s_0}^{s}A(t,\sigma)\gamma(t,\sigma)d\sigma+\int_{s_0}^{s}\frac{\partial A}{\partial s}(t,\sigma)(x(t,\sigma)-y(t,\sigma))d\sigma\\
&\quad+\int_{s_0}^{s}\frac{\partial A}{\partial s}(t,\sigma)(\int_{s_0}^{\sigma}\gamma(t,u)du)d\sigma\\
=&A(t,s)(y(t,s)-x(t,s))-A(t,s)\int_{s_0}^{s}\gamma(t,\sigma)d\sigma\\
&\quad+\int_{s_0}^{s}\frac{\partial A}{\partial s}(t,\sigma)(x(t,\sigma)-y(t,\sigma))d\sigma\\
&\quad+\int_{s_0}^{s}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(A(t,\sigma)\int_{s_0}^{\sigma}\gamma(t,u)du\right)d\sigma\\
=&A(t,s)(y(t,s)-x(t,s))+\int_{s_0}^{s}\frac{\partial A}{\partial\sigma}(t,\sigma)(x(t,\sigma)-y(t,\sigma))d\sigma
\end{aligned}
$$

したがって $z(t,s):=y(t,s)-x(t,s)$ とおくと $z(t_0,s)=0$ であって

$$
\frac{\partial z}{\partial t}(t,s)=A(t,s)z(t,s)-\int_{s_0}^{s}\frac{\partial A}{\partial\sigma}(t,\sigma)z(t,\sigma)d\sigma \tag{5}
$$

となる。そこで、

$$
\begin{aligned}
\|z(t,s)\|&=\|\int_{t_0}^{t}\frac{\partial z}{\partial t}(\tau,s)d\tau\|\\
&\leq|\int_{t_0}^{t}\|A(\tau,s)\|\|z(\tau,s)\|d\tau|+|\int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t}\|\frac{\partial A}{\partial\sigma}(\tau,\sigma)\|\|z(t,\sigma)\|d\sigma d\tau|
\end{aligned}
$$

と評価できる。連続函数 $\|A(\tau, s)\|$ および $\|\dfrac{\partial A}{\partial \sigma}(t, \sigma)\|$ の、いま考えている有界閉集合の上での最大値を $K \geq 0$ および $L \geq 0$ とすると、

$$\|z(t,s)\| \leq K|\int_{t_0}^{t} \|z(\tau, s)\| d\tau| + L|\int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} \|z(\tau, \sigma)\| d\sigma d\tau|$$

となる。これに補題 A (ii) を適用すると $\|z(t,s)\| = 0$ つまり

$$x(t,s) = y(t,s) = x(t, s_0) + \int_{s_0}^{s} \gamma(t, \sigma) d\sigma$$

が得られる。つまり $x(t,s)$ は s について C^1 級で $\dfrac{\partial x}{\partial s} = \gamma$ である。補題 B が証明された。 $\square$

変分方程式 ($\sharp\sharp$) から出発して、補題 B を繰り返すことで何回でも偏微分できることが分かる。以上で定理 12 の証明が終わった。 $\square$