(作成: 10/10/26)
(修正: 10/11/02)

No. 1-1
Date 10・12・14

§1. 曲面の交叉形式

講義の前半の流れ

§2. Lie代数の復習

$\boxed{§1. 交叉形式}$ $\xrightarrow{\text{幾何的精密化}}$ $\boxed{§3. \text{Goldman Lie代数}}$

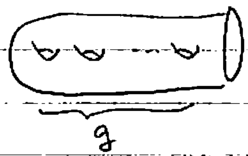
$\downarrow$ §6 主定理 $\Leftarrow$ §5 symplectic展開

$\boxed{§1. 交叉形式}$ $\xrightarrow{\text{代数的精密化}}$ $\boxed{§4. \text{形式的 symplectic 幾何}}$

この§でやること

- 交叉形式
- 単純閉曲線の分類
- Dehn twist の homology への作用

$g \geq 1$

$\Sigma = \Sigma_{g,1} :=$  種数 g 境界成分1の compact 曲面

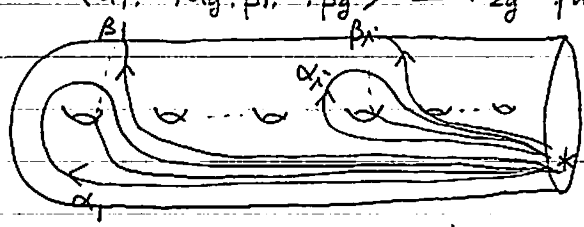
$* \in \partial\Sigma$

$\pi = \pi_1(\Sigma, *)$

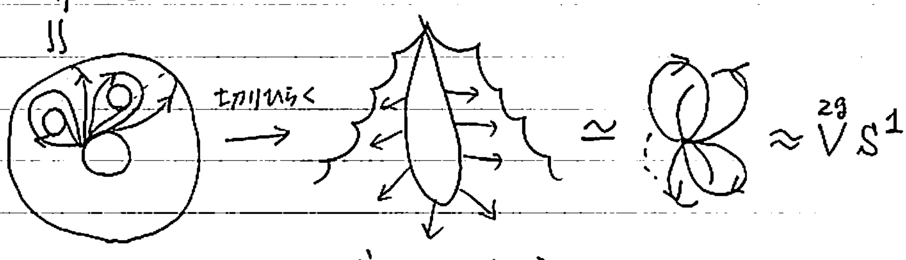
補題1.1.

$$\Sigma \simeq \bigvee^{2g} S^1 \simeq K(\pi, 1)$$

$$\pi = \langle \alpha_1, \cdots, \alpha_g, \beta_1, \cdots, \beta_g \rangle \cong F_{2g} \quad \text{free group of rank } 2g$$



証明



tree の可縮性より $\pi_q(\Sigma) = 0$ for $q \geq 2$ //

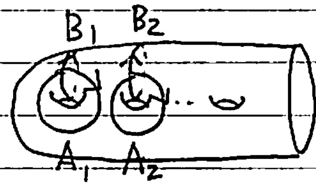
No.

Date

$H_{\mathbb{Z}} := H_1(\Sigma ; \mathbb{Z}) = \pi^{abel}$

$x \in \pi \longmapsto [x] \in H_{\mathbb{Z}}$ natural projection

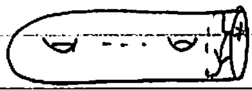
系1.2 $A_i := [\alpha_i],\ B_i := [\beta_i] \in H_{\mathbb{Z}}$



$H_{\mathbb{Z}}$ の基底として $\{A_i, B_i\}_{i=1}^{g}$ がとれる

約束・基本群の積は $\overrightarrow{\gamma_1\gamma_2}$ 左から読む
・交換子は $[x,y] = xyx^{-1}y^{-1},\ x,y \in \pi$

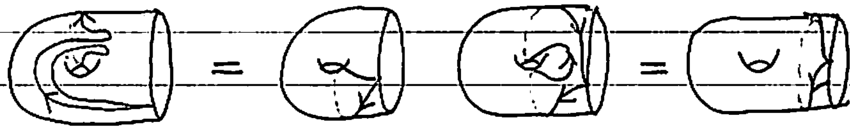
$\zeta \in \pi$



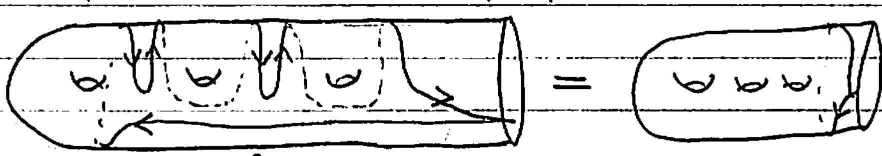
境界を逆向きに一周する

補題1.3 $\prod_{i=1}^{g} [\alpha_i, \beta_i] = \zeta$

証明



$\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}$ $\qquad$ $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}$



$\prod_{i=1}^{g} [\alpha_i, \beta_i] \qquad = \zeta$ //

交叉形式 2通りのやり方で定義する

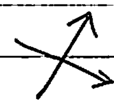
① 幾何的定義 次を使う

定理1.4 (c.f., e.g., [Goldman] p.291, Lemma 5.6)

M : 1-dim closed mfd, S : 2-dim mfd

(1) $\forall f : M \to S$ conti. map

$\exists \hat{f} : M \to S$ generic immersion



(immersion であって自己交叉は横断的二重点のみ)

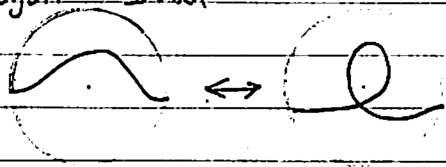
s.t. $f \simeq \hat{f} : M \to S$ (free) homotopic

(2) $f, g : M \to S$ generic immersions

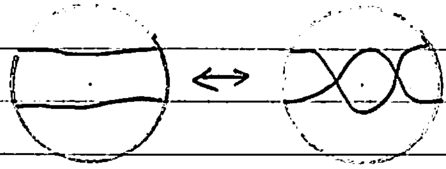
$f \simeq g : M \to S$ (free) homotopic

$\Rightarrow$ $f = f_0, {}^\exists f_1, \cdots, {}^\exists f_{k-1}, f_k = g$ generic immersions の列
各 f_i と f_{i+1} は次の3つの moves のどれかでうつりあう.

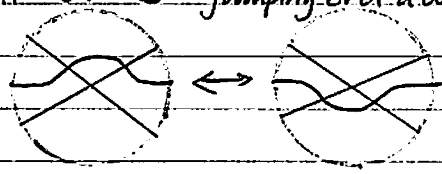
(ω1) monogon の生滅



(ω2) bigon の生滅



(ω3) 二重点のとびこえ jumping over a double point.



$\hat{\pi} := \pi/\mathrm{conj.} = [S^1, \Sigma] = \mathrm{Map}(S^1, \Sigma)/(\text{free})\text{ homotopic}$

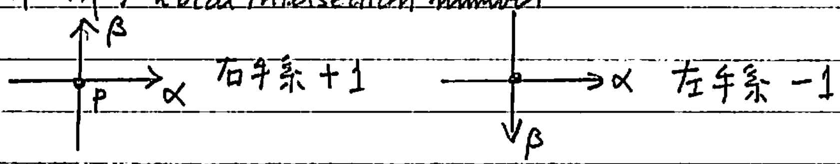
$|\ | : \pi \to \hat{\pi},\ x \mapsto |x|$ natural projection

$\alpha, \beta \in \hat{\pi}$, $\alpha \sqcup \beta : S^1 \sqcup S^1 \to \Sigma$ generic immersion となるように代表元をとる (∵ Thm 1.4(1))
このとき $\#(\alpha \cap \beta) < \infty$

<u>交叉数</u> (intersection number)

$$\alpha \cdot \beta \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \varepsilon(p ; \alpha, \beta) \in \mathbb{Z}$$

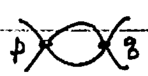
$\varepsilon(p ; \alpha, \beta)$ local intersection number



<u>well-defined</u> (ω1)~(ω3) で交叉数が変わらないことをたしかめる

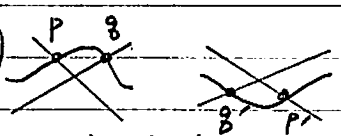
(ω1) 関係ない

(ω2)



$\varepsilon(p ; \alpha, \beta) = -\varepsilon(q ; \alpha, \beta)$

(ω3)



$\varepsilon(p, \alpha, \beta) = \varepsilon(p' ; \alpha, \beta)$. q, q' も同様 //

No.

Date

交叉形式

$\bullet : \hat{\pi} \times \hat{\pi} \to \mathbb{Z}$

が定義できた. 次は明らか

補題1.5.

(1) $\forall \varphi : \Sigma \to \Sigma$ ori. pres. diffeo $\varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta) = \alpha\cdot\beta$

(2) $\alpha\cdot\beta = -\beta\cdot\alpha \quad (\forall\alpha, \forall\beta \in \hat{\pi})$

(3) $|x_1x_2|\cdot\beta = |x_1|\cdot\beta + |x_2|\cdot\beta \quad (\forall x_1, \forall x_2 \in \pi)$

(2)(3)により交代双線型写像

$\bullet : H_{\mathbb{Z}} \times H_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}$

がえられる

補題1.6. 写像

$\mathcal{N} : H_{\mathbb{Z}} \to \mathrm{Hom}(H_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}),\ X \mapsto (Y \mapsto Y\cdot X)$

は同型である.

(証) $\{A_i^*, B_i^*\} \subset \mathrm{Hom}(H_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$: $\{A_i, B_i\}$の双対基

$\mathcal{N} : \begin{array}{l} A_i \mapsto -B_i^* \\ B_i \mapsto A_i^* \end{array}$ これは同型 //

② 代数的定義

cap積 X : top. sp. $A \subset X$ subspace

$\cap : H_n(X,A) \otimes H^p(X) \to H_{n-p}(X,A)$

$z \otimes u \longmapsto z \cap u$

$\langle z, u \vee v\rangle = \langle z\cap u, v\rangle \quad (\forall v \in H^{n-p}(X,A))$ ($\vee$: cup積)

M^d : d-dim compact oriented manifold.

$[M] \in H_d(M, \partial M)$ fundamental class

定理1.7. (Poincaré duality)

$[M]\cap : H^p(M) \xrightarrow{\cong} H_{d-p}(M, \partial M)$

注意 twisted coefficients でも成立つ

交叉形式 $z \in H_p(M)$, $w \in H_{d-p}(M, \partial M)$

$z\cdot w = \langle z, ([M]\cap)^{-1} w\rangle \in \mathbb{Z}$

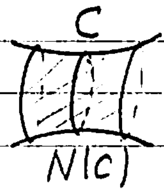
レポート問題1.
$d=2,\ p=1$ のとき, 2つの交叉形式が一致することを証明せよ.

単純閉曲線 SCC

定義 $C \subset \Sigma$ simple closed curve (SCC)

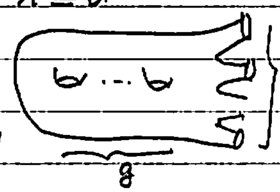
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (1) $C \subset \mathring{\Sigma}$ 1-dim. C^∞ submfd
(2) $C \cong S^1$ diffeo

注意 C は closed tubular nbd $N(C)$ をもつ.



SCC の分類
⇑

定理1.8.(曲面の分類定理)
S: connected compact oriented 2-mfd
$\Longrightarrow$ $\exists!\, g \geq 0,\ \exists!\, r \geq 0.$

$S \underset{\substack{\text{ori.}\\ \text{pres.}\\ \text{diffeo}}}{\cong}$  $\Big\}\, r =: \Sigma_{g,r}$

((注) $\#\pi_0(\partial S) = r,\ \chi(S) = 2-2g-r.$)

レポート問題2 定理1.8を証明せよ.
ただし背景となる定理(handle分解の存在, 三角形分割の存在, Riemann-Rochの定理など)を明確に引用せよ.

$C \subset \mathring{\Sigma}$ S.C.C.
$\Sigma \setminus \mathring{N}(C)$: compact oriented 2-mfd

$\left\{ \begin{array}{l} \text{境界成分数} = 3 \\ \chi = \chi(\Sigma) = 1-2g \end{array} \right.$

Thm1.8 $\Downarrow$ 定義

$\Sigma \setminus \mathring{N}(C) \underset{\substack{\text{ori.}\\ \text{pres.}\\ \text{diffeo}}}{\cong} \left\{ \begin{array}{ll} \Sigma_{g-1,3} & \text{--- } C: \text{non-separating} \\ \Sigma_{h,1} \sqcup \Sigma_{g-h,2}\ (0 \leq {}^{\exists}h \leq g) & \\ & \text{--- } C: \text{separating } (\ ,\ ) \text{ of bounding genus } h \end{array} \right.$ とよぶ.

$\Sigma \setminus \mathring{N}(C)$ の diffeo type を C の type とよぶことにする

命題1.9 (S.C.C. の分類)

$C, C' \subset \Sigma$ SCC's について次は同値である

(a) C と C' の type はひとしい

(b) $\exists \varphi : \Sigma \to \Sigma$ ori. pres. diffeo s.t. $\varphi|_{\partial\Sigma} = 1_{\partial\Sigma}$, $\varphi(C) = C'$

証明 (b)⇒(a) 明らか

(a)⇒(b) $\exists \varphi' : \Sigma \setminus \mathring{N}(C) \to \Sigma \setminus \mathring{N}(C)$ ori. pres. diffeo

$\varphi'|_{\partial\Sigma} = 1_{\partial\Sigma}$ としてよい (境界成分は入れかえられる)

($\because$ S^1 上の ori. pres. diffeo は 1_{S^1} に isotopic)

$\partial N(C)$ を貼り直すと Σ が回復し、望む φ がえられる //

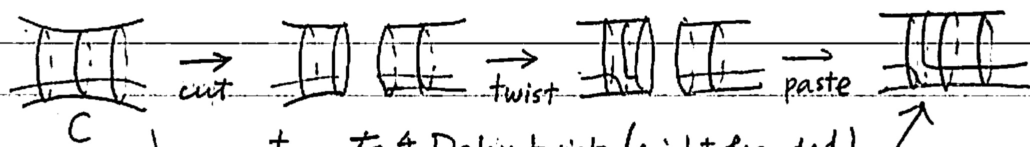
補題1.10 $C \subset \Sigma$ S.C.C

C : non-sep $\Leftrightarrow$ $[C] \neq 0 \in H_{\mathbb{Z}}$

C : sep $\Leftrightarrow$ $[C] = 0 \in H_{\mathbb{Z}}$

($\because$) ($\Rightarrow$) 命題1.9 と具体的な絵から明らか //

Dehn twist $C \subset \Sigma$ S.C.C



t_C 右手Dehn twist (right handed) $(t_C|_{\Sigma \setminus \mathring{N}(C)} = id)$

t_C は $\partial\Sigma$ を pointwise にとめる isotopy を除いて一意的に定まる

($\because$ tubular nbd の isotopy を除く一意性)

$C \sim C'$ isotopic $\Rightarrow$ $t_C \sim t_{C'}$ $\partial\Sigma$ を pointwise にとめて isotopic

($\because$ isotopy 拡張定理)

$$\mathcal{M}_{g,1} := \{\varphi : \Sigma \to \Sigma \text{ ori. pres. diffeo},\ \varphi|_{\partial\Sigma} = 1_{\partial\Sigma}\} / \partial\Sigma \text{ を pointwise にとめる isotopy}$$

mapping class group

$t_C \in \mathcal{M}_{g,1}$ well-defined

補題 1.11. $\forall C \subset \Sigma$ S.C.C. $\forall \varphi \in \mathcal{M}_{g,1}$

$$\varphi t_C \varphi^{-1} = t_{\varphi(C)} \in \mathcal{M}_{g,1}$$

証明 Dehn twist の絵の全体を φ で写す //

定理 1.12 (Dehn-Lickorish)

$\{t_C ; C \subset \Sigma$ non-sep. SCC$\}$ は $\mathcal{M}_{g,1}$ を生成する —

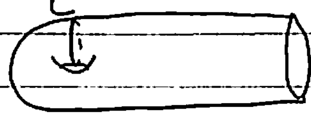
$\varphi \in \mathcal{M}_{g,1} \curvearrowright H_{\mathbb{Z}}$. これを $|\varphi|$ とかく

命題 1.13 $\forall X \in H_{\mathbb{Z}}$

$$|t_C| X = X - (X \cdot [C])[C]$$

証明 (1) $C = (\beta_1)$ の場合

C



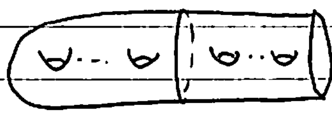
$|t_C| A_1 =$  $= A_1 - B_1 = A_1 - (A_1 \cdot B_1) B_1$

$|t_C| B_1 = B_1 = B_1 - (B_1 \cdot B_1) B_1$

$i \geq 2$ については

$|t_C| A_i = A_i, \quad |t_C| B_i = B_i$

(2) $C = (\gamma_h)$, $\gamma_h = \prod_{i=1}^{h} [\alpha_i, \beta_i]$ の場合



C

$|t_C| A_i = A_i$
$|t_C| B_i = B_i$ $(1 \leq \forall i \leq g)$

$[C] = 0$ より 右辺 $= X$

(3) 一般の場合.

$\exists \varphi \in \mathcal{M}_{g,1}$ $\varphi(C) = (\beta_1)$ または (γ_h) $(\exists h)$ (∵ Prop. 1.9)

(1)(2) より

$$|t_C| X = |\varphi|^{-1} |t_{\varphi(C)}| |\varphi| X = |\varphi|^{-1} \left(|\varphi| X - (|\varphi| X \cdot |\varphi|[C]) |\varphi|[C] \right)$$

$$\underset{\text{Lem 1.5 (1)}}{=} X - (X \cdot [C])[C] \quad //$$

この公式を精密化するのが この研究の 当初の 目的であった
(§6 で実際に行う)

No.

Date