

第5回数理解析I演習 (2010年11月12日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 勝島義史

[28] 次の計算をせよ。

$$(1) \int_{|z|=2} \frac{1}{z^2+1} dz \quad (2) \int_{|z-1|=1} \frac{e^z}{z^4-1} dz$$
$$(3) \int_{|z|=2} z^n(1-z)^m dz \quad (4) \int_{|z|=\rho} |z-a|^{-4} dz \quad (|a| \neq \rho)$$

[29] γ を $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 内で 1 と $a \neq 0$ を結ぶ C^1 曲線とする. このとき

$$\exp \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = a$$

を示せ. (よってこの線積分で $\log a$ を定義することができる.)

[30] x の多項式 $f(x)$ に対して

$$F(z) = \int_0^1 \frac{f(t)}{z-t} dt$$

と定義する ([26] により $F(z)$ は $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$ で正則). このとき

$$\lim_{t \downarrow 0} (F(x+it) - F(x-it)) = 2\pi i f(x), \quad x \in (0, 1)$$

を積分路の変形を用いて示せ. (この等式は一般の連続関数 $f(x)$ についても成り立つ.)

[31] z の多項式 $P(z)$ に対して線積分

$$\int_{|z-a|=r} \overline{P(z)} dz$$

を求めよ.

演習問題は <http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~hirachi/courses/> からダウンロードできます. 講義メモも載せています.