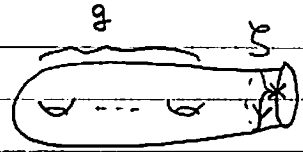
(作成: 10/10/22)

大阪大学理学研究科数学専攻 談話会
2010年12月13日(月) 16:30–17:30 B342
"The logarithms of Dehn twists"

河澄響矢 (東大数理)
久野雄介氏 (広島大理, 学振PD) との共同研究

arXiv: 1008.5017

$g \geqq 1$

$\Sigma = \Sigma_{g,1} =$  $* \in \partial\Sigma$

$\pi := \pi_1(\Sigma, *)$, $\zeta \in \pi$

$H := H_1(\Sigma; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}^{2g}$ 交叉形式をもつ

$\{A_i, B_i\}_{i=1}^{g} \subset H$ symplectic basis

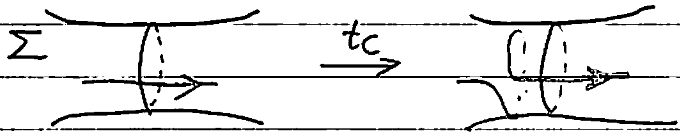
$A_i \cdot A_j = B_i \cdot B_j = 0$

$A_i \cdot B_j = -B_j \cdot A_i = \delta_{ij}$

$\omega := \sum_{i=1}^{g} A_i B_i - B_i A_i \in H^{\otimes 2}$ (tensor代数の積と考えて $\otimes$ はおとして書く)

symplectic form (sympl. basis のとり方によらない)

<u>Dehn twist</u> $C \subset \Sigma$ simple closed curve (SCC)



右手 Dehn twist

t_C は isotopy を除いて unique に決まる つまり

$t_C \in \mathrm{Diff}(\Sigma \text{ rel } \partial\Sigma)/_{\text{isotopy}} =: \mathcal{M}$ 写像類群

が決まる

$t_C \curvearrowright H$ について

<u>Picard–Letschetz 公式</u> (transvection formula)

$$t_{C*} X = X - (X \cdot [C])[C] \in H \quad (\forall X \in H)$$

SCCの分類

$$\begin{cases} C : \text{non-separating} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \Sigma \setminus C : \text{connected} \Longleftrightarrow [C] \neq 0 \in H \\ C : \text{separating} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \Sigma \setminus C : \text{2つの成分に分かれる} \Longleftrightarrow [C] = 0 \in H \end{cases}$$

この公式はどちらの場合にも成り立っている

目標 この公式を基本群のlevelに拡張したい。

Johnson準同型を考えるとπよりは完備群環

$$\widehat{\mathbb{Q}\pi} \overset{\text{def}}{=} \varprojlim_{m\to\infty} \mathbb{Q}\pi / I\pi^m, \quad I\pi = \mathrm{Ker}(\varepsilon : \mathbb{Q}\pi \to \mathbb{Q}), \quad \sum a_x x \mapsto \sum a_x$$

を考えた方がよい (Fact $\pi \hookrightarrow \mathbb{Q}\pi \hookrightarrow \widehat{\mathbb{Q}\pi}$)

$\widehat{\mathbb{Q}\pi}$: $I\pi$によるfiltration, $\widehat{I\pi}^p$が入っている

complete Hopf algebra

これを記述する

$$\hat{T} := \prod_{m=0}^{\infty} H^{\otimes m} \quad \text{completed tensor product}$$

$\hat{T}_p := \prod_{m \geq p} H^{\otimes m}$ によるfiltrationをもつcomplete Hopf algebra

定義 (Massuyeau)

$\theta : \widehat{\mathbb{Q}\pi} \to \hat{T}$ symplectic expansion

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
0) $\theta : \widehat{\mathbb{Q}\pi} \to \hat{T}$ filter-preserving isom. of complete Hopf alg.
1) $\theta : \widehat{\mathbb{Q}\langle\zeta\rangle} \cong \mathbb{Q}[[\omega]]$
2) $\theta = 1_H : \widehat{I\pi}/\widehat{I\pi}^2 = H \to \hat{T}_1/\hat{T}_2 = H$

例 (1) (K.) harmonic Magnus expansion ($/\mathbb{R}$)
(2) (Massuyeau) LMO expansion
(3) (Kuno) combinatorial sympl. exp. (arXiv: 1009.2219)

$\varphi \in \mathcal{M} = \mathrm{Diff}(\Sigma \operatorname{rel} \partial\Sigma)/\text{isotopy}$

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbb{Q}\pi} & \overset{\theta}{\cong} & \hat{T} \\ \varphi \downarrow \wr & & \downarrow \exists! \, T^\theta(\varphi) \\ \widehat{\mathbb{Q}\pi} & \overset{\theta}{\cong} & \hat{T} \end{array}$$

$T^\theta : \mathcal{M} \to \mathrm{Aut}(\hat{T})$

total Johnson map (K.)

injective

目標 $T^\theta(t_C)$ を記述する

$$\widehat{T}_1 = H\otimes\widehat{T} \underset{\text{Poincaré duality}}{=} \mathrm{Hom}(H,\widehat{T}) = \mathrm{Der}(\widehat{T})$$

$$D|_H \longleftarrow D$$

$N: \widehat{T} \to \widehat{T}_1 = \mathrm{Der}(\widehat{T})$

$N|_{H^{\otimes 0}} = 0$

$N(X_1\cdots X_m) = \sum_{i=1}^{m} X_i\cdots X_m X_1\cdots X_{i-1} \in H^{\otimes m}, \quad X_i\in H$

$\mathrm{Der}_\omega(\widehat{T}) \overset{\mathrm{def}}{=} \{D\in \mathrm{Der}(\widehat{T}) ; D\omega = 0\}$

$= N(\widehat{T})$

$(\because (X_1\cdots X_m)(\omega) = -X_1X_2\cdots X_m + X_2\cdots X_m X_1)$

θ : sympl. exp.

$\ell^\theta := \log\theta : \pi \to \widehat{T}_1, \quad x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}(\theta(x)-1)^k$

$x\in\pi$

$L^\theta(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2}N(\ell^\theta(x)\ell^\theta(x)) \in N(\widehat{T}) = \mathrm{Der}_\omega(\widehat{T})$

$\begin{cases} L^\theta(yxy^{-1}) = L^\theta(x) & (\forall x, \forall y\in\pi) \\ L^\theta(x^{-1}) = L^\theta(x) \end{cases}$ $\left(\frac{1}{2}(\log x)^2 = \int\frac{1}{x}\log x\,dx\right)$

L^θ : unoriented free loop の不変量

C : SCC について $L^\theta(C)\in \mathrm{Der}_\omega(\widehat{T})$ exp をとると alg. autom になる。

定理 (Kuno-K.)

$T^\theta(t_C) = e^{-L^\theta(C)}$ on $\widehat{T}\ (\overset{\theta}{\cong} \widehat{\mathbb{Q}\pi})$

つまり $-L^\theta(C)$ は t_C の log である —

低次数の場合 $\varphi\in\mathcal{M}$

$T^\theta(\varphi) = (1 + \sum_{k=1}^{\infty}\tau_k^\theta(\varphi))\varphi_*$, $\quad \varphi_*: H\to H$, $\tau_k^\theta(\varphi)\in H^*\otimes H^{\otimes(k+1)}$

the k-th Johnson map

$L^\theta(C) = L(C) = \sum_{m=2}^{\infty} L_m(C), \quad L_m(C)\in H^{\otimes m}$

No.

Date

・ (non-separating case)

degree 0 (Picard-Lefschetz / transvection formula)

$$L_2(C) = [C][C] \in H^{\otimes 2}$$

$$t_{C*}X = X - (X \cdot [C])[C] \in H, \quad (\forall X \in H)$$

degree 1 (Kuno's original formula)

$$\tau_1^\theta(t_C) = -L_3(C) = -[x] \wedge \ell_2(x) \in \Lambda^3 H, \quad (C は x \in \pi の conj. class)$$

森田の計算とも match している

degree 2

$$\tau_2^\theta(t_C) = -L_4 + \frac{1}{2}[L_2, L_4] + \frac{1}{2}L_3^2$$

(separating case)

degree 2 (Morita)

$$\tau_2(t_C) = -L_4$$

degree 3

$$\tau_3^\theta(t_C) = -L_5$$

応用 $\Gamma_k(\pi)$: π の lower central series. $\Gamma_1(\pi) = \pi$.

$N_k := \pi/\Gamma_{k+1}(\pi)$ the k^{th} nilpotent quotient, $N_1 = \pi^{abel}$

系1 t_C の N_k への作用は C の N_k における共役類だけで決まる

(∵) $\theta : N_k \hookrightarrow \hat{T}/\hat{T}_{k+1}$ injective //)

系2 単純でない閉曲線 C についても $e^{-L(C)}$ によって $\widehat{\mathbb{Q}\pi}$ 上で

"C に沿う Dehn twist" が定義される

定理の証明は集中講義で与える

鍵になる概念 : Goldman Lie algebra

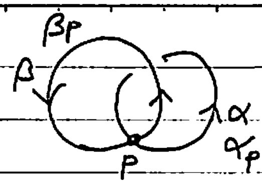
$$\hat{\pi} := \pi/\mathrm{conj} = [S^1, \Sigma] \quad \text{free homotopy class}$$

Goldman bracket on $\mathbb{Z}\hat{\pi}$

$\alpha, \beta \in \hat{\pi}$ in general position

$[\alpha,\beta] \overset{\text{def}}{=} \sum_{p\in\alpha\cap\beta} \varepsilon(p;\alpha,\beta)\,|\alpha_p\beta_p| \in \mathbb{Z}\hat{\pi}$

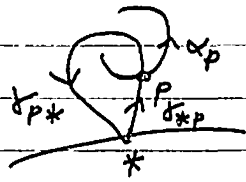
$|\ | =$ conjugacy class



$\varepsilon = +1$

$\sigma : \mathbb{Z}\hat{\pi} \to \mathrm{Der}(\mathbb{Z}\pi)$

$\alpha \mapsto (\gamma \mapsto \sigma(\alpha)(\gamma))$



$\sigma(\alpha)(\gamma) = \sum_{p\in\alpha\cap\gamma} \varepsilon(p;\alpha,\gamma)\,\gamma_{*p}\alpha_p\gamma_{p*} \in \mathbb{Z}\pi$

σ : well-defined Lie algebra

Key theorems

θ : symplectic expansion

$\lambda_\theta := N\theta : \mathbb{Q}\hat{\pi} \to \mathrm{Der}_\omega(\hat{T})$, $x \mapsto N\theta(x)$

定理A (Kuno-K.)

$-\lambda_\theta : \mathbb{Q}\hat{\pi} \to \mathrm{Der}_\omega(\hat{T})$

Lie algebra homom.

$\mathrm{Ker}\,\lambda_\theta = \mathbb{Q}1$, $1 =$ const. loop

$\mathrm{Im}\,\lambda_\theta \overset{\text{dense}}{\subset} \mathrm{Der}_\omega(\hat{T})$

定理B (Kuno-K.)

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}\hat{\pi}\otimes\mathbb{Q}\pi \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "-\lambda_\theta\otimes\theta"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{Q}\pi \arrow[d, "\theta"] \\
\mathrm{Der}_\omega(\hat{T})\otimes\hat{T} \arrow[r, "\text{derivation}"'] & \hat{T}
\end{tikzcd}$$

Goldman Lie algebra

$\downarrow \lambda_\theta$

$\omega \leftrightarrow$ edge chord

Kontsevich's formal symplectic geometry

$\mathrm{Der}_\omega(\hat{T}) \xleftarrow{\text{Johnson homom.}}$ Torelli groups

Moduli of Riemann surfaces

No.

Date